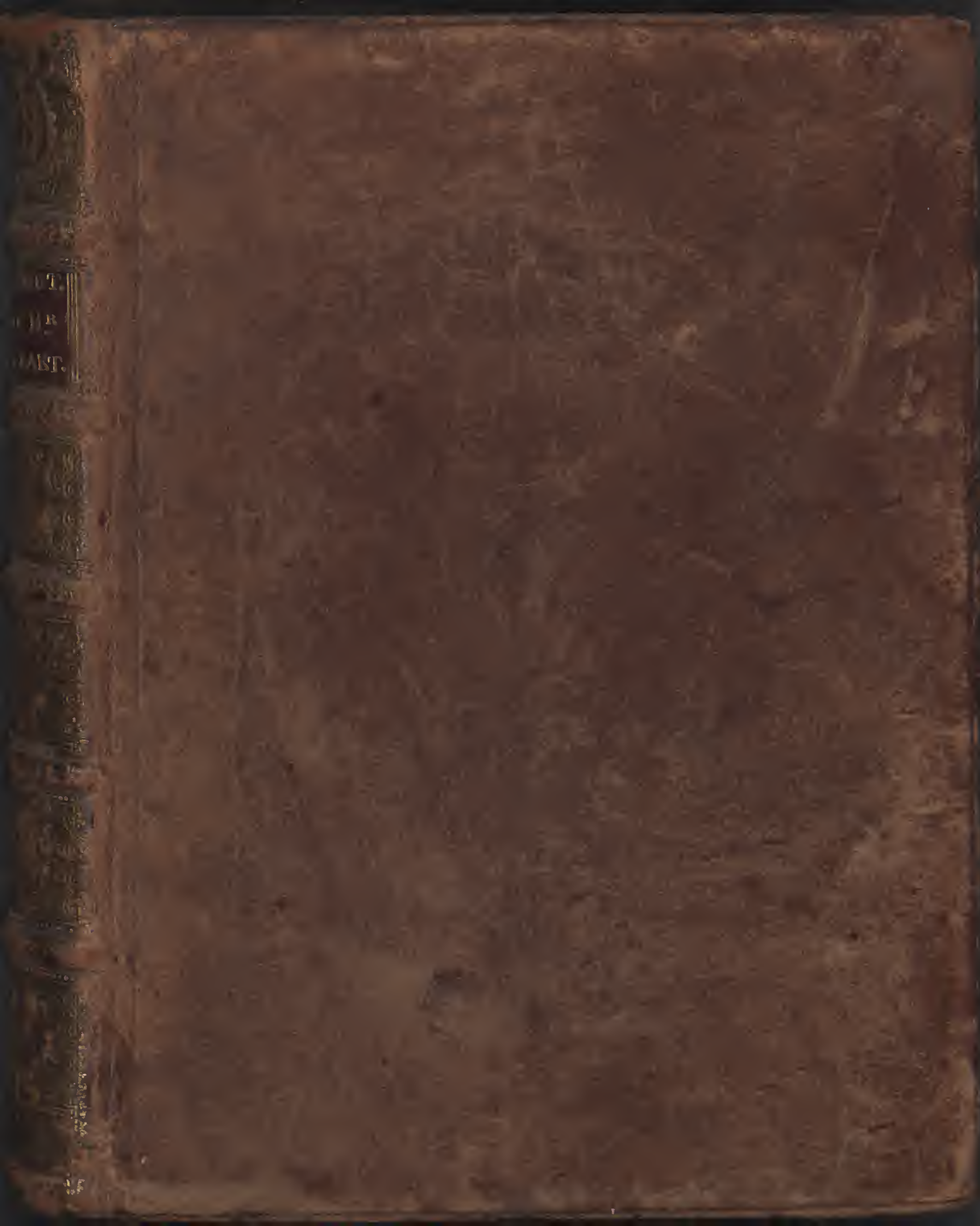
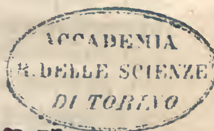



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Plana. III. 46.



COMMENTAIRES
SUR LA
GEOMETRIE
DE
M. DESCARTES.

Par le R. P. CLAUDE RABUEL, *de la Compagnie de* JESUS.





A LYON,
Chez MARCELLIN DUPLAIN, Ruë Merciere.

MDCCXXX.
AVEC APPROBATIONS ET PRIVILEGE DU ROY.

PREFACE.

IL ſeroit inutile aujourd'hui d'entreprendre un éloge de Mr Descartes. Ses découvertes dans la Phyſique & dans les Mathematiques, font mieux connoître le caractére de ce Grand Homme, que tout ce que nous en pourrions dire. Si dans la Philoſophie, il s'eſt quelquefois écarté du vrai, en abandonnant les opinions communes; du moins lui devons-nous cette juſtice, que dans les choſes mêmes qu'il ne nous propoſe que comme problematiques, on reconnoît toûjours cette étenduë & cette ſuperiorité de genie, qui l'ont rendu l'admiration de ſon ſiecle. Son Chef-d'œuvre eſt ſans doute ſa Geometrie. C'eſt là que prenant une route inconnuë à tous ceux, qui l'avoient precedé, il ſe fraie un chemin tout nouveau. M. Descartes remarqua, qu'un Problême ſeul avoit été l'écueil de toute l'Antiquité. Loin de s'en prendre aux Anciens, qui ne manquoient certainement, ni d'étude, ni de lumieres: il en rejetta toute la faute ſur la Geometrie ancienne & ſur ſes Methodes. Dans cette idée il en chercha de nouvelles; & faiſant reflexion que tout Problême ſe termine enfin à une égalité, il fixe toutes ſes recherches aux moyens de la trouver. Il ſubſtituë d'abord l'expreſſion des Grandeurs, aux Grandeurs elles-mêmes, & par l'alliage & le mêlange du calcul Arithmetique, des caractéres Algebriques avec les operations de la Geometrie ordinaire, il ſe crée en quelque façon la matiere, qui doit être employée à la compoſition des termes de ſon égalité; mais ce n'eſt là qu'un pas. Il conſidere la nature de ſon Problême, il en rapproche, il en examine toutes les conditions, & par la ſimple inſpection de ce qui arriveroit, ſi la choſe étoit telle en effet, que le Problême la demande, il range ſes termes & forme une égalité;pour laquelle nous le voyons employer differens lieux, ſelon les differens degrez auſquels l'égalité eſt élevée; mais elle n'eſt pas encore reſoluë: c'eſt un tout, produit par la multiplication de pluſieurs parties, il faut le décompoſer pour en découvrir les

racines & le reduire aux termes les plus ſimples, qu'il ſoit poſſible: Et c'eſt ce que M. DESCARTES execute enfin dans le dernier Livre.

Cet Ouvrage qu'un habile Geometre de ce ſiecle appelle avec raiſon * *la Geometrie Françoiſe*, étoit d'une difficulté preſqu'inſurmontable. M. DESCARTES avoit affecté de le reſſerrer dans les bornes les plus étroites. Bien des raiſons, qu'on peut voir dans ſes lettres, l'y avoient engagé. Meſſieurs *de Beaune*, *de Fermat*, *de VVitt*, &c. en ont développez quelques endroits. M. de *Schooten* a voulu éclaircir le tout; mais le Commentateur ſemble avoir aſpiré lui-même à la gloire d'être Commenté à ſon tour. Il exige en plus d'un endroit autant d'étude & d'application, qu'il en faudroit pour comprendre le texte même, qu'il prétend expliquer.

Le Commentaire que nous donnons au Public, s'étend ſur toute la Geometrie de M, DESCARTES, & n'a point le défaut de l'obſcurité. Le Texte y eſt ſuivi article par article. Par tout on trouve les éclairciſſemens neceſſaires & des Exemples de tous les cas, dont M. DESCARTES ne dit ſouvent qu'un mot, & que tout autre qu'un Geometre conſommé ne ſçauroit entrevoir.

Le R. P. RABUEL n'y travailla d'abord que pour ſervir aux jeunes Jeſuites, qui étudioient ſous lui les Mathematiques. C'étoient des Commençans qu'il falloit aider, & à qui il ne vouloit rien laiſſer ignorer de tout ce que M. DESCARTES ne fait qu'indiquer. Il falloit raprocher de leur principe une foule de conſequences éloignées, en faire voir la liaiſon, & le rapport neceſſaire. M. DESCARTES reſout le Problême de Pappus dans le cercle; mais cette ſolution eſt generale, & la ſuppreſſion de quelques termes, le changement de quelques ſignes, plus ou moins de lignes exigent à tout moment un nouveau lieu, & dans ce lieu, combien de combinaiſons? Il falloit tout developper; de là ces differentes applications du Problême, ce grand nombre d'Exemples, qui quoiqu'uniformes en apparence ont cependant, preſque tous, chacun une difficulté que M. DESCARTES avoit enviſagée, & dont il ne parloit pas, parce qu'il s'ennuyoit *d'en tant écrire*. Je ne dis rien de la methode des tangentes, de ſon application aux queſtions *de Maximis & minimis*, des ovales & de leur formation, des lignes ſur les ſurfaces cour-

* Le P. CASTEL J. *Mathematique univerſelle.*

bes, de la construction des Problêmes solides & plus que solides, de la nature des équations, &c. Le R.P. RABUEL n'abandonne jamais son texte. Il le suit toûjours avec une justesse & une clarté, qui ne laisse rien à desirer. Il fait plus : pour apprendre à son Lecteur l'art d'inventer & de trouver, il le conduit, comme par la main, dans les routes qu'a tenuës M. DESCARTES, & lui fait voir par quel chemin ce grand Geometre est arrivé où nous le voyons ; ce qui n'est pas un des moindres avantages du Commentaire.

Cet Ouvrage étoit achevé depuis long-tems ; & déja plusieurs fois on avoit voulu engager le R.P. RABUEL, à le donner au Public ; mais son extrême modestie s'y étoit toûjours opposée. Satisfait de l'unique plaisir qu'il trouvoit à étudier, il ne pouvoit se resoudre à devenir Auteur. Depuis près de vingt années qu'il enseignoit les Mathematiques, au Grand College de Lyon, il n'en est aucune partie qu'il n'eût approfondie. Il nous reste de ce sçavant Jesuite, un Traité d'Algebre, des Sections Coniques, des lieux Geometriques du calcul differentiel, & du calcul integral. Ce dernier Traité est un Ouvrage neuf. Ce que nous en a donné M. *Carré* est admirable, mais il ne suffit pas ; c'est ce qui obligea le R.P. RABUEL à suivre les vûës de cet illustre Academicien, & à développer ce que celui-ci se contente d'abandonner à l'étude & au genie de ses Lecteurs.

Tous ces Ouvrages que nous ferons bientôt paroître, sont le fruit d'un long travail, qu'une santé toûjours foible & délicate ne permettoit guéres de soûtenir, & que de frequentes maladies obligerent souvent d'interrompre. Mais le R.P. RABUEL étoit de ces hommes, qui trouvent dans leur propre fond, dequoi suppléer au défaut du travail. Je lui dois ce témoignage, & la reconnoissance pour les bontez dont il m'a honoré, m'y engage. Il fut mon Maître, c'est de lui que je pris mes premieres leçons de Geometrie ; l'accès qu'il vouloit bien m'accorder auprès de lui, me donna lieu de le connoître plus parfaitement. Il étoit difficile de voir en un seul homme tant de talens réünis & un esprit aussi universel. Son gout exquis pour les belles Lettres, & sur tout pour la Poësie latine, ne sembloit pas nous annoncer un Geometre ; mais il se sentoit, sans s'en appercevoir, une élevation d'esprit à n'en pas demeurer là. Les

ſuccès qu'il eut dans ſes études de Theologie, l'auroient fixé ſans doute à cette ſcience, ſi dans cette multiplicité de talens, ſon goût particulier & plus encore les ordres de ſes Superieurs ne l'euſſent déterminé en faveur des Mathematiques: mais ce ne fut qu'après avoir enſeigné avec éclat la Philoſophie dans deux des principales Villes du Royaume. Ses Ecrits que l'on conſerve avec ſoin, portent le caractére de leur Auteur. Partout on y reconnoît un genie ſiſtematique & une ſublimité, où les Eſprits ordinaires ne ſçauroient atteindre. Enfin placé par l'obéïſſance au Grand College de Lyon, pour y enſeigner les Mathematiques, il ſe livra tout entier à cette étude. Les anciennes & les nouvelles Methodes, rien n'échapa à ſes recherches. Auſſi tous ceux qui le conſulterent, furent-ils toûjours charmez de ſa capacité, mais plus encore remplis d'admiration pour les grandes qualitez, dont le Ciel l'avoit enrichi: une modeſtie qu'on auroit regardé comme exceſſive dans tout autre que dans un Religieux; une regularité conſtante & une exactitude ſcrupuleuſe pour tous les devoirs de ſon Etat; une droiture que rien n'eût été capable de flêchir; une égalité d'ame qu'on ne vit jamais alterée; le cœur le meilleur & le plus tendre pour ſes amis; une patience inalterable dans ſes maladies, une reſignation parfaite aux ordres du Ciel, malgré tous les dégouts que cauſe naturellement une vie accompagnée d'infirmitez, & qui n'avoit d'autre conſolation, que celle que l'on goûte à offrir à Dieu ce que l'on ſouffre. Telles ſont les vertus qui caracteriſerent le R. P. RABUEL, & par l'exercice deſquelles, il ſe diſpoſoit ſans ceſſe à paroître devant le Seigneur. Ce fut au commencement de l'impreſſion de ſon Commentaire, à laquelle on l'avoit enfin determiné, qu'épuiſé par un travail aſſidu, il nous fut enlevé le 12. d'Avril 1728. dans la 60. année de ſon âge, & la 43. depuis ſon entrée dans la Compagnie de JESUS. Je ſuis perſuadé que ceux qui liront ſes Ouvrages, concevront de ce ſçavant Jeſuite une bien plus grande idée, que celle que j'ai tâché de leur en donner, & que ceux qui l'ont connu pendant ſa vie, me ſçauront mauvais gré d'avoir dépeint ſi mal les vertus d'un homme, que les regrets de ſa Compagnie & de tous ſes amis honorent encore plus que tous les éloges que j'en pourrois faire.

TABLE

Pour trouver les Endroits citez.

LIVRE PREMIER, PARTIE PREMIERE.

PARTIE SECONDE.

PARTIE TROISIÉME.

LIVRE II. PARTIE I. De la nature des lignes courbes.

PARTIE SECONDE.

PARTIE TROISIÉME.

PARTIE QUATRIÉME.

Fin de la Table.



COMMENTAIRES SUR LA GEOMETRIE DE MR DESCARTES.

J'ENTREPRENS d'expliquer la Geometrie de Mr DESCARTES, & de la rendre facile à ceux qui l'étudient pour la premiere fois. Je ſuivrai le Texte depuis le commencement juſqu'à la fin, je l'examinerai par Parties, & ſur chaque endroit je mettrai tout ce que j'ai cru utile pour le rendre intelligible. Je pourrai paroître diffus à ceux qui entendent déja ces matieres : mais peut-être ne le paroîtrai-je pas à ceux qui ne les ſavent pas encor, & c'eſt pour eux que j'écris. Je ſuis même perſuadé qu'on aura plûtôt lû & compris la Geometrie & les Commentaires, qu'on n'aura lû & compris la Geometrie ſans un ſemblable ſecours : ſur tout ſi l'on ne ſe contente pas d'entrevoir, que les choſes peuvent être telles que l'Auteur les aſſure ; mais qu'on veuille ſe convaincre par les operations neceſſaires, qu'elles le ſont en effet. J'avouë que quand on eſt ſavant, on a de la peine à ſe repreſenter ce qu'on étoit avant que de le devenir, & qu'il y a des eſprits plus penetrans les uns que les autres ; que les habiles & les commençans qui ont beaucoup de penetration ſouffrent impatiemment les explications étenduës : mais ils peuvent parmi le grand nombre d'exemples choiſir ceux qu'ils aimeront

mieux examiner, & se souvenir que les esprits moins penetrans ont besoin d'un plus grand secours; & que, comme ces derniers composent le plus grand nombre, & que par leur application plus constante ils font souvent de très-grands progrès dans les Sciences, ils meritent qu'on les aide dans les commencemens.

Je ne mets ici aucun éloge de Mr DESCARTES, non seulement parce qu'il est difficile qu'un éloge réponde à l'idée qu'on a de ce grand homme: mais encor parce que ce seroit le loüer assez, que de bien expliquer sa Geometrie.

Cet Ouvrage est si estimé, qu'il n'y a aucun de ceux, qui pretendent se distinguer dans les Mathematiques, qui ne veüille l'avoir lû. * *On lui donne sans peine la preference sur tous les autres Ouvrages de M. Descartes.* ** Cet Auteur lui-même trouvoit sa Geometrie telle, qu'il n'y souhaittoit rien davantage. *** Et quoiqu'il assure qu'il ne l'avoit presque composée, que pendant qu'on imprimoit ses Meteores, & que même il en avoit inventé une partie pendant ce tems-là; il avoüe, qu'il n'avoit pas laissé de s'y satisfaire autant & plus qu'il ne se satisfaisoit d'ordinaire de ce qu'il écrivoit.

** Huet. cens. Phil. cart. c. 8. § 5.*
*** Tom. 3. Lett. 73. au P. Mersenne.*
**** Tô. 3. Lett. 26. à un Pere Jesuite.*

Si nous voulons encor apprendre de M. DESCARTES, combien sa Geometrie a besoin d'explication, il nous dit dans l'Avertissement, qu'il a mis à la tête de cet Ouvrage; *Jusques ici j'ai tâché de me rendre intelligible à tout le monde: mais pour ce Traité je crains qu'il ne pourra être lû que par ceux qui savent déja ce qui est dans les Livres de Geometrie. Car d'autant qu'ils contiennent plusieurs veritez fort bien démontrées; j'ai cru qu'il seroit superflu de les repeter, & n'ai pas laissé pour cela de m'en servir.* * Ailleurs il assure qu'il y a peu de gens, qui puissent entendre sa Geometrie. Il en parle dans un autre endroit de cette maniere. ** *Seulement y ai-je omis quantité de choses, qui auroient pû servir à la rendre plus claire, ce que j'ai fait à dessein, & je ne voudrois pas y avoir manqué.... Rien ne m'avoit ci-devant fait proposer de la refaire, que pour l'éclaircir en faveur des Lecteurs; mais je vois qu'ils sont la plûpart si malins, que j'en suis entierement dégoûté.*

** Tom. 3. Lett. 73.*
*** Tom. 3. Lett. 93. au P. Mersenne.*



LA GEOMETRIE DE M. DESCARTES.

LIVRE I.

ON peut diviser ce Livre en trois Parties: La premiere est comme une introduction à la Geometrie de M. DESCARTES; la seconde enseigne la maniere de resoudre les Problêmes plans; la troisiéme contient le commencement du Problême de Pappus.

PARTIE PREMIERE.

Introduction à la Geometrie de M. Descartes.

SECTION I.

M. DESCARTES.

TOUS les Problêmes de Geometrie se peuvent facilement reduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Dans la Geometrie l'on cherche ou des Points, ou des Lignes, ou des Surfaces, ou des Solides. Ceux qui ont déja resolu quelques Problêmes de Geometrie, auront pû s'appercevoir, que dans tous ces cas, il ne faut pour construire un Problême, que trouver la longueur d'une ou de plusieurs lignes droites. Si quelqu'un en doutoit encore, il pourra le remarquer dans les Problêmes qui suivent. Par le premier l'on cherche un Point, par le second des Lignes, par le troisiéme des Surfaces, par le quatriéme un Solide : & dans tous la connoissance de quelques lignes droites, qu'on trouve, donne la construction du Problême.

PROBLEME I.

LA ligne AB fig. 1. étant donnée, il faut trouver sur cette ligne le Point C, qui la divise de telle sorte, que le Rectangle sous la toute AB & le moindre segment BC soit égal au quarré du plus grand segment AC. c'est la Prop. 11. l. 2. Elem. d'Euclide. Fig. 1.

Supposons la division faite au point C, & nommons AB, a; AC, x. BC sera $a - x$. Nous aurons par la nature du Problême $AB \times BC = \overline{AC}^2$ $aa - ax, = xx$, $xx + ax = aa$; mettons $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, c'est $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$; extrayons la racine quarrée de chaque côté, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$

Construction. Sur l'extrêmité B de la ligne AB élevons la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, joignons DA; du point D comme centre, & de l'intervale DB décrivons l'arc BE, & du point A comme centre à l'intervale AE, l'arc EC. Le point C est celui que l'on cherche.

Démonstration. Le triangle ABD est rectangle en B; donc 47. 1. Eucl. $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$, & $AD = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Mais $DE = DB = \frac{1}{2}a$: donc $AE = AD - DE = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = AC = x$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME II.

Fig. 2. LEs lignes a, b, Fig. 2. étant données, il en faut trouver deux autres telles, que a, ſoit leur moyenne proportionnelle geometrique, & b leur moyenne proportionnelle arithmetique.

Nommons les deux lignes inconnuës z, x. L'on a par la ſuppoſition la proportion geometrique continuë $z : a :: a : x$, & 17. 6. Eucl. $zx = aa$. $z = \frac{aa}{x}$. L'on a auſſi la proportion arithmetique continuë $z . b : b . x$, & $z + x = 2b$, parce que dans une proportion arithmetique continuë de trois termes, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen : & de cette derniere équation l'on conclut celle-ci $z = 2b - x$.

L'on compare enſuite les deux valeurs de z, $\frac{aa}{x} = 2b - x$; l'on multiplie toute cette équation par x, & l'on fait $aa = 2bx - xx$, $xx - 2bx = -aa$. L'on met bb de chaque côté, c'eſt $xx - 2bx + bb = bb - aa$. L'on extrait la racine quarrée de chaque membre $x - b = \sqrt{bb - aa}$, $x = b + \sqrt{bb - aa}$. Après cela l'on ſubſtituë cette valeur de x dans l'équation $z = 2b - x$, & l'on trouve $z = b - \sqrt{bb - aa}$.

Les lignes z, x étant trouvées, on conſtruira le Problême de cette ſorte. Sur un point quelconque A de la ligne infinie DE, élevez la perpendiculaire $AB = a$, & faites $BC = b$. Du point C comme centre & de l'intervale CB, décrivez le demi-cercle DBE. La ligne DA eſt x, la ligne AE eſt z.

Dém. Le triangle CAB eſt rectangle en A: donc 47. 1. Eucl. $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = bb - aa$, & la ligne $AC = \sqrt{bb - aa}$. D'ailleurs $CD = CE = CB$, $= b$, car ce ſont des rayons du même cercle : donc $AD = DC + CA$, $b + \sqrt{bb - aa} = x$; $AE = CE - CA$, $b - \sqrt{bb - aa} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit $a = 6$, $b = 10$, l'on aura $\sqrt{bb - aa} = \sqrt{64} = 8$. & $z = b - \sqrt{bb - aa} = 2$. $x = b + \sqrt{bb - aa} = 18$. La proportion geometrique continuë ſera $2 . 6 . 18$, l'Arithmetique $2 . 10 . 18$.

PROBLEME III.

Fig. 3. TRouver deux quarrez, qui pris enſemble ſoient égaux au rectangle donné $ABCD$ Fig. 3.

Nommons les côtez connus du rectangle AB, a; BC, b; le rectangle $ABCD$ ſera ab, ; & ſi nous appellons les quarrez cherchez l'un zz, l'autre xx; nous ferons par la ſupp. $zz + xx = ab$, $zz = ab - xx$, $z = \sqrt{ab - xx}$.

Le Problême ſe conſtruira de cette maniere. Produiſez la ligne AB en E, juſqu'à ce que BE ſoit égale à BC; ſur le diametre AE decrivez le demi-cercle EFA, prolongez encor BC en F, & ſur le diametre BF decrivez un autre demi-cercle BGF. Tirez une corde quelconque BG & joi-

gnez GF. Ces deux lignes BG, GF sont celles que l'on cherche x, z. FIG. 3.

Dem. L'angle BGF dans le demi-cercle est droit 31. 3. Eucl. & le triangle BGF rectangle : donc 47. 1. Eucl. $\overline{FB}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{BG}^2$, $zz + xx$. De plus 13. 6. Eucl. $\overline{BF}^2 = AB \times BE = ab$, puisque $BE = BC$: donc $\overline{FB}^2 = zz + xx = ab$. C'est à dire, que les quarrez des lignes BG, GF sont égaux au rectangle donné $ABCD$. Ce qu'il falloit démontrer.

Comme on peut tirer BG de la longueur qu'on veut, pourveu qu'elle soit une corde du demi-cercle BGF: il suit, qu'on peut trouver plusieurs quarrez, qui deux à deux soient égaux au rectangle $ABCD$.

PROBLEME IV.

DIviser la liqueur contenuë dans un verre de figure conique en deux parties égales. Ou diviser un cone droit donné DAE Fig. 4. par le plan FBG parallele à la base DCE, de telle sorte que le petit cone FAG soit la moitié du grand DAE. FIG. 4.

L'on connoît le grand cone DAE, & par consequent son axe AC, & le diametre DE de la base. Il suffit de trouver AB axe du petit cone. Car alors il n'y aura plus qu'à faire passer par le point B le plan FBG parallele à la base DCE.

Nommons le grand cone DAE, $2b$; le petit cone FAG, b; l'axe AC, a; le diametre DE, $2c$; le rayon CE, c, l'axe AB, z; le diametre FG, $2x$; le rayon BG x.

Les cones DAE, FAG sont semblables def. 21. l. 11. Eucl. & Prop. 14. l. 12. Eucl. Ces deux cones sont en raison triplée des diametres de leurs bases. C'est pourquoi si je fais cette progression qui commence par les diametres des bases $2c : 2x :: 2x : \frac{2xx}{c} :: \frac{2xx}{c} : \frac{2x^3}{cc}$; le premier terme $2c$ est au dernier $\frac{2x^3}{cc}$, en raison triplée du diametre $2c$ au diametre $2x$. Le cone DAE, $2b$ sera donc aussi au cone FAG, b: comme $2c$ à $\frac{2x^3}{cc}$. Et 16. 6. Eucl. $2bc = \frac{4bx^3}{cc}$. Multipliant par cc, & divisant par $2b$, c'est $c^3 = 2x^3$; $x^3 = \frac{1}{2}c^3$. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3}$, qui est le rayon BG.

De plus la ligne CE est parallele à la ligne GB, ainsi 29. 1. Eucl. les triangles ACE, ABG sont équiangles, & 4. 6. Eucl. $CE, c : CA, a :: BG, \sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3} : BA, z$. Donc 16. 6. Eucl. $cz = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3}$. $z = \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{a^3c^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3} = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Maintenant pour avoir la longueur de la ligne $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3}$. Sur l'axe AB Fig. 5. avec le parametre $AD = a$, decrivez la parabole AF; coupez $AC = \frac{1}{2}a$; au point C élevez la perpendiculaire $CE = \frac{1}{4}a$; du point E comme centre, de l'intervale EA decrivez le cercle ABF, qui coupera la parabole au point F, par lequel vous tirez l'appliquée FL perpendiculaire sur l'axe. Cette appliquée FL est $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3}$. Joignez EF, & abaissez la perpendiculaire EM sur FL. FIG. 5.

Dem. nommons FL, z; AL, y; par la nature de la parabole l'on a $\overline{FL}^2$

Fig. 5. $= AL \times AD$, $zz = ay . y = \frac{zz}{a}$. Ainſi $EM =$ (34. 1. Eucl.) $CL = AL - AC = \frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a$. De même $ML = EC$, $\frac{1}{4}a$; & $FM = FL - ML$, $z - \frac{1}{4}a$. D'un autre côté le triangle eſt rectangle en C, & 47. 1. Eucl. $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{16}aa = \overline{EF}^2$; & dans le triangle EMF rectangle en M, $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{16}aa = \frac{z^4}{aa} - zz + \frac{1}{4}aa + zz - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$, ce qui ſe reduit à $\frac{z^4}{aa} - \frac{1}{2}az = o$, $\frac{z^4}{aa} = \frac{1}{2}az$, & multipliant par aa, diviſant par z, $z^3 = \frac{1}{2}a^3$, dont la racine cubique eſt $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3} = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ valeur cherchée de AB Fig. 4. On n'a donc qu'à faire paſſer par le point B, un plan GBF parallele à la baſe ECD, pour avoir le cone FAG moitié du cone EAD. Ce qu'il falloit démontrer.

SECTION II.

Comment le Calcul de l'Arithmetique ſe rapporte aux operations de la Geometrie.

M. DESCARTES.

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

ET comme toute l'Arihtmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion, & l'Extraction des Racines, qu'on peut prendre pour une eſpece de Diviſion : Ainſi n'a-t-on autre choſe à faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer à être connuës, que leur en ajoûter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que jè nommerai l'unité, pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement être priſe à diſcretion, puis en ayant encor deux autres, en trouver une quatriéme, qui ſoit à l'une de ces deux, comme l'autre eſt à l'unité, ce qui eſt le même que la multiplicaion;ou bien en trouver une quatriéme ,qui ſoit à l'une de ces deux, comme l'unité eſt à l'autre, ce qui eſt le même que la diviſion; ou enfin trouver une ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'unité & quelqu'autre ligne, ce qui eſt le même que tirer la racine quarrée. ou cubique, &c. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arihtmetique en la Geometrie,afin de me rendre plus intelligible.

Fig. 6. La Multiplication.

Soit par exemple fig. 6. AB l'unité, & qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les Points A & C, puis tirer DE pa-

rallele à CA, & BE est le produit de cette multiplication.

La Division.

Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E, & D, je tire AC parallele à DE, & BC est le produit de cette division.

Fig. 7. L'extraction de la Racine quarrée.

Ou Fig. 7. s'il faut tirer la racine quarrée de GH, je lui ajoûte en ligne droite FG qui est l'unité, & divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le Cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément * ci-après.

* Liv. 3. Part. 4. Sect. 1.

1. Il faut expliquer comment les Operations de l'Arithmetique, dont il est ici parlé, se font sur les lignes droites. 2. Il faut montrer le rapport, que ces operations faites sur les nombres ont avec les mêmes operations faites sur les lignes droites. En ce même endroit l'on fera voir que l'extraction de la racine quarrée est une espece de division. 3. Il faut apporter des exemples, où l'unité peut être à discretion; & des exemples, où elle ne le peut pas. 4. Il faut examiner, si en introduisant les termes du calcul Arithmetique dans la Geometrie, l'on se rend plus intelligible.

ARTICLE I.

Comment les Operations de l'Arithmetique se font sur les lignes droites.

1. Touchant l'Addition & la Soustraction. Fig. 8.

Fig. 8.

Ressouvenons-nous, que dans les lieux Geometriques, il y a des grandeurs réelles, qu'on nomme negatives ou fausses, qui sont des veritables lignes, & qui s'expriment avec le signe —, comme $-a$, $-b$.

Soient les lignes AB, a; BC, b; toutes deux des grandeurs positives: la ligne AC sera $a+b$ ajoûtées ensemble.

Soient les lignes AB, $+a$ grandeur positive; BC, $-b$ grandeur negative; la ligne AC sera $a-b$ ajoûtées ensemble.

Soient les lignes AB, $-a$; BC, $-b$; toutes deux des grandeurs negatives: la ligne AC sera $-a-b$ ajoûtées l'une à l'autre.

Soient les lignes AC, a; BC, b; toutes deux des grandeurs positives; la ligne AB sera $a-b$ soustraites l'une de l'autre.

Soient les lignes AC, $+a$ grandeur positive; BC, $-b$ grandeur negative: la ligne AB sera $a+b$, la seconde $-b$ soustraite de la premiere $+a$. parce que comme la grandeur vraye $+b$ étant retranchée prend le signe —, de même la grandeur fausse $-b$ étant soustraite prend le signe +.

Quelle est l'operation de l'Arithmetique, qui donne $a-b$? si a & b sont

FIG. 8. deux grandeurs positives, b est soustraite de a; si a est une grandeur positive, b une negative, b est ajoûtée à a; si a & b sont deux grandeurs negatives, a est soustraite de b; si a est une grandeur negative, b une positive, la valeur de $a - b$ est necessairement au dessous de zero : soit $-a = -10$, $+b = +6$; $a - b$ sera $-10 - 6 = -16$.

L'on voit l'importance qu'il y a d'avertir, ainsi qu'on le fait dans les lieux Geometriques, quand est-ce qu'une grandeur est negative. Lorsqu'on n'avertit pas, la grandeur est supposée positive.

FIG. 6. 2. Touchant la Multiplication & la Division. Fig. 6.

Il faut multiplier la ligne a par la ligne b, je fais un angle quelconque ABC, dont les côtez sont indefinis; sur l'un d'eux je prends AB égale à l'unité, laquelle où est determinée par le Problême, ou par celui qui le construit; sur ce même côté je prends encor la ligne BD égale à la ligne a; ensuite sur l'autre côté je fais BC égale à la ligne b; du point A au point C je mene la ligne AC, & par le point D la ligne DE parallele à AC la ligne BE est le produit de la multiplication de la ligne BD, a par la ligne BC, b.

Le Multiplicateur & le multiplié peuvent changer de place; & si l'on devoit multiplier b par la ligne a, l'on trouveroit également que BE est leur produit en mettant AB l'unité, BD, a le Multiplicateur sur le même côté, & BC, b le multiplié, sur l'autre.

L'on peut aussi joindre le Multiplicateur ou le multiplié à l'unité : comme si je voulois multiplier la ligne AD par la ligne BC, ou la ligne BC par la ligne AD; je joindrois la ligne AD à l'unité AB, je menerois AC, je tirerois DE parallele à AC, & EC seroit le produit de cette multiplication.

Vous pouvez encor ranger autrement toutes ces quantitez; soit AB l'unité, au point A j'éleve AC que je suppose être le Multiplicateur, par les Points B, C je mene l'infinie BCE; je coupe BD que je suppose le multiplié; par le point D je tire DE parallele à AC, la ligne DE est le produit, &c.

La démonstration de toutes ces differentes Operations est dans l'Article suivant, n. 3.

Pour diviser la ligne c, par la ligne a, faites un angle quelconque ABC, dont les côtez sont indefinis : sur l'un d'eux prenez AB pour l'unité, laquelle est aussi ou donnée, ou prise à volonté; sur le même côté coupez BD égale à la ligne a; sur l'autre côté prenez BE égale à la ligne c; joignez DE; & par le point A tirez AC parallele à DE. La ligne BC est le quotient de la division de la ligne BE, c, par la ligne BD, a.

Vous pouvez aussi ordonner differemment ces quantitez. Si, par exemple, vous voulez diviser la ligne BC par la ligne AB, joignez la ligne

AD qui ſera l'unité à la ligne *AB* qui eſt le diviſeur ; coupez *BC* le dividende, joignez *AC*; & menez *DE* parallele à *AC*. La ligne *CE* eſt le quotient de cette diviſion, &c.

La démonſtration de toutes ces operations ſe trouve dans l'Article ſuivant, n. 4. La ligne que l'on prend pour l'unité peut être nommée par une lettre quelconque *d*.

3. Touchant l'extraction de la racine quarrée, Fig. 7. Fig. 7.

La maniere dont M. DESCARTES apprend à extraire la racine quarrée, n'a pas beſoin d'explication.

Si donc l'unité *FG* étant exprimée par 1, le quarré *GH* eſt aa, la racine *GI* ſera a; ſi *GH* eſt $aa + 2ab + bb$, ſa racine ſera $a + b$; ſi *GH* eſt $aa - 2ab + bb$, *GI* ſera $a - b$; ſi le quarré *GH* s'exprime par ab, ſa racine *GI* ſera $\sqrt{ab}$; ſi le quarré *GH* s'exprime par $a - b + c$, ſa racine *GI* ſera $\sqrt{a - b + c}$.

Mais ſi lorſque vous devez extraire la racine quarrée du plan ab, vous voulez prendre $FG = a$ pour l'unité, alors *GH* ſera b, & la racine *GI* eſt encor $\sqrt{ab}$. Vous pourriez auſſi prendre $GH = b$ pour l'unité, & ſi *GF* eſt égale à a, la racine *GI* ſera encor $\sqrt{ab}$.

La démonſtration de cette operation ſera apportée dans l'Article ſuivant, n. 5.

L'on ne pourra pourtant pas extraire la racine de $-aa$, parcequ'il n'y a point de quantité, qui en ſe multipliant produiſe $-aa$: car le quarré de $-a$ eſt auſſi bien $+aa$, que le quarré de $+a$.

ARTICLE II.

Le Rapport des operations de l'Arithmetique avec celle de la Geometrie.

1. L'Addition des nombres eſt une operation, qui de pluſieurs nombres differens en compoſe un ſeul, qui leur eſt égal, & qu'on appelle la ſomme. L'addition des lignes eſt une operation, qui de pluſieurs lignes differentes en compoſe une ſeule, qui leur eſt égale. Leur raport eſt évident.

2. La ſouſtraction des nombres eſt une operation, qui ôte un nombre d'un autre, pour avoir leur difference, qui s'appelle le reſte. La ſouſtraction des lignes eſt une operation, qui retranche une ligne d'une autre, pour en avoir la difference. Leur raport eſt aiſé à voir.

3. La multiplication des nombres eſt une operation, dans laquelle l'on fait, comme l'unité eſt au multiplicateur, de même le multiplié eſt au produit. Lorſqu'on multiplie 8 par 2, le produit eſt 16; or $1 : 2 :: 8 : 16$. Dans la multiplication de la ligne *BD*, a par la ligne *BC*, b Fig. 6. L'on a fait Art. 1. n. 2. comme l'unité *AB* eſt au multiplicateur *BC*; ainſi le multiplié *BD* au produit *BE*. Et cette Analogie ſe démontre par la Fig. 6.

FIG. 6. Prop. 4. 6. Eucl. Car les triangles *ABC*, *DBE* sont équiangles 29. 1. Eucl.

Lorsque l'on multiplie *BC* par *AD*, & que l'on joint le multiplicateur *AD* à l'unité *AB*; l'on fait encor, comme l'unité *AB*, au multiplicateur *AD*: de même le multiplié *BC* est au produit *CE*. Et cette proportion se démontre par la 2. 6. Eucl. parceque *AC* est parallele à la base *ED* du triangle *DBE*.

Lorsque l'on fait *AB* l'unité, *AC* le multiplicateur, *BD* le multiplié la proportion, qui se démontre par la 4. 6. Eucl. est celle-ci, l'unité *AB* est au multiplicateur *AC*: comme le multiplié *BD* au produit *DE*.

L'on peut remarquer que les démonstrations sont les mêmes, de quelque grandeur que soit l'angle *DBE*.

La multiplication des nombres convient encor avec celles des lignes, en ce que si l'unité change, le produit change aussi, quoique le multiplicateur & le multiplié restent les mêmes. En effet, afin qu'il y ait toûjours même proportion entre l'unité & le multiplicateur, qu'entre le multiplié & le produit; il faut, dès que *AB* l'unité devenant plus grande aura plus grande raison à *BC* multiplicateur; que *BD* multiplié ait aussi plus grande raison à *BE* produit, qui 10. 5. Eucl. sera plus petit qu'il n'étoit. C'est ainsi que dans l'Arithmetique, lorsque vous multipliez *2* par *8*, le produit est *16* sols ou *16* livres, *16* piez ou *16* toises, &c. selon que pour l'unité vous prenez *1.* sol ou *1* livre, *1.* pié ou *1* toise.

Je trouve que la multiplication des nombres a plus de raport à cette multiplication des lignes, qu'à celle qu'on propose communément dans la Geometrie. La ligne *AB*. Fig. *9.* est dite multiplier la ligne *BC*, si l'on fait un rectangle *ABCD*, qui ait ces lignes *AB*, *BC* pour ses deux côtez contigus. Car dire ici, que l'unité est à la ligne *AB* multiplicateur, comme la ligne *BC* multipliée à la surface produite *ABCD*; c'est mettre une raison entre la ligne *BC*, & la surface *ABCD*, quoiqu'elles soient de different espece: ce qui est contraire à la definition 3. [illegible] 5. Eucl.

FIG. 9.

Dire aussi, que l'on considere la ligne *AB* comme une petite surface, qui a trois petits quarrez, & la ligne *BC* comme une petite surface, qui en a six, c'est plûtôt multiplier surface par surface, que ligne par ligne; outre que ces petites surfaces ne sont pas entierement differentes, puisqu'elles ont toûjours un petit quarré commun dans l'angle *B*.

4. La division des nombres est une operation, dans laquelle l'on fait, comme le diviseur est au dividende, de même l'unité est au quotient.

Lorsque vous divisez *12* par *4*, le quotient est *3*; or *4* : *12* :: *1* : *3*.

FIG. 6. Dans la division de la ligne *BE*, *c*, Fig. *6*. par la ligne *BD*, *a*; l'on fait Art. 1. n. 2. comme le diviseur *BD*, est au dividende *BE*: de même l'unité *BA*, au quotient *BC*. Et cette Analogie se démontre par la 4. 6. Eucl.

Lorſque l'on veut diviſer la ligne *B C* par la ligne *AB*, & que l'on joint la ligne *A D* priſe pour l'unité ; l'on fait encor, comme *AB* diviſeur à *B C* dividende : ainſi l'unité *AD* à *CE* quotient. Et cette Analogie ſe démontre par la Prop. 2. 6. Eucl. FIG. 6.

Dès que l'unité change, il faut auſſi que le quotient change, quoique le dividende & le diviſeur reſtent les mêmes : & cela afin qu'il y ait, comme on vient de le dire n. 3. de la multiplication, même raiſon entre le dividende & le diviſeur, qu'entre le quotient & l'unité.

5. Extraire la racine quarrée d'un nombre donné ; c'eſt trouver un autre nombre, qui ſoit moyen proportionel entre l'unité & le nombre donné. La racine quarrée de *64*, c'eſt *8* ; or *1 : 8 :: 8 : 64*.

L'on a fait une choſe ſemblable Art. 2. n. 3. pour tirer la racine quarrée de la ligne donnée *G H*, la ligne *F G* étant priſe pour l'unité. Car l'on démontre Prop. 13. 6. Eucl. Que la perpendiculaire *G I* eſt moyenne proportionelle entre *FG* & *G H*. Et voilà un raport qui ſe trouve entre l'extraction de la racine quarrée des nombres, & celle des lignes.

En voici une difference. Dans l'Arithmetique l'on ne peut tirer la racine quarrée, que d'un nombre, qui eſt un quarré parfait, *16*, *36*, *100*, *&c.* Mais on ne la tirera jamais de *14*. *20*, *93*, *&c.* & l'on ſe contente d'écrire $\sqrt{14}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{93}$. Ou bien l'on donne des nombres entiers avec des fractions, qui aprochent de plus en plus de ces racines, ſans qu'on puiſſe jamais exactement les déterminer, ce qu'on apelle aproximation des racines. Dans l'Algebre l'on ne peut tirer la racine que d'une grandeur, qui eſt exprimée en formule de quarré, aa, $aa - 2ab + bb$, *&c* ; Mais on ne la tirera pas de a, ab, &c. quand même ils repreſenteroient un quarré parfait numerique *9*, *25*, *49*, *&c.* Ainſi l'on ſe contente d'écrire $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$. Au lieu que dans la Geometrie l'on extrait la racine quarrée de toute ligne droite *G H*, ſoit qu'elle repreſente a, ab, *14*, *20*, *&c.* ſoit qu'elle repreſente aa, $aa - 2ab + bb$, *36*, *81*, *&c.* La Geometrie donne donc les racines ſourdes auſſi juſtes que les autres, & elle n'a pas plus de difficulté à travailler ſur les lignes incommenſurables, que ſur les commenſurables.

6. Nous avons defini la diviſion une operation, dans laquelle le diviſeur eſt au dividende, comme l'unité au quotient, ou *invertendo*, le dividende eſt au diviſeur, comme le quotient à l'unité.

L'extraction de la racine quarrée eſt une operation, dans laquelle *G H* qui eſt le quarré donné eſt à *G I* qui eſt la racine cherchée : comme *G I* la racine cherchée eſt à *G F* que l'on a pris pour l'unité. De ſorte que dès que l'on conſiderera la racine cherchée une fois comme diviſeur, une fois comme quotient : l'extraction de la racine quarrée ſera une eſpece de diviſion, dans laquelle comme le quarré donné *G H* qui eſt le dividende, eſt à la racine cherchée *G I* qui eſt le diviſeur : de même la racine cherchée *G I* qui eſt le quotient, eſt à l'unité *G F*.

FIG. 6. L'extraction de la racine quarrée est donc une sorte de division, où l'on cherche le diviseur & le quotient, qui sont une même quantité : au lieu que la division est une operation, dans laquelle le diviseur est donné, & l'on cherche le quotient.

ARTICLE III.

L'unité peut ordinairement être prise à discretion.

FIG. 6. 1. DAns les multiplications des lignes l'on donne ordinairement le multiplicateur & le multiplié, sans parler de l'unité : il falloit Fig. 6. multiplier la ligne BD par la ligne BC, ou la ligne a, par la ligne b. Dans les divisions des lignes l'on donne ordinairement le dividende & le diviseur, sans parler non plus de l'unité ; il falloit Fig. 6. diviser la ligne c, par la ligne a, ou la ligne BE par la ligne BD. Dans les extractions de racines quarrées l'on donne la ligne, dont il faut extraire la racine quarrée sans assi-
FIG. 7. gner l'unité : il falloit Fig. 7. tirer la racine quarrée de la ligne GH. Et parce que l'unité entre necessairement dans ces operations, comme on l'a vû Art. 1. n. 2. l'on peut dire que l'unité peut ordinairement y être prise à discretion.

2. Cependant il y a des multiplications de lignes, où l'unité est determinée. Par exemple quand on cherche une quatriéme proportionelle à trois lignes données, ou une troisiéme proportionelle à deux lignes données.
FIG. 6. Il faut trouver une quatriéme proportionelle aux trois lignes données AB, DA, BC, cette quatriéme sera CE, 12. 6. Eucl. Et l'on a cette Analogie de la multiplication des lignes $AB : DA :: BC : CE$; dans laquelle AB, qui est donnée, tient lieu de l'unité. Quand on cherche une troisiéme proportionelle à deux lignes données par la 11. 6. Eucl. La premiere des données tient aussi la place de l'unité dans la multiplication des lignes, qui se fait alors.

3. Lorsque dans un Problême il n'y a qu'une grandeur connuë & determinée, on la prend ordinairement pour l'unité, afin de ne pas introduire
FIG. 5. sans necessité une nouvelle grandeur. Dans la Parabole Fig. 5. les coupées AL, Al, x & les appliquées FL, fl, y sont variables, le parametre AD, a est seul constant : ainsi l'on regarde ordinairement le parametre comme l'unité dans les differentes équations à la Parabole $ax = yy$, qui donne cette proportion $a : y :: y : x$.

4. Lorsqu'il y a dans un Problême plusieurs grandeurs connuës, l'on prend
FIG. 7. ordinairement celle que l'on veut pour l'unité. Vous cherchez Fig. 7. une moyenne proportionelle entre les deux lignes données FG, GH ; c'est 13. 6. Eucl. la ligne GI, or l'on peut prendre FG pour l'unité dans cette Analogie $FG : GI :: GI : GH$; ou bien l'on considere GH comme l'unité dans cette autre Analogie $GH : GI :: GI : FG$. Ce qui revient au même.

Il eſt pourtant certain, que l'on s'épargne ſouvent beaucoup de travail en prenant une quantité plûtôt qu'une autre pour l'unité ; parce que les grandeurs que l'unité multiplie ou diviſe, n'augmentent ni ne diminuent point en vertu d'une telle multiplication, ou d'une telle diviſion. Qu'il faille trouver une ligne égale à $bb+bc-\frac{dfg}{b}$: ſi l'on prend b pour l'unité, la quantité bb eſt égale à b, parce que le quarré de 1 eſt 1 ; bc eſt égal à c, parce que $1\ c$ n'eſt autre choſe que c ; $\frac{dfg}{b}$ eſt égal à dfg, $\frac{dfg}{1}$ n'eſt pas different de dfg. Ainſi j'évite deux multiplications & une diviſion. Au lieu que celui qui prendroit c, pour l'unité, ne s'exempteroit que de la multiplication bc, parce que $1\ b = b$. Fig. 7.

5. Après que dans un Problême l'on a pris une grandeur pour l'unité ; on ne la change pas pendant le reſte de l'operation, à moins que la nature du Problême ne le demande. Ce qui arrive, ou lorſqu'il faut trouver pluſieurs troiſiémes, quatriémes, moyennes proportionelles, & que celle des données, qui doit être l'unité, eſt differente dans chaque multiplication : ou lorſque l'unité eſt variable, ainſi qu'il arrive dans ce lieu au cercle $yy = 2ax - xx$. Soit le diamètre HF, $2a$; les FG, Fg, x ; les IG, ig, y ; les HG, Hg, ſeront $2a - x$. Dans les Analogies qui donnent le lieu $yy = 2ax - xx$, & qui ſont $FG, x : GI, y :: GI. y : GH, 2a - x. Fg, x : gi, y :: gi, y : gH, 2a - x.$ *&c.* les FG, Fg, x, qui tiennent la place de l'unité, changent chaque fois. Fig. 7.

ARTICLE IV.

Si les termes du calcul Arithmetique introduits dans la Geometrie nous rendent plus intelligibles.

1. L'Operation, qui joint une ligne à une autre, ne pouvoit pas s'appeller d'un terme fort different de celui d'addition. L'operation qui retranche une ligne d'une autre, ne pouvoit pas non plus s'exprimer par un terme fort different de celui de ſouſtraction. Ce ne ſont donc pas les termes d'addition & de ſouſtraction qui rendent le diſcours plus intelligible.

Si M. DESCARTES ne s'étoit pas ſervi du terme *multiplier la ligne* BD *par la ligne* BC ; il auroit dit, *deux lignes* BD, BC *étant données, en trouver deux autres, dont l'une, qui eſt ordinairement arbitraire, ſoit à l'une des deux données* BD, *comme l'autre* BC *eſt à la ſeconde des cherchées*, ce qui eſt la definition de la multiplication, qu'il apporte lui-même. L'on peut faire une ſemblable reflexion ſur la diviſion, & ſur l'extraction de racines. Or ces termes de multiplication, diviſion, extraction de racines ſont bien plus courts, mais non pas plus clairs que leurs definitions. Ils ne ſont même intelligibles, qu'autant que leurs definitions ſe preſentent à l'eſprit.

2. Vous trouverez la raiſon, pourquoi M. DESCARTES, pour ſe rendre plus intelligible, a introduit les termes de l'Arithmetique dans la Geometrie ; Sect. 3, Art. 2, n. 2.

SECTION III.

Comment on peut user de Chiffres en Geometrie.

M. DESCARTES.

Comment on peut user de chiffres en Geometrie.

MAIS souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, & il suffit de les designer par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajoûter la ligne BD à GH, je nomme l'une a, & l'autre b, & écris $a + b$; & $a - b$ pour soustraire b de a; & ab pour les multiplier l'une par l'autre; & $\frac{a}{b}$ pour diviser a, par b; & aa ou a^2 pour multiplier a, par soi-même, & a^3 pour le multiplier encore une fois par a, & ainsi à l'infini; & $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour tirer la racine quarrée de $a^2 + b^2$ & $\sqrt{C.\,\overline{a^3 - b^3 + abb}}$ pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + abb$, & ainsi des autres.

Ou il est à remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usitez en l'Algebre, je les nomme des quarrez ou des cubes, &c.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point determinée en la question, comme ici a^3 en contient autant que abb, ou b^3, dont se compose la ligne que j'ai nommée $\sqrt{C.\,\overline{a^3 - b^3 + abb}}$: mais que ce n'est pas de même, lorsque l'unité est determinée, à cause qu'elle peut être sous entenduë par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même.

Par le mot de chiffre, que M. DESCARTES met ici à la marge, & qu'il employe dans le passage, que nous allons citer; il entend les lettres *a*, *b*, *c*, *&c.* & les caracteres $\sqrt{}$, $\sqrt{C}$ ou $\sqrt[3]{}$, *&c.* dont l'Algebre se sert.

Dans les Articles de cette Section, 1. Nous apporterons les raisons pourquoi la Geometrie de M. DESCARTES employe les lignes de la Geo-

metrie ordinaire & les lettres de l'Algebre avec ses caracteres. 2. Nous remarquerons que b^2, b^3, *&c.* representent ordinairement de simples lignes. 3. Nous remarquerons encor, que toutes les parties de chaque ligne doivent avoir ordinairement autant de dimensions les unes que les autres.

ARTICLE I.

Pourquoi M. DESCARTES *employe les lignes de la Geometrie ordinaire avec les lettres & les caracteres de l'Algebre.*

M. DESCARTES en apporte les raisons dans son discours de la Methode, Partie seconde, voici ses termes. *Puis ayant pris garde que pour connoître les proportions, j'aurois quelquefois besoin de les considerer chacune en particulier, & quelquefois seulement de les retenir ou de les comprendre plusieurs ensemble: je pensai que pour les mieux considerer en particulier, je les devois supposer en des lignes, à cause que je ne trouvois rien de plus simple, ni que je pusse representer plus distinctement à mon imagination & à mes sens, mais que pour les retenir ou les comprendre plusieurs ensemble, il falloit que je les expliquasse par quelques chiffres les plus courts qu'il seroit possible. Et que par ce moyen j'emprunterois tout le meilleur de l'Analyse Geometrique & de l'Algebre, & corrigerois tous les défauts de l'une par l'autre. Comme en effet, j'ose dire, que l'exacte observation de ce peu de preceptes que j'avois choisis, me donna telle facilité à demêler toutes les questions, ausquelles ces deux sciences s'étendent, qu'en deux ou trois mois, que j'employai à les examiner, ayant commencé par les plus simples & plus generales, & chaque verité que je trouvois étant une regle qui me servoit après à en trouver d'autres, non seulement je vins à bout de plusieurs que j'avois autrefois jugées très-difficiles; mais il me sembla aussi vers la fin, que je pouvois déterminer en celles même que j'ignorois, par quel moyen & jusques où il étoit possible de les resoudre.*

Le défaut de la Geometrie, c'est d'avoir quelquefois des figures trop embarrassées, sur tout lorsqu'elle examine les solides; le défaut de l'Algebre, c'est que n'ayant point de figures, elle ne rend pas si attentif.

ARTICLE II.

a^2, b^3, &c. *Representent ordinairement de simples lignes.*

1. DAns cette Geometrie b^2 peut signifier une surface quarrée, une grandeur de deux dimensions longueur & largeur, faite sur une ligne droite égale à b: c'est ainsi que zz, xx representent des quarrez, Sect. 1. Probl. 3. Mais b^2 signifie ordinairement ici une ligne droite trouvée par cette Analogie, comme une ligne droite, que j'ai prise pour l'unité, est à la ligne droite b: ainsi la même ligne droite b, est à une troisiéme ligne $\frac{bb}{1} = bb$. soit Fig. 10. $AB = 1$, $AC = b$, $BD = b$, joignez CB, & Fig. 10.

FIG. 10. menez DE parallele à BC. Vous aurez 2. 6. Eucl. AB, 1 : BD, b :: AC, b : CE, $\frac{bb}{1} = bb$.

b^3 Peut repreſenter un ſolide cube, une quantité de trois dimenſions longueur, largeur, & profondeur: mais b^3 repreſente ordinairement une ligne droite trouvée par ces analogies, comme une ligne droite, qui tient lieu de l'unité, eſt à la ligne droite b: ainſi la même ligne b eſt à une troiſiéme ligne bb. & comme b eſt à bb: ainſi bb eſt à une quatriéme ligne droite b^3. Faiſons Fig. 10. $DF = CE$, par le point F tirons FG parallele à la ligne DE, & par le point C la ligne CI parallele à BF. L'on a 34. 1. Eucl. $CH = BD$, $HI = DF$. C'eſt pourquoi 2. 6. Eucl. Dans le triangle ADE, l'on fait AB, 1 : AC, b :: BD, b : CE, bb; & dans le triangle CIG, $CH = BD$, b : CE, bb :: $HI = DF$, bb : EG, b^3

b^4 Sera auſſi une ligne droite, qu'on trouvera par ces analogies $1 : b :: b : bb :. bb : b^3 :: b^3 : b^4$. & b^5 ſera une ligne droite que ces proportions donneront $1 : b :: b : bb :: bb : b^3 :: b^3 : b^4 :: b^4 : b^5$. & b^6 &c.

2. b^4 Eſt une grandeur de quatre dimenſions, b^5 une de cinq &c. mais dans la Geometrie ordinaire l'on ne trouve point de quantité de quatre, cinq, &c. dimenſions, car elle ne connoît que des lignes, des ſurfaces, des ſolides, & rien au delà. L'Arithmetique fournit des grandeurs de toutes ſortes de dimenſions. Dans la progreſſion *1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.* &c. *2* eſt la racine ou le nombre qui entre dans toutes les multiplications, & répond à la lettre b de cette progreſſion continuë $1. b. bb. b^3. b^4. b^5. b^6.$ &c. *4* eſt le quarré, qui répond à bb; *8* eſt le cube, qui répond à b^3; *16* eſt le quarré de quarré, qui répond à b^4; *32* eſt le premier ſurſolide, qui répond à b^5; *64* eſt le quarré cube qui répond à b^6. &c. De plus les termes de ces deux progreſſions ſe forment de la même maniere: car comme la racine *2* ſe multipliant elle-même produit le quarré *4*, de même la racine b multipliant b produit le quarré bb; & comme la racine *2* multipliant le quarré *4* produit le cube *8*, de même la racine b multipliant le quarré bb produit le cube b^3; &c. Le raport qu'il y a entre ces operations a été une raiſon à M. DESCARTES pour introduire le terme de multiplication pour les lignes dans ſa Geometrie, afin qu'en comparant les operations de ſa Geometrie avec celles de l'Arithmetique, il ſe rendit plus intelligible.

Ce que l'on vient de dire des quarrez bb, ſe doit auſſi entendre des plans bd, ac, &c. & ce qu'on a dit des cubes b^3, s'étend auſſi aux ſolides abb, abc, &c. On doit auſſi étendre, ce qu'on a dit des grandeurs plus que ſolides b^4, b^5, &c. aux quantitez $aabb$, $abcd$, $abbc$, a^3bb, $abcde$, &c.

3. Les équations qui dans la pure Geometrie repreſentent des ſurfaces, ſe trouvent également vrayes, quand on les applique aux lignes. L'équation

tion $cx = yy$ de la parabole signifie dans le Traité des Sections Coniques que le rectangle, qui est une surface, dont un côté est c, l'autre x, est égal au quarré, qui est aussi une surface, dont le côté est y: Appliquons cette même équation aux lignes, de sorte que cx soit une ligne, & yy une autre. Soit prise la grandeur c pour l'unité, l'équation se reduira à $1x = yy$. Et si l'on fait Fig. 10. AB, $c = 1 : AC$, $y :: BD$, $y : CE$, $\frac{yy}{1} = yy$; l'on trouvera que CE, yy est égale à l'abscisse x, qui dans la parabole a l'appliquée y, correspondante.

ARTICLE III.

Toutes les parties d'une ligne doivent ordinairement avoir autant de dimensions les unes que les autres.

1. L'On suppose que les lignes qui se multiplient, ou qui se divisent sont exprimées par un ou plusieurs termes, qui n'ont chacun qu'une lettre a, $b + c$, &c; que les chiffres qui sont mis devant les termes n'en augmentent pas les dimensions, $2aa$, $3bb + 4cd$, n'ont pas plus de dimensions que aa, $bb + cd$; que les dimensions d'une fraction diminuent d'autant de degrez, que le denominateur a de termes, $\frac{aabb}{aa}$, $\frac{aabb}{df}$ n'ont que deux dimensions.

2. Dans cette supposition, les produits qui se font de la multiplication de deux lignes, ont deux dimensions dans chacun de leurs termes; $a + b$ par $a + b$ fait $aa + 2ab + bb$; $a + b$ par $b - c$ donne $ab + bb - ac - bc$, &c. Les produits qui viennent de la multiplication de trois lignes ont dans chaque terme trois dimensions; $a + b$, $a + b$, $a + b$ se multipliant produisent $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$; les trois $a + b$, $b - c$, $d + f$ donneront par leur multiplication $abd + bbd - acd - bcd + abf + bbf - acf - bcf$, &c. L'on trouvera de même que le produit de quatre lignes a quatre dimensions dans tous ses termes.

Non seulement dans l'expression Algebrique d'une ligne, tous les termes doivent ordinairement avoir la même dimension : mais encore ils doivent avoir deux dimensions, si c'est l'expression d'un plan; trois, si c'est celle d'un cube; &c.

Ce precepte n'est fait qu'afin que les quantitez, qui sont des plans, paroissent avoir été produites par la multiplication de deux lignes; celles qui sont des solides par la multiplication de trois; celles qui sont d'un degré plus élevé par la multiplication de quatre; &c.

3. C'est pourquoi la ligne qui est exprimée par $\sqrt{C.\ \overline{a^3 - b^3 + abb}}$ supposant que $a^3 - b^3 + abb$ est un cube, il faut, que chaque terme ait trois dimensions. S'il faut extraire la racine cubique de $aabb - b$, cette quantité est supposée un cube, elle doit donc aussi avoir trois dimensions; ce qui ne se peut faire qu'en divisant le premier terme une fois par l'unité,

& multipliant le ſecond deux fois par l'unité. Soit a l'unité, ce ſera $\frac{aabb}{a}$ — aab; ſoit c l'unité, ce ſera $\frac{aabb}{c}$ — bcc. Ce qui ne ſe fera qu'après que l'unité ſera déterminée.

4. On peut encor en tirer cet avantage, que dans les multiplications des quantitez, qui ont pluſieurs termes, & chaque terme pluſieurs lettres; on s'apperçoit, ſi l'on ne s'eſt point trompé, en examinant, ſi dans le produit chaque terme a le nombre de lettres, qui lui convient.

SECTION IV.

Comment il faut venir aux équations, qui ſervent à reſoudre les Problêmes.

M. DESCARTES.

Comment il faut venir aux équations, qui ſervent à reſoudre les Problêmes.

AU reſte afin de ne pas manquer à ſe ſouvenir des noms de ces lignes, il en faut toûjours faire un regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe, ou qu'on les change écrivant par exemple $AB = 1$, c'eſt-à-dire, AB égal à 1, $CH = a$, $BD = b$, &c. Ainſi voulant reſoudre quelque Problême, on doit d'abord le conſiderer comme déja fait, & donner des noms à toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour le conſtruire, auſſi bien à celles qui ſont inconnuës qu'aux autres. Puis ſans conſiderer aucune difference entre ces lignes connuës & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, ſelon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle ſorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, juſques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons: ce qui ſe nomme une équation, car les termes de l'une de ces deux façons ſont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations, qu'on a ſuppoſé de lignes, qui étoient inconnuës. Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, & que nonobſtant on n'omette rien de ce qui eſt deſiré en la queſtion, cela témoigne qu'elle n'eſt pas entierement déterminée. Et lors on peut prendre à diſcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës, auſquélles ne répond aucune équation. Après cela s'il en reſte encore pluſieurs, il ſe faut ſervir par ordre de chacune des équations qui reſtent auſſi, ſoit en la conſiderant toute ſeule, ſoit en la compa-

rant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnuës ; & faire ainſi en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une ſeule égale à quelqu'autre, qui ſoit connuë, ou bien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le ſurſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit égal à ce qui ſe produit par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantitez, dont l'une ſoit connuë, & les autres ſoient compoſées de quelques moyennes proportionelles entre l'unité & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que j'écris en cette ſorte $z = b$, ou $z^2 = - az + bb$, ou $z^3 = + az^2 + bbz - c^3$, ou $z^4 = az^3 + {}^* b^2 z^2 - c^3 z d^4$. &c. C'eſt-à-dire z, que je prends pour la quantité inconnuë eſt égale à b, ou le quarré de z eſt égal au quarré de b moins a multiplié par z, ou le cube de z, eſt égal à a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainſi des autres.

* *Dans les Editions Françoiſes de Leyde 1637. de Paris 1705. le terme* $b^2 z^2$ *manque, ce qui eſt une faute d'impreſſion.*

Et on peut toûjours reduire ainſi toutes les quantitez inconnuës à une ſeule ; lorſque le Problême ſe peut conſtruire par des cercles & des lignes droites, ou auſſi par des ſections coniques, ou même par quelqu'autre ligne, qui ne ſoit que d'un ou deux degrez plus compoſée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cauſe que je vous ôterois le plaiſir de l'apprendre de vous-même, & l'utilité de cultiver vôtre eſprit en vous y exerçant, qui eſt à mon avis la principale, qu'on puiſſe tirer de cette ſcience. Auſſi que je n'y remarque rien d'auſſi difficile, que ceux qui ſeront un peu verſez en la Geometrie commune & en l'Algebre, & qui prendront garde à tout ce qui eſt en ce Traité, ne puiſſent trouver.

C'eſt pourquoi je me contenterai ici de vous avertir, que pourveu qu'en démêlant ces équations on ne manque point à ſe ſervir de toutes les diviſions, qui ſeront poſſibles, on aura infailliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe être reduite.

Je diſtinguerai par ordre les Regles qui regardent la reſolution des Problêmes en general. Je joindrai à celles, dont M. DESCARTES parle ici. quelques autres, qu'il explique ailleurs. Les regles, auſquelles je ne joins aucun exemple, ſeront miſes en uſage dans les exemples des autres regles.

Il eſt bon de faire reflexion, que les preceptes ſont ordinairement obſcurs, juſques à ce que les exemples les ayent éclaircis.

12. *Regles generales pour les Problêmes.*

REGLE I.

D'Abord l'on conſidere le Problême comme déja fait. Pappus dans ſes Collections mathematiques, commence par là les réſolutions de pluſieurs Problêmes: ainſi la methode n'eſt pas nouvelle. Il faut diſtinguer avec ſoin les quantitez connuës des inconnuës. On appelle quantitez connuës & données celles que les conditions du Problême determinent & font connoître. On appelle inconnuës celles qu'on cherche & qu'on veut découvrir. Or c'eſt par le connu qu'on découvre l'inconnu; l'Eſprit humain ne raiſonne pas autrement, & il n'a pas d'autre maniere de faire de nouvelles découvertes.

REGLE II.

ON donne des noms & l'on deſigne par des lettres toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour conſtruire le Problême, non ſeulement aux connuës, c'eſt-à-dire, à celles qui ſont données par les conditions du Problême, mais encore aux inconnuës. L'on ſe ſert ordinairement des premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, *&c.* pour nommer les grandeurs connuës, & des dernieres, z, y, x, *&c.* pour deſigner les inconnuës. Cela n'eſt pourtant pas univerſel.

REGLE III.

ON ſe ſert indifferemment des lignes connuës & inconnuës; & en conſiderant l'état de la queſtion, l'on cherche des équations ſelon l'ordre qui paroît le plus propre à reſoudre le Problême. Cet ordre demande que l'on commence par les lignes, dont les autres dépendent. Rien n'eſt plus important, que de bien comprendre ce dont il s'agit dans un Problême propoſé, ſans cela l'on travaille long-tems inutilement, & l'on ne s'apperçoit qu'à la fin de la reſolution, qu'on a mal enviſagé la queſtion.

REGLE IV.

ON tâche de trouver autant d'équations differentes, que l'on a ſuppoſé de lignes inconnuës; & ces équations auront une des inconnuës d'un côté & des connuës de l'autre. Lorſqu'on trouve ce nombre d'équations cherchées, le Problême eſt determiné, & il a une ſolution, ou un nombre determiné de ſolutions. Mais ſi l'on trouve moins d'équations, qu'il n'y a de lignes inconnuës, après avoir ſatisfait à toutes les conditions du Problême: c'eſt une marque, que le Problême eſt indeterminé, & qu'il a un nombre indefini de ſolutions, Lorſqu'on trouve plus d'équations, qu'il n'y

a de lignes inconnuës, le Problême est plus que determiné. Il est quelquefois facile, & quelquefois difficile de connoître d'abord, si le Problême est determiné, ou indeterminé, ou plus que determiné.

REGLE V.

DAns les Problêmes indeterminez l'on prend à volonté des lignes connuës pour chaque inconnuë, excepté une. Ce qui ne se fait qu'à la fin, après qu'on a parcouru toutes les difficultez de la question. Ce n'est pas l'usage, d'effacer les inconnuës à la place desquelles on substituë des connuës. Il faut décrire la parabole AFf, Fig. 5. avec l'équation indeterminée $yy = ax$. Pour avoir un point F de la parabole, ou son appliquée FL, y; je determine AL, x de la longueur que je veux, elle pourroit deslors s'appeller b, & l'équation seroit $yy = ab$. Mais l'on ne fait point ces changemens, & l'on se contente de chercher FL, y moyenne proportionelle entre le parametre a, & la coupée AL, que l'on nomme toûjours x. V. l. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Fig. 5.

Au reste comme l'équation indeterminée $yy = ax$ devient determinée en cherchant le point F, & tous les autres points f de la parabole; l'on peut dire, qu'un Problême indeterminé est une infiuité de Problêmes determinez; & que tous les Problêmes sont ou determinez par eux-mêmes, ou determinez par celui qui les construit.

REGLE VI.

APrès qu'on a trouvé les premieres équations, qui sont fort simples, si le Problême n'est pas entierement resolu; l'on considere ces équations ou séparément, ou ensemble, & on les combine differemment; jusques à ce que l'on n'ait rien omis de ce qui est desiré dans la question. Alors l'on en trouve une, qui resulte de la differente combinaison des autres, & qui, après qu'on a substitué, s'il est necessaire, des grandeurs connuës à la place des inconnuës, contient une inconnuë égale à une connuë $z = b$; ou une inconnuë dont le quarré est égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de deux quantitez, dont l'une est connuë, & l'autre composée de quelque moyenne proportionelle entre l'unité & ce quarré multipliée par d'autres connuës, $zz = -az + bb$; c'est-à-dire, le quarré zz est égal à une quantité connuë bb, moins az composée de la connuë, a, multipliée par z, qui est moyenne proportionelle entre l'unité & le quarré zz, car $1 : z :: z : zz$. Ou bien l'on trouve une inconnuë, dont le cube est égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de trois quantitez, dont l'une est connuë, & les deux autres sont composées des deux moyennes proportionelles entre l'unité & le cube multipliées par d'autres connuës, $z^3 = az^2 + bbz - c^3$, c'est-à-dire, le cube z^3 est égal à moins une quantité connuë c^3, plus az^2 plus bbz, qui sont com-

Fig. 5. posées des connuës a & b multipliées separément l'une par zz, l'autre par z, qui sont les deux moyennes proportionelles entre l'unité & le cube z^3, car $1 : z :: z : zz :: zz : z^3$. Ou bien l'on trouve $z^4 = az^3 + b^2z^2 - c^3z + d^4$ &c.

Dans les combinaisons qu'on fait des équations, l'on compare deux valeurs differentes de la même inconnuë $z = aa + bx$, $z = ac + xy$, & l'on en fait une nouvelle équation $aa + bx = ac + xy$. Ou bien l'on substituë la valeur d'une inconnuë à sa place dans une autre équation où elle est. Soient les équations $z = aa + bx$, $x = bc$; je mets bc à la place de x dans la premiere équation, qui se changera en $z = aa + bbc$. Ces operations servent à diminuer le nombre des inconnuës.

REGLE VII.

ON se servira de toutes les divisions possibles, afin de reduire les équations aux plus simples termes. Les divisions, qui se font pendant l'operation, diminuent la peine du calcul, qui doit suivre; celles qui se font à la fin, reduisent la derniere équation à la plus simple expression.

REGLE VIII.

QUelquefois la maniere, dont la question est proposée, ne fournit pas toutes les lignes, qui sont necessaires pour la resoudre. Soit qu'elle les fournisse, ou qu'elle ne les fournisse pas, voici ce qu'il faut observer.

* Tom. 3. Lett. 80. 1. La methode, que Mr DESCARTES tenoit, est celle-ci. * Il ne consideroit point d'autres theorêmes, sinon que les côtez des triangles semblables sont proportionels, & que dans les triangles rectangles le quarré de la base est égal aux deux quarrez des côtez. Et pour cela il observoit que les lignes dont il se servoit, fussent paralleles, ou s'entrecoupassent à angles droits: de sorte qu'il resolvoit tous ses Problêmes par la proposition 47. du Livre 1. d'Euclide, ou par la 4. du 6.

Geomet. Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. 2. ** M. DESCARTES pour se démêler de la confusion, que peuvent causer plusieurs lignes, en considere deux comme les principales, & auxquelles il tâche de rapporter toutes les autres. Ces deux lignes se touchent, & s'expriment par des lettres x, y, parce qu'elles sont inconnuës. Lorsque le Problême est indeterminé ces deux lignes sont variables, & l'une des deux a un point fixe pour origine, & s'étend le long d'une ligne droite; tandis que l'autre demeure toûjours parallele à elle-même; de la maniere dont l'on a ordonné les coupées & les appliquées dans les lieux Geometriques. Il arrive pourtant quelquefois, que ces deux lignes étant prises separées l'une de l'autre, le Problême se resout d'une maniere plus aisée ou que l'on arrive à une équation plus simple.

Il y a souvent du bonheur à bien choisir ses lignes, & à bien commencer son calcul. Tel Problême se resout aisément, si l'on s'y prend d'une

certaine façon, qui ne se resoudra que difficilement, ou même du tout point, si l'on prend une autre voye. C'est pourquoi lorsqu'un chemin mene trop loin, & qu'il est trop embarrassé; il est bon d'entrer dans un, & s'il est necessaire dans plusieurs autres. Il ne faut pas que les resolutions courtes & aisées, que l'on trouve imprimées, nous trompent; telle resolution d'un Problême se comprend en un moment, qui n'a été trouvée que par un penible travail, & qu'après avoir été tentée inutilement de plusieurs manieres. Quoi qu'en certain cas un heureux genie fasse plus que l'art, on doit pourtant d'abord suivre les regles generales. Il sera aussi très-utile de remarquer comment les grands Geometres ont resolu certains Problêmes. Mais avant que d'aller plus loin, rendons ces premieres regles plus intelligibles, en les appliquant à quelques Problêmes.

PROBLEME I.

ETant donnez Fig. 11. un cercle *CDE* de grandeur & de position, c'est-à-dire, dont la grandeur & la situation soient determinées, & deux points *A*, *B* hors du cercle: tirer de ces deux points les deux lignes *AC*, *BC* à un même point *C* de la circonference concave du cercle, de telle sorte que la ligne *AB*, qui joint les deux points donnez, soit parallele à la ligne *DE*, qui joint les deux points *D*, *E*, où les lignes *AC*, *BC* coupent la circonference convexe du cercle. FIG. 11.

L'on pourra voir dans la resolution de ce Problême, 1. qu'il faut tenter plusieurs manieres pour resoudre un Problême. 2. Que les lignes, que l'énoncé du Problême presente, ne suffisent pas toûjours seules. 3. Que les deux lignes inconnuës, que l'on choisit enfin n. 7. ne font pas un angle entr'elles.

1. Supposons la chose faite, comme le Problême le demande, que les lignes *AC*, *BC* se terminent au point *C*, & que les lignes *AB*, *DE* sont paralleles. Voilà toutes les lignes, dont le Problême parle.

2. Nommons la ligne connuë *AB*, a; les inconnuës *AC*, z : *BC*, x; *AD*, y; *BE*, v; *DE*, s. Nous aurons encore $DC = AC - AD$, $z - y$; $EC = BC - BE$, $x - v$. L'on donne des noms à toutes ces lignes, parce qu'au commencement l'on ne connoît pas encore les seules necessaires, & qu'on doit se servir de toutes, afin de voir ce qui en peut resulter.

3. Puisque les lignes *AB*, *DE* sont paralleles par la supposition, les triangles *ACB*, *DCE* sont équiangles 29. 1. Eucl. & par la 2. 6. Eucl. $CD, z - y : AD, y :: CE, x - v : BE, v$. & 16. 6. Eucl. $vz - yv = xy - vy$, $vz = xy$, $z = \frac{xy}{v}$. De l'Analogie precedente l'on conclut celle-ci *componendo* $CA, z : AD, y :: CB, x : BE, v$. & 16. 6. Eucl. $vz = xy$, même équation qu'auparavant. Ensuite par la 4. 6. Eucl. l'on a ces trois Analogies, la 1[e] $CA, z : CB, x :: CD, z - y : CE,$

Fig. 11. $x - v$, & 16. 6. Eucl. $xz - vz = xz - xy$, $vz = xy$, ce qui n'apporte rien de nouveau. La 2e CA, $z : AB$, $a :: CD$, $z - y : DE$, s. $sz = az - ay$, $ay = az - zs$, $y = \frac{az - sz}{a}$. La 3e CB, $x : AB$, $a :: CE$, $x - v : DE$, s. $sx = ax - av$, $ax - sx = av$, $x = \frac{av}{a - s}$.

4. Nous n'avons trouvé que la valeur de trois inconnuës par ces premieres équations ; ces valeurs ſont $z = \frac{xy}{v}$. $y = \frac{az - sz}{a}$. $x = \frac{av}{a - s}$. Nous ſubſtituerons donc la valeur de x dans celle de z, ce qui donnera $z = \frac{ay}{a - s}$; & dans celle-ci la valeur de y, ce qui fera $z = \frac{aaz - asz}{aa - as}$, & multipliant tout par $aa - as$, c'eſt $aaz - asz = aaz - asz$, ce qui marque que cette derniere ſubſtitution eſt inutile. Je puis encore mettre la valeur de y dans l'équation $z = \frac{xy}{v}$, il en reſulte $z = \frac{axz - sxz}{av}$, $avz = axz - sxz$, $av = ax - sx$, $x = \frac{av}{a - s}$ équation qui a déja été trouvée.

5. Toutes les équations, qu'on a pu former, gardent deux inconnuës, ce qui ſemble ſignifier que le Problême eſt indeterminé : mais ſi nous nous ſervons de l'équation $x = \frac{av}{a - s}$, dans laquelle v & s ſont arbitraires, & que l'on prenne deux fois BE, v, d'une même longueur determinée, & ED, s de deux longueurs differentes determinées ; l'on verra, que les lignes AD, BE ne ſe termineront pas les deux fois au même point C, comme il arriveroit, ſi le Problême étoit indeterminé.

6. Il nous faut faire quelque choſe de plus : ce qui ſe preſente naturellement, c'eſt de tirer 17. 3. Eucl. des points A, B, les tangentes AF, BG, qui ſeront connuës. Nommons AF, b ; BG, c. 36. 3. Eucl. $AC \times AD = \overline{AF}^2$, $yz = bb$. $BC \times BE = \overline{BG}^2$, $vx = cc$.

L'équation $yz = bb$, donne, $y = \frac{bb}{z}$ comparons les deux valeurs de y, $\frac{bb}{z} = \frac{az - sz}{a}$ multiplions tout par z, & par a, il vient $abb = azz - szz$; $zz = \frac{abb}{a - s}$, ou il reſte une arbitraire s ; ce qui ne reſout pas le Problême, parce qu'il n'eſt pas vrai, que de quelque grandeur que je faſſe DE, s ; AC, $z = \sqrt{\frac{abb}{a - s}}$ ſoit toûjours telle que AD, BE concourent en un ſeul point C.

7. Nous tenterons donc un autre chemin avec Pappus, * & c'eſt ici la ſeule operation, que l'on produit, lorſqu'on donne au public la reſolution d'un Problême. Ayant tiré les lignes AC, BC, AB, DE ; l'on mene du point A la tangente AF, & par le point D la tangente DH, qui coupe la ligne AB en H.

* Collect. Math. l. 7. Prop. 107.

Nommons les connuës AB, a ; AF, b ; les inconnuës AC, z ; AD, y ; BH, r ; AH eſt $AB - BH$, $a - r$.

8. Les triangles ACB, AHD ſont équiangles, car ils ont l'angle A commun ; enſuite à cauſe que DH eſt touchante, & ED ſecante, l'angle HDE eſt égal à l'ange C, 32. 3. Eucl. Or à cauſe des paralleles DE, AB, les angles alternes HDE, DHA, 29. 1. Eucl. ſont égaux : donc l'angle C eſt égal à l'angle DHA. Et les triangles équiangles donnent

4. 6.

4. 6. Eucl. AC, $z : AB$, $a :: AH$, $a - r : AD$, y. & 16. 6. Eucl. $yz = aa - ar$, $y = \frac{aa - ar}{z}$. D'un autre côté, n. 6. $y = \frac{bb}{z}$. Comparons les deux valeurs de y, $\frac{bb}{z} = \frac{aa - ar}{z}$, $bb = aa - ar$, $ar = aa - bb$; $r = \frac{aa - bb}{a}$. Mettons cette valeur de r à sa place dans la valeur de AH, $a - r$, nous trouverons $a - \frac{aa + bb}{a} = \frac{aa - aa + bb}{a} = \frac{bb}{a} = AH$. Fig. 10.

9. La construction sera telle. Le cercle ECD étant donné avec les deux points A, B: je joins AB, du point A je mene 17. 3. Eucl. AF tangente du cercle en F, je fais 11. 6. Eucl. AH troisiéme proportionelle aux lignes AB, AF, du point H je tire encor HD tangente du cercle en D, & par les points A, D, la ligne AC, je joins BC, DE. La ligne DE est parallele à la ligne AB.

Dém. l'on a fait AB, $a : AF$, $b :: AF$, $b : AH$, $\frac{bb}{a}$. donc 17. 6. Eucl. $\overline{AF}^2 = AB \times AH$. Mais 36. 3. Eucl. $\overline{AF}^2 = AC \times AD$: donc $AB \times AH = AC \times AD$. & 16. 6. Eucl. $AB : AC :: AD : AH$. donc 5. 6. Eucl. Les triangles ACB, ADH sont équiangles, & l'angle C égal à l'angle AHD. Maintenant à cause de la tangente DH, & de la secante DE, 32. 3. Eucl. L'angle HDE est égal à l'angle C: donc les angles alternes AHD, HDE sont égaux, & 28. 1. Eucl. les lignes DE, AB paralleles. Ce qu'il falloit démontrer.

10. Puisque n. 8. $r = \frac{aa - bb}{a}$, la ligne AB, a est plus grande que la ligne AF, b. Que si la ligne AB étoit égale à AF, l'on auroit $r = \frac{aa - bb}{a} = 0$, la ligne BH seroit nulle, le point H seroit le même que le point B; ce qui se conclut aussi de ce que $AH = \frac{bb}{a}$ se reduiroit à $\frac{aa}{a} = a$. Il faudroit donc Fig. 12. du point B tirer la touchante BD, & la droite ADC par les points A, D; & joindre BC; alors les lignes DE, AB, seront paralleles. Fig. 12.

Mais si AF, b Fig. 11. est plus grande que AB, a; de l'équation $bb = aa - ar$ n. 8. l'on conclura $-ar = bb - aa$, $-r = \frac{bb - aa}{a}$, ce qui montre, comme on l'expliquera Regl. 10. que BH, r doit être de l'autre côté du point B, qu'on ne l'a supposé dans le calcul Fig. 11. Ainsi comme H a été pris entre B & A Fig. 11. il faudra le mettre de l'autre côté du point B sur la même ligne AB prolongée, comme on le voit Fig. 13. ou l'on fait $BH = \frac{bb - aa}{a}$, du point H l'on mene la tangente HD, par les points A, D l'on tire ADC, l'on joint BC, & les lignes DE, AB sont paralleles. Fig. 13.

PROBLEME II.

ETant donné le plus petit côté d'un triangle rectangle, & la difference des segmens de la base faits par la perpendiculaire abbaissée du sommet de l'angle droit : trouver la difference des côtez, la base, & décrire tout le triangle.

Supposons que le triangle ABC, Fig. 14. rectangle en A, est celui qui Fig. 14.

FIG. 14. est demandé, que AD est la perpendiculaire, dont il est parlé. Du centre A, de l'intervale AB décrivez le cercle BGF; les lignes AB, AF sont égales, & CF est la difference des côtez AB, AC; les segmens de la base sont BD, DC; & parceque 3. 3. Eucl. $BD = DE$, EC est la difference des segmens. Prolongez CA en G.

Par ce Problême on apprendra, qu'une maniere conduit quelquefois à une équation plus simple; & qu'il faut aussi quelquefois tirer des lignes, dont on ne parle point, en proposant le Problême.

2. Nommons les connuës AB, $a = AF = AG$; EC, b; & les inconnuës CF, x; BE, y. On aura $AC = CF + FA$, $x + a$; $CG = CF + FG$, $x + 2a$; $CB = CE + EB$, $b + y$. Les rectangles $CE \times CB$, $CG \times CF$ sont égaux au quarré d'une même tangente 36. 3. Eucl. ainsi ils sont êgaux entr'eux: donc $bb + by = xx + 2ax$.

3. Si vous voulez chercher immediatement la valeur de x, vous chercherez d'abord la valeur de y, pour substituer cette valeur à y. Vous avez $bb + by = ax + 2ax$; donc $by = xx + 2ax - bb$, $y = \frac{xx + 2ax - bb}{b}$. & mettant cette valeur dans CB, $b + y$, vous ferez $b + \frac{xx + 2ax - bb}{b} = \frac{bb + xx + 2ax - bb}{b} = \frac{xx + 2ax}{b} = CB$.

Maintenant puisque l'angle BAC est droit, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{x^4 + 4ax^3 + 4aaxx}{bb} = aa + xx + 2ax + aa = 2aa + xx + 2ax$, & multipliant tout par bb, $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx = 2aabb + bbxx + 2abbx$, qui s'ordonne ainsi $x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +4aaxx \\ -bbxx \end{smallmatrix} - 2abbx - 2aabb = 0$.

4. Mais si vous voulez vous servir d'une autre voye, & connoître immediatement la valeur de y, vous ferez disparoitre x. Vous avez déja l'équation n. 2. $bb + by = xx + 2ax$, ensuite le triangle rectangle ABC vous donne $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $bb + 2by + yy = 2aa + xx + 2ax$; $xx + 2ax = bb + 2by + yy - 2aa = bb + by$; $yy + by = 2aa$. Mettez $\frac{1}{4}bb$ de chaque côté, $yy + by + \frac{1}{4}bb = 2aa + \frac{1}{4}bb$, extrayez la racine quarrée de chaque côté, c'est $y + \frac{1}{2}b = \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, $y = -\frac{1}{2}b + \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & la base BC, $b + y = \frac{1}{2}b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$.

Pour connoître x, vous substituerez cette valeur de y dans l'équation n. 2. $xx + 2ax = bb + by$, qui se changera en $xx + 2ax = + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & mettant aa de chaque côté, $xx + 2ax + aa = aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & extrayant la racine quarrée de chaque membre, $x + a = \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$, $x = -a + \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$ qui est la même valeur de x, qu'on auroit de l'équation n. 3. $x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +4aaxx \\ -bbxx \end{smallmatrix} - 2abbx - 2aabb = 0$, si on l'avoit resoluë. Cette resolution se fera L. 3. Part. 3. Sect. 4. Art. 3. n. 3.

5. Les Geometres regardent les équations dont l'inconnuë ne monte que jusques au quarré, plus simples que celles, où elle monte au quarré de quarré. Les premieres sont plus aisées à resoudre que les secondes, ce qu'on verra en comparant les operations que demandent les équations de deux dimensions, qui ont été faites n. 4. & dont il sera parlé Part. 2. Art. 1. avec celles que Mr DESCARTES enseigne L. 3. Part. 3. Sect. 4. Art. 1. pour les équations de quatre dimensions. Ainsi n. 4. l'on est arrivé à une équation plus simple & plus aisée que n. 3. FIG. 14.

6. Lorsqu'on a la valeur de x, l'on peut trouver le triangle ABC par cette construction Fig. 15. Faites le triangle isoscele BKH, rectangle en K, dont $BK = KH = a$. $\overline{BH}^2$ sera $2aa$. Au point H élevez $HL = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire sur BH, & joignez BL. $\overline{BL}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HL}^2$, $2aa + \frac{1}{4}bb$, & $BL = \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$. Du centre L à l'intervale LH, décrivez le cercle CHE; prolongez BL en C; vous avez $LE = LC = LH$, $\frac{1}{2}b$, $CE = b$, $BC = CL + LB = \frac{1}{2}b + \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$. Apresent sur le diametre BC décrivés le demi-cercle BAC, dans lequel vous inscrirés $BA = a$; joignés CA, & du centre A, de l'intervale AB, décrivés le cercle BFG. FIG. 15.

Dém. L'angle BAC est droit 31. 3. Eucl.; BC est $\frac{1}{2}b + \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$ telle que doit être la base du triangle cherchée n. 4. CE est b, telle que doit être la difference des segmens de la base faits par la perpendiculaire; BE est $BC - CE$, $\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b = y$. n. 4. $\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 = \frac{1}{4}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb} + 2aa + \frac{1}{4}bb - aa = aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & $AC = \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{aa + \frac{1}{4}bb}}$, & enfin $CF = CA - AF$, $-a + \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{aa + \frac{1}{4}bb}} = x$, comme elle doit être n. 4. Le triangle ABC Fig. 15. est donc celui qui est demandé.

REGLE IX.

LOrsqu'un Problême renferme plusieurs cas, il n'est entierement resolu, qu'après qu'on les a tous parcourus. L'on commence la resolution par les plus simples, si on les connoît. Après qu'ils ont tous été examinés, si leurs resolutions ne peuvent pas être comprises sous une formule générale, on les range en proposant les premiers ceux, qui sont les plus simples, ou dont les autres dépendent.

Quelquefois on distingue tous les cas dès le commencement, ainsi que l'on fera dans le Problême suivant; quelquefois on ne les découvre qu'à mesure qu'on les examine. comme on a fait au Problême 1. n. 10. de cette Section. L'on laisse quelquefois des cas, qui sont inutiles au dessein que l'on a. M. DESCARTES donne des exemples de cette regle au l. 2. Part. 4. en expliquant ses ovales & leurs usages.

PROBLEME III.

FIG. 16. ETant donnée Fig. 16. la ligne AB de grandeur & de position, trouver un point D hors de cette ligne, d'où ayant tiré la ligne DC perpendiculaire sur AB, l'on ait trois lignes en proportion continuelle, dont le segment AC soit la premiere, & dont la ligne DC soit une des trois.

Il y a quatre cas, qui viennent de la differente combinaison des lignes. 1. $AC : CD :: CD : AB$. 2. $AC : CD :: CD : CB$. 3. $AC : AB :: AB : CD$. 4. $AC : CB :: CB : CD$.

1. Supposons le point D trouvé, & la ligne DC tirée. Nommons AB, a; AC, x; CB, $a - x$; CD, y.

2. Pour le premier cas. $AC, x : CD, y :: CD, y : AB, a$. & 16. 6. Eucl. $yy = ax$; à la parabole, qu'il est aisé de décrire.

3. Pour le second cas. $AC, x : CD, y :: CD, y : CB, a - x$. & $yy = ax - xx$; au cercle duquel le diametre est a. Et cela est encore facile à construire.

4. Pour le troisiéme cas. $AC, x : AB, a :: AB, a : CD, y$: & $xy = aa$, à l'hyperbole entre ses asymptotes, qu'il est aisé de trouver.

5. Pour le quatriéme cas. $AC, x : CB, a - x :: CB, a - x : CD, y$. & $xy = aa - 2ax + xx$, à l'hyperbole soit par raport à ses diametres, soit par raport à ses asymptotes. Il suffira de construire le Problême par raport à son diametre.

Pour reduire l'équation $xx - 2ax - xy = -aa$, prenons, $x - a - \frac{1}{2}y = z$, ou $-x + a + \frac{1}{2}y = -z$; $z + a + \frac{1}{2}y = x$. & pour x substituons cette valeur, & pour xx, le quarré $zz + 2az + yz + aa + ay + \frac{1}{4}yy$; la premiere équation se changera en celle-ci, $\frac{1}{4}yy + ay = zz$, $yy + 4ay = 4zz$. Faisons encore $y + 2a = v$; $v - 2a = y$, & mettant cette valeur pour y, & le quarré $vv - 4av + 4aa$ pour yy; la reduite sera $vv - 4aa = 4zz$ qui se construira ainsi.

Sur AB élevez au point A la perpendiculaire infinie EAM, coupez $AE = 2AB = 2a$, & $AG = CD$, y; vous aurez $EG = EA + AG$, $2a + y = v$. Ensuite menez l'infinie GI parallele à AB, & BH parallele à AG: vous aurez $GD = AC$, x; $BH = CD$, y; $GH = AB$, a. Par les points E, B tirez encore l'infinie EB. Les triangles EAB, EGI, BHI sont équiangles 29. 1. Eucl. Ainsi $EA, 2a : AB, a :: EG, v : GI, \frac{1}{2}v :: BH, y : HI, \frac{1}{2}y$. D'où il suit que $DI = GH + HI - GD = a + \frac{1}{2}y - x = -z$.

Apresent il faut faire reflexion, que dans l'équation reduite $4zz = vv - 4aa$, que nous construisons, le diametre est $2a = EA$, l'abscisse est $v = EG$ prise sur ce diametre: mais que l'ordonnée est z ou $-z = DI$, & que ces coordonnées ne se touchent point, & qu'elles ne font pas un angle, comme les lieux Geometriques le demandent. Vous laisserez

donc l'ordonnée DI, où elle se trouve, & vous transporterez le demi-diametre EA & l'abscisse EG sur la ligne EI, afin que la nouvelle abscisse EI fasse un angle EID avec l'ordonnée ID. Fig. 16.

Dans le triangle rectangle EAB, $\overline{EB}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AB}^2 = 4aa + aa$, & $EB = \sqrt{5aa} = a\sqrt{5}$ sera le demi-diametre substitué à la place du demi-axe AB, E étant toûjours le centre de l'hyperbole ; de sorte que prenant $EF = EB$, vous aurez le diametre determiné $FB = 2\sqrt{5aa}$. De plus dans les triangles semblables EAB, EGI, vous avez cette proportion, EA, $2a : EB$, $\sqrt{5aa} :: EG$, $v : EI$, $\frac{1}{2}v\sqrt{5}$ ou $\sqrt{\frac{5}{4}vv}$, qui sera la nouvelle coupée substituée à la place de la coupée EG, v.

Ce n'est pas assez pour décrire l'hyperbole, d'avoir le diametre determiné FB : il faut encore connoître le parametre. Dans la premiere équation $4zz = vv - 4aa$, le terme $4zz$ nous aprend, que l'axe $2a$ est à son parametre, comme 4 à 1. Mais la raison n'est pas la même dans l'équation, que nous allons faire, & dans laquelle le diametre est $2\sqrt{5aa}$, & nous avons $\sqrt{\frac{5}{4}vv}$ pour v. Voici donc la maniere de determiner le parametre. L'ordonnée est toûjours z, FI est $FE + EI$, $\sqrt{5aa} + \sqrt{\frac{5}{4}vv}$, BI est $EI - EB$, $\sqrt{\frac{5}{4}vv} - \sqrt{5aa}$; nommons le parametre p. Par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $2\sqrt{5aa}$ est au parametre p : ainsi le rectangle $FI \times BI$, $\frac{5}{4}vv - 5aa$ est au quarré zz de l'ordonnée ; & 16. 6. Eucl. $2zz\sqrt{5aa} = \frac{5}{4}pvv - 5aap$, $4zz = \frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}} - \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$.

Puisque dans les deux équations $4zz = vv - 4aa$, $4zz = \frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}} - \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$, les premiers membres $4zz$ sont égaux, je conclus que les seconds $vv - 4aa$, $\frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}} - \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$ le sont aussi. Et supposant en particulier, que les deux premiers termes sont égaux : je fais l'équation $vv = \frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}}$, d'où il suit que le parametre $p = \frac{2}{5}\sqrt{5aa} = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$. Le même suit encore de l'égalité des deux derniers termes $4aa = \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$. Avec le diametre determiné & le parametre, l'hyperbole DBd se décrira. Je dis que tous les points D, d satisfont au Problême.

Dem. 1° au point d. Id est $Gd - GH - HI$, $x - a - \frac{1}{2}y = z$; $FI = EI + EF$, $\sqrt{\frac{5}{4}vv} + \sqrt{5aa}$; $BI = EI - EB$, $\sqrt{\frac{5}{4}vv} - \sqrt{5aa}$. Et par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $2\sqrt{5aa}$ est au parametre $\frac{2}{5}\sqrt{5aa}$: ainsi $FI \times IB$, $\frac{5}{4}vv - 5aa$ est à $\overline{Id}^2$, zz. & 16. 6. Eucl. $2zz\sqrt{5aa} = \frac{1}{2}vv\sqrt{5aa} - 2aa\sqrt{5aa}$, & divisant par $\sqrt{5aa}$, $2zz = \frac{1}{2}vv - 2aa$, & multipliant par 2, $4zz = vv - 4aa$. 2° Au point D, ID est $GH + HI - GD$, $a + \frac{1}{2}y - x = -z$, & par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $2\sqrt{5aa}$ est au parametre $\frac{2}{5}\sqrt{5aa}$: ainsi $FI \times IB$, $\frac{5}{4}vv - 5aa$ est à $\overline{ID}^2$, zz; $2zz\sqrt{5aa} = \frac{1}{2}vv\sqrt{5aa} - 2aa\sqrt{5aa}$, $2zz = \frac{1}{2}vv - 2aa$, $4zz = vv - 4aa$. Substituons pour zz sa valeur $xx - 2ax - xy + aa + ay + \frac{1}{4}yy$, & pour vv sa valeur $4aa + 4ay + yy$, l'équation sera $4xx - 8ax - 4xy + 4aa + 4ay + yy = 4aa + 4ay + yy - 4aa$, qui

FIG. 16. ſe reduit à $4xx - 8ax - 4xy + 4aa = 0$. $xy = aa - 2ax + xx$ qui eſt l'équation à conſtruire. Enfin parce que la partie *BM* eſt la ſeule de l'hyperbole, d'où l'on puiſſe tirer les lignes *CD* ſur la ligne determinée *AB*, elle eſt auſſi la ſeule, qui ſatisfaſſe au Problême. Ce qu'il falloit démontrer. Au reſte la quantité negative $-z$ dans l'eſpace qui répond à *AB* finie, & la poſitive $+z$, qui répond à *AB* infinie; nous aprennent qu'il falloit avoir propoſé *AB* infinie, afin d'avoir une ſolution poſitive dans l'arc infini *Bd*.

REGLE X.

LA conſtruction & la démonſtration, que nous venons de faire, ſerviront d'exemple pour cette regle, qui eſt telle.

Après avoir rempli toutes les conditions d'un Problême, & formé la derniere équation, laquelle contient deux inconnuës x, y: ſouvent avant que d'en faire la conſtruction, il faut en ſubſtituer une ou deux autres, & faire une nouvelle équation, qu'on appelle la reduite. Si dans la conſtruction, qui ſe fait enſuite, les deux coordonnées de la reduite ſe touchent en un point & font un angle; il n'y a pas de difficulté. Mais ſi elles ſont tellement ſeparées l'une de l'autre, qu'elles ne faſſent point d'angle: alors on laiſſe celle, qui eſt l'appliquée, dans la poſition, que la conſtruction lui a donnée; mais on tranſporte le diametre & l'abſciſſe ſur une autre ligne, qui ſoit tellement diſpoſée, que les coordonnées faſſent un angle. Cette ligne étant trouvée, on y determine le ſommet, le centre, le diametre, les abſciſſes, ſuivant que la nature de la courbe à décrire, le demande. Le diametre precedent ſert à déterminer la valeur du nouveau diametre, l'abſciſſe precedente ſert auſſi à trouver celle de la nouvelle abſciſſe, par le moyen des triangles rectangles, ou ſemblables. Enſuite formant avec les valeurs de ce nouveau diametre & de cette nouvelle abſciſſe, l'équation propre de la courbe, qu'on doit décrire, on trouve la valeur du parametre. Toutes ces choſes étant determinées, on décrit la courbe, & on fait la demonſtration ſuivant l'équation, que ces dernieres valeurs du diametre, du parametre & des abſciſſes doivent donner; & par les ſubſtitutions on doit retrouver les équations precedentes. Nous trouverons encore pluſieurs exemples de cette regle dans les ſolutions des differens cas du Problême de Pappus, Livre 2, Partie 2.

Il arrive auſſi, qu'on laiſſe la coupée dans la poſition où elle ſe trouve d'abord, & qu'on lui cherche une nouvelle ordonnée correſpondante, comme on le fera, Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 1.

De ſorte que toutes les fois que l'abſciſſe & l'ordonnée de l'équation ne ſe touchent pas: il faut changer la poſition de l'une des deux, & leur faire former un angle. La diſpoſition des lignes fait juger, qu'elle eſt celle, qui doit être tranſportée.

REGLE XI.

APrès que le Problême eſt reſolu, l'on trouve quelquefois une impoſſibilité dans la derniere équation, $z + a = a$, $z = o$. $z = \sqrt{-a}$. Le tout égal à la partie, une racine imaginaire. Alors le Problême eſt impoſſible.

Quelquefois l'on trouve une équation, dont les deux membres contiennent les mêmes lettres $ab = ab$, & qui, ôtant ab de chaque côté, ſe reduit à $o = o$. Ce qui montre, que la queſtion eſt neceſſairement telle qu'on l'a propoſée, & que c'eſt un Theorême, & non pas un Problême, qui a été propoſé. D'un point donné hors d'une ligne donnée abaiſſer une perpendiculaire ſur cette ligne, cette queſtion eſt un Problême, parce que de ce point vous pouvez tirer ſur la ligne donnée des lignes qui ne ſeront pas perpendiculaires; ainſi l'on cherche avec raiſon une methode ſure, pour abaiſſer une perpendiculaire. Mais faire un triangle rectangle, dont le quarré de la baſe ſoit égal aux quarrez pris enſemble des deux autres côtez, cette queſtion eſt un Theorême, parce qu'on ne peut pas s'y tromper, & que tout triangle rectangle a neceſſairement la proprieté, que l'on ſuppoſe ici ne convenir qu'à une eſpece de triangle rectangle.

Quelquefois l'on trouve une grandeur negative égale à une poſitive, $-z = \sqrt{aa - bb}$, $z = -\sqrt{aa - bb}$. Ce qui eſt une marque qu'il faut prendre la quantité z, ſur la même ligne d'un côté oppoſé à celui, où on l'a miſe pendant l'operation. Lorſque dans une équation l'inconnuë a deux dimenſions, elle a deux racines; lorſquelle a trois dimenſions, elle a trois racines, &c. Ces racines peuvent être réelles ou imaginaires, c'eſt-à-dire, impoſſibles; parmi les réelles il peut y en avoir de vrayes & de fauſſes. Lorſqu'elles ſont toutes vrayes, elles ſe prennent du même côté; lorſque les unes ſont vrayes, les autres fauſſes, les vrayes ſe mettent d'un côté, les fauſſes de l'autre. Il n'y a jamais qu'une racine, que l'on cherche, & qui donne la reſolution exacte du Problême; mais les autres en donnent la reſolution dans un ſens, qui ne peut être different de celui du Problême qu'en quelques circonſtances. Et toutes ces differentes ſolutions ſont regardées comme propres du Problême, qui pour lors nous découvre plus qu'on ne demande. Les racines fauſſes nous avertiſſent auſſi, qu'il ne faut que changer des additions en des ſouſtractions, ou des ſouſtractions en des additions, pour faire un Problême peu different de celui qui eſt propoſé.

PROBLEME IV.

DU point B Fig. 2. pris hors de la ligne DE, abaiſſer deux perpendiculaires BA, BC ſur la ligne DE. Problême impoſſible.

Que cela ſoit fait, nommons AB, x; AC, y; BC, z. puiſque l'angle BAC eſt droit, $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$ $zz = xx + yy$, $xx = zz - yy$. Et puiſque l'angle BCA eſt auſſi droit, $\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$, Fig. 2.

$xx = zz + yy$. Donc $xx = zz - yy = zz + yy$, & $-yy = yy$. Equation impoſſible, qui aprend qu'il eſt impoſſible de tirer d'un ſeul point deux perpendiculaires ſur une même ligne.

PROBLEME V.

Fig. 1. DIviſer Fig. 1. une ligne AB en deux parties au point C, de telle façon que le quarré de la toute AB ſoit égal aux quarrez des ſegmens AC, CB, & a un rectangle ſous les ſegmens AC, CB. Problême impoſſible.

Que la ligne AB ſoit diviſée en C, comme on le demande, nommons AB, a; AC; x; CB ſera, $a - x$; & par la ſupp. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $+ AC \times CB$, $aa = xx + aa - 2ax + xx + ax - xx$, $-ax + xx = 0$, $ax = xx$, $a = x$, le tout égal à la partie, ce qui prouve l'impoſſibilité du Problême, lequel en effet eſt contraire à la Prop. 4. 2. Eucl.

PROBLEME VI.

Fig. 17. TRouver Fig. 17. un point A au dedans du rectangle donné $MNRP$. d'où ayant tiré aux quatre angles les quatre lignes AM, AN, AP, AR, les quarrez des deux lignes oppoſées, AP, AN ſoient égaux aux quarrez des deux autres lignes oppoſées AM, AR. C'eſt un Theorême.

Suppoſons la choſe faite, & par le point A menons FAK parallele à PM, nommons $MN = PR$, a; $MP = KF$, b; & les inconnuës $PF = MK$, z; $GP = AF$, x; nous aurons $KN = MN - MK$, $a - z = FR$; $AK = KF - AF$, $b - x$. Maintenant $\overline{AP}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{AF}^2$ $zz + xx$; $\overline{AN}^2 = \overline{KN}^2 + \overline{AK}^2$, $aa - 2az + zz + bb - 2bx + xx$; $\overline{AM}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{AK}^2$, $zz + bb - 2bx + xx$; $\overline{AR}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FR}^2$, $xx + aa - 2az + zz$. Et par l'hypotheſe $\overline{AP}^2 + \overline{AN}^2$, $zz + xx + aa - 2az + zz + bb - 2bx + xx = \overline{AM}^2 + \overline{AR}^2$, $zz + bb - 2bx + xx + xx + aa - 2az + zz$; c'eſt-à-dire $0 = 0$, car tous les termes de l'équation s'effacent. D'où il ſuit que c'eſt un Theorême, & que quelque point A, qu'on prenne au dedans du rectangle $MNRP$, les quarrez des deux lignes oppoſées AP, AN ſeront égaux aux quarrez des deux autres lignes oppoſées AM, AR.

PROBLEME VII.

Fig. 18. ETant donnée Fig. 18. la Parabole AD, dont on connoît le parametre p, & un point D pris ſur cette parabole; trouver ſur ſon axe AE, le point B tel, que ſi vous joignez les deux points B, D, qu'au point D, vous éleviez ſur DB la perpendiculaire DE, qui coupe l'axe en E, & qu'enfin du même point D vous abaiſſiez DC perpendiculaire ſur l'axe AE; le ſegment CE de l'axe compris entre les deux perpendiculaires DC, ED, ſoit égal à la moitié du parametre.

Nous trouverons une valeur negative ſeule, qui marquera que pour conſtruire

construire le Problême, l'on doit prendre la grandeur AB d'un côté tout opposé à celui, dont on l'a prise. L'on verra aussi, qu'au lieu d'une soustraction, il faut faire une addition. Fig. 18.

1. Que le point B soit celui que l'on cherche, qu'il soit sur l'axe en dedans de la parabole, que ED soit perpendiculaire sur DB, & DC sur AE.

Nommons la donnée CE, $\frac{1}{2}p$; les inconnuës AB, z; l'abscisse AC, x; l'appliquée CD, y; & $BC = AC - AB$, $x - z$.

Par la Prop. 8. l. 6. Eucl. $EC \times CB = \overline{CD}^2$, $\frac{1}{2}px - \frac{1}{2}pz = yy$, & multipliant par 2, & divisant par p, $x - z = \frac{2yy}{p}$. D'ailleurs par la nature de la parabole, $p \times AC = \overline{CD}^2$, $px = yy$. Mettez cette valeur de yy à sa place dans l'équation $x - z = \frac{2yy}{p}$, elle se changera en celle-ci $x - z = 2x$, $-z = x$. C'est pourquoi puisque AB est $+z$, la quantité $-z$ doit être prise de l'autre côté de A. Prolongez donc l'axe AE au dessus du sommet A, jusqu'à ce que Ab soit égal à x, joignez bD, & tirez De perpendiculaire à Db, je dis que le segment Ce est $\frac{1}{2}p$.

Dém. Nommons Ab, z; AC, x; DC, y; Ce, $\frac{1}{2}p$. L'on aura $bC = bA + AC$, $z + x$, & 8. 6. Eucl. $Ce \times Cb = \overline{CD}^2$, $\frac{1}{2}pz + \frac{1}{2}px = yy$, $z + x = \frac{2yy}{p}$, & par la nature de la parabole $yy = px$; & si l'on met px pour yy dans $z + x = \frac{2yy}{p}$, ce sera $z + x = 2x$, $z = x$. Ce qu'il falloit démontrer.

L'on avoit retranché AB de l'axe AE, en prenant le point B; & en prenant le point b, l'on ajoute Ab au même axe.

PROBLEME VIII.

DIviser la ligne donnée AB Fig. 19. en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, en deux parties telles, que la toute soit au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre. Fig. 19.

Dans ce Problême la position de la racine negative est contraire à celle de la positive; & en mettant une addition à la place d'une soustraction, l'on change le Problême proposé en un autre peu different. De plus la seule racine positive resout exactement le Problême.

1. Supposons que le point C soit celui qui divise la ligne AB de telle maniere, que la toute AB soit au plus grand segment BC, comme BC est au moindre segment CA. Nommons AB, a; BC, x; CA sera $a - x$. Et par la supposition $AB, a : BC, x :: BC, x : CA, a - x$. $xx = aa - ax$, $xx + ax = aa$, & mettant $\frac{1}{4}aa$ dans chaque membre, $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$, dont il faut extraire les racines quarrées.

2. Comme le quarré $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ peut être produit par $x + \frac{1}{2}a$ multipliant $x + \frac{1}{2}a$, ou par $-x - \frac{1}{2}a$ multipliant $-x - \frac{1}{2}a$; il a deux racines, la premiere, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & cette racine est positive, parce que sa valeur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ est plus grande que zero. La seconde, $-x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, car c'est

FIG. 19. l'usage de donner toûjours le signe + à l'inconnuë x : & lorsqu'elle est ainsi exprimée, si, comme il arrive ici, sa valeur $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ est moindre que zero, l'on dit que c'est une racine negative de l'équation. Mais si cette valeur, après que l'inconnuë a pris le signe + est au dessus de zero, ainsi qu'on le verra dans le Problême IX. l'on dit que c'est une valeur vraye de l'inconnuë, quoique dans l'extraction de la racine, cette même inconnuë ait eu le signe $-$.

3. Pour construire la racine positive $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$: Au point A il faut élever $EA = \frac{1}{2}a$ perpendiculaire à AB, & joindre EB, couper $ED = EA$, faire $BC = BD$; le point cherché est C.

Démonstration. Puisque l'angle EAB est droit, $\overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{EA}^2 = aa + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$, & $EB = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. $BD = BE - ED$, $\frac{1}{2} - a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}, = x = BC$. Après cela $CA = a - x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Mais ces trois quantitez AB, a; BC, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; CA, $a - x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, sont telles, que le produit des extrêmes $AB \times CA$ est égal au quarré $\overline{BC}^2$ de la moyenne, c'est-à-dire, $\frac{3}{2}aa - a\sqrt{\frac{5}{4}aa} = \frac{1}{4}aa - a\sqrt{\frac{5}{4}aa} + \frac{5}{4}aa$: donc 17. 6. Eucl. elles sont en proportion continuë. Ce qu'il falloit démontrer.

4. L'on construira de cette maniere la racine fausse $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, ou $-x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, parce que $+x$ a été pris sur la ligne AB, en allant de B vers A, $-x$ se prendra sur la même ligne AB prolongée, en allant de l'autre côté de B vers G. Je fais donc $BF = AE$, $\frac{1}{2}a$; & $FG = EB$, $\sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & la ligne BG est $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = -x$.

Dém. étant $-x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $a - x$ sera $\frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, car ici $a - x$ est une addition de a avec $-x$. Et l'on aura ces trois grandeurs en proportion continuë, AB, a; BG, $-x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AG, $a - x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, puisque le produit des extrêmes & le quarré des moyennes sont $\frac{3}{2}aa + a\sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Si c'est la racine fausse $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ que l'on construit, c'est la même operation, l'on prend $BF = \frac{1}{2}a$, $FG = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, pour avoir BG, $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa} = x$, car $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ sont ici ajoûtées ensemble. Ainsi les grandeurs connuës qui ont $-$, se prennent du côté opposé à celui dont on a pris les grandeurs positives dans la valeur positive.

Dém. $a - x$ est $\frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & l'on a ces trois quantitez en proportion continuë, AB, a; BG, $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AG, $a - x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Puisque le produit des extrêmes est égal au quarré des moyennes, $\frac{3}{2}aa + a\sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. L'on changera ce Problême en un autre peu different, si l'on met une addition à la place d'une soustraction. Et la racine positive sera la même dans le second Problême que la negative du premier, & au contraire la negative du second sera la même que la positive du premier.

Le premier Problême se peut énoncer ainsi. Une ligne AB étant don-

née, il la faut couper en deux parties au point C, de telle ſorte que la toute AB ſoit à la retranchée BC, comme la retranchée BC eſt au reſte CA, & il y a ici une ſouſtraction. FIG. 19.

Le ſecond Problême s'exprimera de cette façon. La ligne AB étant donnée, lui en ajoûter une autre BG telle, que la donnée AB ſoit à l'ajoûtée BG, comme l'ajoûtée BG eſt à GA compoſée de la donnée & de l'ajoûtée.

6. Nommons AB, a; BG, x; AG, $a+x$. Par l'hypotheſe AB, $a : BG$, $x :: BG$, $x : AG$, $a+x$. $xx = aa + ax$; $xx - ax = aa$. Et ajoûtant $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$; dont les racines ſont, la premiere $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, racine poſitive, la même que la negative du premier problême. Car $-x - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ n. 2. peut ſe reduire à $-x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. La ſeconde $-x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, racine negative, la même que la poſitive du premier Problême, car $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ n. 2. peut ſe reduire à $-x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

7. Pour conſtruire la racine poſitive $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, l'on fait $BF = \frac{1}{2}a$, & $FG = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, BG ſera $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = x$; la ligne cherchée.

Dém. Il y a une proportion continuë entre ces trois grandeurs, AB, a; BG, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AG $a + x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. 17. 6. Eucl. puiſque $\overline{BG}^2 = AB \times GA = \frac{3}{2}aa + a\sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

La conſtruction de cette racine poſitive eſt la même que celle de la negative du Problême précedent.

8. Pour conſtruire la racine negative $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, ou $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, je prends de l'autre côté de B la ligne $BC = BD = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{4}{5}aa} = -x$.

Dém. 17. 6. Eucl. Ces trois grandeurs ſont en proportion continuë AB, a; BC, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AC, $a - x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$: car ici $a - x$ eſt une addition : où ces trois AB, a; BC, $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AC, $a - x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$: puiſque le rectangle ſous les extrêmes & le quarré des moyennes ſont égaux; à ſavoir $\frac{3}{2}aa - a\sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

La conſtruction de cette racine negative eſt ſemblable à la conſtruction de la poſitive du Problême precedent.

9. L'on trouve dans ces reſolutions plus que l'on ne cherche.

Dans le premier Problême l'on cherche une ligne, qui doit être retranchée de la ligne AB, la racine poſitive determine cette ligne; & la negative indique une autre ligne qui doit être ajoûtée à la ligne AB, pour faire un Problême un peu different.

Au contraire dans le ſecond Problême l'on cherche une ligne, qui doit être ajoûtée à la ligne AB, la racine poſitive donne la ligne cherchée; & la negative montre une autre ligne, qui doit être retranchée de la ligne AB pour faire un Problême auſſi un peu different.

PROBLEME IX.

FIG. 20. ETant donnez Fig. 20. le demi-cercle AEB, & hors de ce cercle la ligne infinie FD parallele au diametre AB; tirer de l'extrêmité A de ce diametre la ligne AD de telle maniere, que la partie AE ſoit égale à la partie ED.

Les deux racines ſe prennent ici du même côté, parce qu'elles ſont toutes deux poſitives. La reſolution donne encore plus que l'on ne demande, Il y aura auſſi pluſieurs cas.

1. Suppoſons la choſe faite. Par le point E tirons FEC perpendiculaire aux paralleles AB, FD. Les deux triangles AEC, FED ſont équiangles 29. 1. Eucl. & parce que les baſes AE, ED ſont égales, ils ſont égaux, 26. 1. Eucl. & $CE = EF$. Nommons les connuës AB, a; CF, b; CE, $\frac{1}{2}b$. Les inconnuës AC, x; CB, $a - x$.

2. Cor. 8. l. 6. Eucl. La ligne EC eſt moyenne proportionelle entre les lignes AC, CB: donç 17. 6. Eucl. $AC \times CB = \overline{EC}^2$, $ax - xx = \frac{1}{4}bb$, $xx - ax = -\frac{1}{4}bb$, $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Dont la premiere racine eſt $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, la ſeconde eſt $-x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$.

3. Vous conſtruirez ainſi la premiere racine $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$. Au centre G élevez GH perpendiculaire au diametre AB, ſur GH comme diametre decrivez le demi-cercle HKG, dans lequel vous inſcrirez $HK = \frac{1}{2}b$, joignez KG, & faites $GC = GK$. Au point C élevez CF perpendiculaire à AB, qui coupera la circonference AEB au point E, par lequel vous menerez la ligne AED. Vous aurez $AE = ED$; & $GH = GA$, $\frac{1}{2}a$.

Dém. l'angle HKG dans le demi-cercle eſt droit 31. 3. Eucl. donc $\overline{GK}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HK}^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, & $GK = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb} = GC$ par la conſtruction. Ainſi $AC = AG + GC = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb} = x$; & $CB = AB - AC$, $a - x$. Or par la conſtruction EC eſt perpendiculaire à AB, & Cor. 8. l. 6. Eucl. moyenne proportionelle entre AC, CB: donc 17. 6. Eucl. $\overline{EC}^2 = AC \times CB = ax - xx = \frac{1}{4}bb$. n. 2. Donc $EC = \frac{1}{2}b = EF$. C'eſt pourquoi les triangles AEC, FED équiangles 29. 1. Eucl. ont encore les côtez EC, EF égaux: donc 26. 1. Eucl. ils ſont entierement égaux, & les baſes AE, ED ſont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

Cette premiere racine eſt poſitive, parce qu'elle s'étend ſur AB, du côté que l'on a pris $+x$.

4. Vous conſtruirez la ſeconde racine $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, en retranchant de AG, $\frac{1}{2}a$ la ligne $Gc = GC$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, & vous

aurez $Ac = AG - Gc$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $= x$. Au point c vous éleverez la ligne cf perpendiculaire à AB, & qui coupera la circonference AEB au point e, par où vous menerez Aed, les lignes Ae, ed seront égales. FIG. 19.

Dém. La ligne Ac est x, donc la ligne cB, $a - x$. Or ce est moyenne proportionelle entre Ac, cB; donc $\overline{ec}^2 = Ac \times cB = ax - xx = \frac{1}{4}bb$. n. 2. & $ec = \frac{1}{2}b = cf$.

Les triangles Aec, fed équiangles ont les côtez ce, ef égaux, & $Ae = ed$. Ce qu'il falloit démontrer.

L'on trouveroit la même chose, si l'on construisoit cette seconde racine exprimée par $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$. Puisque $+x$ a été pris sur AB en allant de A vers B, $-x$ se doit prendre de l'autre côté de A. Soit donc $Ag = GC$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, & $gc = AG$, $\frac{1}{2}a$; l'on aura $-Ac = Ag - gc$, $-x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}a$.

Le point c sera le même dans les deux constructions, car Ag & Gc ont été prises égales à GC, elles sont donc égales; ajoûtez leur la ligne commune Ac, vous aurez $gc = AG$, $\frac{1}{2}a$. L'usage est de construire $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, plûtôt que $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$.

Parce que tant la valeur de x, que celle de $-x$ est toûjours Ac, qui se trouve du même côté que AC, cette seconde racine s'appelle positive comme la premiere AC, & l'on dit que l'équation $xx - ax = -\frac{1}{4}bb$. n. 2. a deux racines positives.

5. La resolution du Problême donne plus que l'on ne cherche. Il falloit trouver une ligne AD tellement divisée par la circonference du demi-cercle en E, que AE, ED fussent égales : & l'on a encore trouvé une autre ligne Ad, qui est coupée de la même maniere au point e.

6. Afin que le Problême soit possible, il faut que la perpendiculaire CF ne soit pas plus grande que le diametre AB; car si elle étoit plus grande, $\frac{1}{2}b$ seroit plus grand que $\frac{1}{2}a$, & $\frac{1}{4}bb$ que $\frac{1}{4}aa$, & le terme $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$ seroit une racine imaginaire, qui supposeroit, que l'on peut tirer la racine quarrée d'une grandeur negative $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, ce qui est impossible, à cause que tous les quarrez sont positifs, $-a$ multipliant $-a$ produit $+aa$, aussi bien que $+a$ multipliant $+a$.

Lorsque $a = b$, les deux racines se reduisent à $x = \frac{1}{2}a$. Dans ce cas le point E tombe sur le point H; la perpendiculaire CF tombe sur GH, & l'on a AG, $x = \frac{1}{2}a$.

PROBLEME X.

ETant données la somme 136. des côtez & des diametres d'un Rhombe, & la difference 8 de ses deux diametres : trouver le côté, & chaque diametre.

La racine qui paroît d'abord ici positive, donne une solution negative, & celle au contraire qui paroît d'abord negative, en donne une positive. Toutes deux sont positives. En mettant une soustraction à la place d'une addition, le Problême se change en un autre peu different.

FIG. 21. 1. Supposons que Fig. 21. le triangle ACB rectangle en C est un de ceux que les diametres du Rhombe font en se coupant. Nommons la somme 136 des côtez & des diametres $4a$; la difference 8 des diametres, $4b$; la somme des côtez, $4z$; la somme des diametres sera $4a - 4z$.

Lorsqu'on divise une somme $2a = 20$ en deux parties $f = 12$, $g = 8$, dont la difference est $2b = 4$: la plus grande partie $f = 12$ est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la difference; $f = a + b$, $10 + 2 = 12$: la plus petite partie $g = 8$ est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la difference; $g = a - b$, $10 - 2 = 8$. Car si l'on ajoûte les quantitez $a + b$, $a - b$, la somme est $2a$, & la difference $2b$. Ainsi le grand diametre du Rhombe sera $2a - 2z + 2b$; le petit $2a - 2z - 2b$; & AC moitié du grand diametre, $a - z + b$; BC moitié du petit, $a - z - b$; & AB un des quatre côtez, z.

2. Dans le triangle rectangle ACB, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, ce qui s'exprime en termes Analytiques de cette façon, $zz = aa - 2az + 2ab + zz - 2bz + bb + aa - 2az - 2ab + zz + 2bz + bb$, qui se reduit à $zz - 4az = -2aa - 2bb$, & ajoûtant $4aa$ dans chaque membre, $zz - 4az + 4aa = 2aa - 2bb$. La premiere racine est $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroît d'abord vraye parce que l'inconnuë z s'y trouve avec $+$, mais elle devroit plûtôt être appellée negative, parce que le diametre AD, $2a$ étant plus grand que le côté AB, z; la grandeur $z - 2a$ est au dessous de zero. La seconde racine est $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroît fausse, parceque l'inconnuë z s'y trouve avec $-$, mais elle est vraye, parce que le diametre AD, $2a$ étant plus grand que le côté AB, z; la quantité $-z + 2a$ est plus grande que zero. La premiere donnera une solution negative, la seconde une positive.

Dém. La quantité $\sqrt{2aa - 2bb}$ est $= \sqrt{2312 - 8} = \sqrt{2304} = 48$. La seconde racine $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb} = 68 - 48 = 20$; les quatre côtez du Rhombe $4z$, 80; & parceque la somme des côtez & des diametres par la supp. est $4a$, 136; si je soustrais 80 de 136, il restera $4a - 4z = 56$, la somme des diametres; dont le plus grand AD, $2a - 2z + 2b = 32$; le plus petit EB, $2a - 2z - 2b = 24$. Leur difference est 8 suivant l'hypothese, AB, 20; AC, 16; CB, 12. Ainsi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $400 = 256 + 144$.

Prenons maintenant la premiere racine $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb} = 68 + 48 = 116$; les quatre côtez du Rhombe $4z$, 464; & parce que la somme des côtez & des diametres par l'hyp. est $4a$, 136; si je soustrais

464 de 136, il restera $4a - 4z = -328$, pour la somme des diametres; dont le plus grand AD, $2a - 2z + 2b = -160$; le plus petit EB, $2a - 2z - 2b = -168$. Leur difference est $+8$ selon l'hypothese, car $+8$ ajoûté à -168, fait -160. Et AB, 116; AC, -80; CB, -84. Ainsi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $13456 = 7056 + 6400$. FIG. 21.

Il est donc vrai que la seconde racine $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroît donner z negative, donne une solution, dont tous les chifres sont positifs. Au contraire la premiere racine $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroit donner z positive, ne peut resoudre le Problême, sans employer des chifres negatifs. Cependant la valeur des deux z est positive. Ce qu'il falloit démontrer.

3. La somme des côtez du Rhombe étoit donnée, ce qui est une addition; si l'on donne la difference de ces mêmes côtez, ce qui est une soustraction, le Problême sera un peu different, & sa racine positive sera la même que la negative precedente, comme aussi sa racine negative sera la même que la positive precedente. Voici comme le Problême se proposera.

Etant donnée la difference 136 des côtez & des diametres d'un Rhombe, & la difference 8 des deux diametres, trouver le côté & chaque diametre.

4. Nommons 136, $4a$; 8, $4b$; la somme des côtez $4z$; la somme des diametres $4z - 4a$; le grand diametre $2z - 2a + 2b$ le petit $2z - 2a - 2b$, & AC, $z - a + b$; BC, $z - a - b$; AB, z. Et 47. 1. Eucl. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ $zz = zz - 2az + 2bz + aa - 2ab + bb + zz - 2az - 2bz + aa + 2ab + bb$; $zz - 4az = -2aa - 2bb$. La même que n. 2. & ses racines $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$ ou $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb}$; $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, ou $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb}$.

La racine $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$ pouvoit être appellée negative n. 2. parce que AD, $2a$ étoit plus grande que AB, z: ici elle est positive, parceque, comme on le verra, z, 116 est plus grande, que $2a$, 68. L'on voit encore, que la racine $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$ qui étoit positive n. 2. pourroit être ici appellée negative.

Dém. la premiere racine est $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb}$, $= 116 = AB$; $4z = 464$; $4z - 4a = 328$; le grand diametre $2z - 2a + 2b = 168$; AC, 84; le petit diametre $2z - 2a - 2b = 160$; $BC = 80$. La difference des diametres AD, 168; BE, 160 est 8 selon l'hyp. Et 47. 1. Eucl. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, $13456 = 7056 + 6400$.

La seconde racine est $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb} = 20 = AB$; $4z = 80$; $4z - 4a = -56$; le grand diametre $2z - 2a + 2b = -24$; le petit $2z - 2a - 2b = -32$; dont la difference est $+8$, laquelle étant ajoûtée au plus petit -32, fait le plus grand -24. $AC = -12$;

FIG. 11. $BC = -16$. Et 47. 1. Eucl. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $400 = 144 + 256$. Voilà tout ce qu'il falloit démontrer.

REGLE XII.

LOrſqu'on veut qu'une équation ſerve d'exemple, on l'appelle Formule. Il y a des formules, qui mettent d'abord ſous les yeux toutes les combinaiſons que peuvent avoir les termes & les ſignes d'une ſorte d'équatiõns ; il y en a qui renferment tous les cas qui peuvent arriver dans la reſolution & dans la conſtruction d'un Problême. Il y en a qui expriment tous les differens degrez des courbes, à qui on a donné le même nom.

L'équation $x^3 \pm axx \pm abx \pm abc = 0$, qui pourroit auſſi s'exprimer ainſi $x^3 \overset{\pm}{_0} axx \overset{\pm}{_0} abx \overset{\pm}{_0} abc = 0$, mais l'uſage eſt de ne mettre que les ſignes $\pm$; cette équation, dis-je, repreſente toutes les équations poſſibles de trois dimenſions, dans leſquelles l'inconnuë dans ſa plus haute puiſſance a le ſigne $+$; & les autres termes peuvent avoir l'un des deux ſignes indifferemment, ou être nuls ou évanoüis, ce qui ſe marque ainſi * ; la lettre a repreſente toute quantité, qui multiplie l'inconnuë au ſecond terme ; les lettres ab repreſentent toute quantité, qui multiplie l'inconnuë x au troiſiéme terme ; & les lettres abc repreſentent toute quantité, qui ne multiplie pas l'inconnuë au quatriéme terme. L'équation $z^3 \begin{matrix} + fzz \\ - \frac{d}{c}zz \end{matrix} * - ffx = 0$ eſt renfermée dans la formule generale ; les quantitez $+f - \frac{d}{c}$ qui multiplient ici zz au ſecond terme répondent à la lettre a de la formule generale, qui multiplie xx ; le troiſiéme terme eſt ici évanoüi ; les quantitez ffx qui compoſent ici le quatriéme terme répondent au quatriéme terme abc de la formule generale. L'équation $xyy - \frac{dd}{x}y \begin{matrix} + cxx \\ - ccd \end{matrix} = 0$ eſt auſſi compriſe dans la formule generale. Ici le premier terme y^3 eſt nul ; x qui multiplie yy au ſecond terme répond à la quantité a de la formule generale, qui multiplie xx au ſecond terme ; la quantité $-\frac{dd}{x}$ du troiſiéme terme répond aux lettres ab du troiſiéme terme de la formule generale ; les grandeurs $+cxx - ccd$ répondent aux grandeurs abc du quatriéme terme de la formule generale.

Si une formule, qui a deux indeterminées, peut convenir à pluſieurs lignes droites ou courbes, parceque les lignes qui ſont exprimées par ces deux indeterminées, peuvent être tirées ſur chacune de ces lignes droites ou courbes : alors pour appliquer la formule à une courbe en particulier ; vous ſubſtituez à la place d'une des indeterminées, la valeur que cette indeterminée a dans cette courbe. Cette valeur ſe tire ordinairement de l'équation propre de la courbe. C'eſt ce que M. DESCARTES a pratiqué dans ſa fameuſe Methode des Tangentes, L. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 3. & que vous verrez Problême XI. qui ſuit.

Quand vous avez un Problême, où l'on demande un point, une ligne, qui

qui peuvent avoir differente position, vous resolvez tous les cas ; aprés quoi si vous voulez en donner la solution, par une formule generale, vous proposez d'abord la resolution la plus composée, c'est-à-dire, celle qui a le plus de termes, dont chaque terme contient un plus grand nombre de lettres, & dont la construction demande un plus grand nombre de lignes. Ensuite vous appliquez la formule à chaque cas particulier, en effaçant les termes, où se trouvent les lettres, qui representent des lignes, lesquelles disparoissent à mesure que les cas deviennent plus simples. Et cela vous évite la peine du calcul. M. DESCARTES en a des exemples dans toute la resolution du Problême de Pappus, L. 2. Part. 2. Sect. 2. Vous en trouverez un dans le Problême XII. qui suit.

* Lorsqu'on veut que la solution d'un Problême serve de formule, M. DESCARTES dit, qu'il faut retenir jusqu'à la fin toutes les mêmes lettres qu'on a posées dès le commencement, c'est-à-dire, qu'il ne faut pas pour abreger faire des substitutions semblables à celle-ci $aab + \frac{acd}{f} - 42\frac{aggn}{m} - n^3 = ggh$, & employer dans le calcul ggh pour les quatre termes, ausquels on l'a égalé. Ou bien si on change ainsi quelques lettres pour la facilité du calcul, il les faut remettre à la fin, à cause qu'ordinairement plusieurs s'effacent. L'on apperçoit aussi mieux, lorsqu'on ne fait point de changement, les differentes combinaisons & les differens raports, que les lettres & les lignes, qui servent à la resolution & à la construction d'un Problême, ont entr'elles. * Tom. 3. Lett. 8.

Les Problêmes suivans éclairciront cette regle.

PROBLEME XI.

UNe courbe AD Fig. 18. étant donnée, dont AC est un diametre quelconque : trouver sur cette courbe le point D tel, que l'appliquée DC à ce diametre soit égale à son abscisse AC correspondante. FIG. 18.

Ce Problême fournira une formule generale, qui s'appliquera à differentes courbes, en substituant à la place d'une des inconnuës qui represente l'appliquée de la courbe, la valeur de cette appliquée tirée de l'équation constitutive de chaque courbe.

1. Soit D le point cherché. Nommons l'abscisse AC, x ; l'appliquée CD, y. L'hypothese donne $CD = AC$, $y = x$, qui sera la formule generale.

2. Cette formule s'applique à la parabole, en prenant la valeur de y dans l'équation à la parabole $yy = px$, & c'est $y = \sqrt{px}$. Substituez cette valeur de y à sa place dans la formule $y = x$; vous aurez $\sqrt{px} = x$; & quarrant les deux membres $px = xx$, $x = p$. Ce qui signifie, que si l'on coupe l'abscisse AC, x égale au parametre, & que par le point C l'on mene CD appliquée au diametre AC, l'on aura $AC = CD$.

3. Vous appliquerez la formule au cercle, en tirant la valeur de y de

FIG. 18. l'équation $yy = 2ax - xx$, & ce ſera $y = \sqrt{2ax - xx}$; que vous ſubſtituerez à la place de y dans la formule pour avoir $\sqrt{2ax - xx} = x$, dont les quarrez ſont $2ax - xx = xx$, $2ax = 2xx$, $x = a$. D'où il ſuit que $2a$ étant le diametre, a le rayon, l'abſciſſe x ſera égale au rayon, & qu'il n'y a que le centre du cercle, où l'abſciſſe ſoit égale à l'appliquée correſpondante.

4. L'équation à l'ellipſe eſt $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$; $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$; $y = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{d}} = x$; $\frac{2apx - pxx}{d} = xx$; $2ap - px = dx$, $dx + px = 2ap$, $x = \frac{2ap}{d+p}$. Ce qui prouve qu'en faiſant, comme $d + p$ la ſomme du diametre & du parametre eſt à $2a$ le diametre : de même le parametre p, eſt à une quatriéme ligne $\frac{2ap}{d+p} = x$, ce ſera l'abſciſſe AC, qui ſera égale à ſon appliquée correſpondante CD.

5. L'équation à l'hyperbole par raport à ſes diametres $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$, $yy = \frac{2apx + pxx}{d}$ donne $y = \sqrt{\frac{2apx + pxx}{d}} = x$; $2apx + pxx = dxx$; $2ap + px = dx$. Maintenant ſi l'on ſuppoſe le diametre d plus grand que le parametre, c'eſt $dx - px = 2ap$; $x = \frac{2ap}{d-p}$. C'eſt pourquoi il faut faire, comme $d - p$ le diametre moins le parametre eſt au diamêtre $2a$: de même le parametre p eſt à une quatriéme ligne $\frac{2ap}{d-p} = x$, l'abſciſſe cherchée, laquelle a une ordonnée correſpondante qui lui eſt égale.

Mais ſi le parametre p eſt plus grand que le diametre d, l'équation $2ap + px = dx$ ſe changera en $px - dx = -2ap$; $x = \frac{-2ap}{p-d}$, ou $-x = \frac{2ap}{p-d}$, qui étant une grandeur negative, avertit qu'il n'y a point d'appliquée telle, qu'on la deſire dans l'hyperbole, où on l'a cherchée ; mais qu'il faut prendre de l'autre côté du ſommet ſur le même axe, une ligne $= \frac{2ap}{p-d}$ & que l'on trouvera dans l'hyperbole oppoſée la ſolution du Problême.

6. Pour la ſeconde parabole cubique $axx = y^3$, il n'y a qu'à faire $axx = x^3$, $x = a$ le parametre, ainſi la coupée étant priſe égale au parametre, l'ordonnée leur ſera auſſi égale.

L'équation de la premiere parabole cubique $aax = y^3$ ſe change en $aax = x^3$, $x = a$. De ſorte que le même arrive ſur cet article aux deux paraboles cubiques, qu'à la parabole ordinaire.

7. La même methode s'étend à l'équation $xy = ab$ de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, $y = \frac{ab}{x} = x$, $ab = xx$, $x = \sqrt{ab}$. Ainſi l'abſciſſe qui ſera moyenne proportionelle entre les grandeurs a & b aura une appliquée correſpondante, qui lui ſera égale.

8. Elle peut encore s'appliquer aux lieux à la ligne droite, dont l'équation eſt $y = \frac{bx}{a} = x$; $bx = ax$, $b = a$. D'où l'on conclut, que l'on n'aura point de coupée x égale à ſon appliquée correſpondante y, que lorſque a ſera égale à b.

PROBLEME XII.

UNe parabole KDB Fig. 22. étant donnée avec ſon axe CKF, & ſon parametre KP infiniment prolongez, & un point A dans l'eſpace infini PKF: tirer du point A la droite ſecante ADB ſur la partie infinie KDB de telle ſorte que la partie AD ſoit égale à la partie DB. FIG. 22.

L'on trouvera ici une formule compoſée, qui deviendra plus ſimple à meſure qu'on l'appliquera à des cas particuliers, pour leſquels il faut moins de lignes.

1. Tirez AF perpendiculaire à l'axe FG, AH parallele au même axe, & les appliquées DC, BG, & ſuppoſez que les points D, B, ſont ceux que vous cherchez. Nommez les connuës AF, b; FK, c; le parametre de la parabole p; les inconnuës $AD = DB$, z; AB, $2z$; KC, x; KG, v; DC, y; BG, $ſ$; vous aurez $FC = FK + KC$, $c + x = AE$; $FG = FK + KG$, $c + v = AH$; $DE = DC - EC$, $y - b$; $BH = BG - HG$, $ſ - b$.

2. Dans les triangles équiangles 29. 1. Eucl. ADE, ABH, vous avez $AD, z : DE, y - b :: AB, 2z ; BH, ſ - b$. $ſz - bz = 2yz - 2bz$, $ſ = 2y - b = BG$. $AD, z : AE, c + x :: AB, 2z : AH, c + v$. $cz + vz = 2cz + 2xz$, $v = c + 2x = KG$. Par la nature de la parabole, $p \times KC = \overline{CD}^2$, $px = yy$, $y = \sqrt{px}$. & $p \times KG = \overline{GB}^2$, $cp + 2px = 4yy - 4by + bb$; pour y mettez ſa valeur; & vous aurez $cp + 2px = 4px - 4b\sqrt{px} + bb$, $4b\sqrt{px} = 2px + bb - cp$. Quarrez les deux membres, $16bbpx = 4ppxx + 4bbpx - 4cppx + b^4 - 2bbcp + ccpp$. $xx - \frac{3bbx}{p} - cx = \frac{bbc}{2p} - \frac{b^4}{4pp} + \frac{1}{4}cc$. Mettez de part & d'autre $\frac{9b^4}{4pp} + \frac{3bbc}{2p} + \frac{1}{4}cc$, & vous aurez $xx - \frac{3bbx}{p} - cx + \frac{9b^4}{4pp} + \frac{3bbc}{2p} + \frac{1}{4}cc = \frac{9b^4}{4pp} + \frac{3bbc}{2p} + \frac{1}{4}cc - \frac{b^4}{4pp} + \frac{bbc}{2p} - \frac{1}{4}cc = \frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}$. Extrayez la racine quarrée, $x - \frac{3bb}{2p} - \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$; $x = \frac{3}{2}\frac{bb}{p} + \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$, qui ſera la formule generale la plus compoſée de ce Problême.

Pour la conſtruire, il n'y a qu'à couper KC, $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$, & appliquer CD au point C, & par les points A, D, mener ADB.

4. Que le point donné ſoit F pris ſur l'axe. Alors, comme on le voit Fig. 23. le point A tombe ſur F, la ligne AH ſur l'axe FG, & AF, $b = 0$. C'eſt pourquoi dans la formule $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2bb + 2cp}$ l'on efface les termes, où b ſe rencontre, parceque une quantité multipliée par zero, eſt égale à zero. Il reſte $x = \frac{1}{2}c$ qui ſe conſtruit en prenant $KC = \frac{1}{2}c$, en appliquant CD, & en tirant FDB. FIG. 23.

Cela exempte du calcul, qu'il auroit fallu faire pour ce cas particulier, de cette façon. Nommons FK, c; le parametre; p; $FD = DB$, z; FB,

FIG. 23. $2z$; KC, x, KG, v ; DC, y ; BG, $ſ$; $FC = FK + KC, c + x$; $FG = FK + KG, c + u$.

Les triangles ſemblables FCD, FGB donnent ces Analogies. FD, z : DC, y : : FB, $2z$: BG, $ſ$; $ſz = 2yz$, $ſ = 2y = BG$, FD. z : FC, $c + x$: : FB : $2z$: FG, $c + v$; & $cz + vz = 2cz + 2xz$; $v = c + 2x = KG$.

Maintenant par la nature de la parabole $p \times KC = \overline{CD}^2$, $px = yy$; & $p \times KG = \overline{GB}^2$, $cp + 2px = 4yy$. Donc $yy = \frac{1}{4}cp + \frac{1}{2}px = px$; $\frac{1}{2}px = \frac{1}{4}cp$; $x = \frac{1}{2}c$. La même valeur, que l'on a d'abord trouvée, en effaçant dans la formule generale tous les termes, ou $b = o$ ſe rencontroit.

5. Mettons le point donné ſur le parametre en a, qui n'eſt pas le ſommet

FIG. 22. Fig. 22. la quantité FK, c eſt nulle, effacez donc tous les termes, dans leſquels c ſe trouve dans la formule $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2bb + 2cp}$, & vous aurez $x = \frac{3bb}{p} + \frac{bb}{p}\sqrt{2}$. Faites $KC = x$, &c.

Le calcul, qu'on s'épargne, donneroit la même valeur de x. Aprés avoir ſuppoſé la choſe faite, & que la parabole eſt coupée, comme il faut aux points D, d par la ligne aDd laquelle n'eſt pas tirée ; menez ah parallele à KC, & les ordonnées DC, dg. Nommez aK, $b = eC = hg$; le parametre, p ; $aD = Dd$, z ; ad, $2z$; KC, $x = ae$; Kg, $v = ah$; DC, y ; dg, $ſ$; $De = DC - eC, y - b$; $dh = dg - gh, ſ - b$;

Les triangles équiangles aDe, adh donnent ces Analogies, aD, z : De, $y - b$: : ad, $2z$: dh, $ſ - b$. $ſz - bz = 2yz - 2bz$; $ſ = 2y - b = dg$. De plus aD, z : ae, x : : ad, $2z$: ah, v. $vz = 2xz$; $v = 2x = Kg$. Maintenant par la nature de la parabole $p \times KC = \overline{DC}^2$, $px = yy$, $y = \sqrt{px}$. & $p \times Kg = \overline{dg}^2$, $2px = 4yy - 4by + bb$; $2y - b = \sqrt{2px}$, $y = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2px} = \sqrt{px}$; $\sqrt{px} - \frac{1}{2}\sqrt{2px} = \frac{1}{2}b$; dont les quarrez ſont $px - \sqrt{2ppxx} + \frac{1}{2}px = \frac{1}{4}bb$; $\frac{3}{2}px - \sqrt{2ppxx} = \frac{1}{4}bb$; $\frac{3}{2}px - \frac{1}{4}bb = \sqrt{2ppxx}$, dont les quarrez ſont $\frac{9}{4}ppxx - \frac{3}{4}bbpx + \frac{1}{16}b^4 = 2ppxx$; $\frac{1}{4}ppxx - \frac{3}{4}bbpx = -\frac{1}{16}b^4$. Diviſons tout par $\frac{1}{4}pp$, $xx - \frac{3bb}{p}x = -\frac{1}{4}\frac{b^4}{pp}$; $xx - \frac{3bb}{p}x + \frac{9b^4}{4pp} = \frac{9b^4}{4pp} - \frac{b^4}{4pp} = \frac{2b^4}{pp}$; $x - \frac{3bb}{2p} = \sqrt{\frac{2b^4}{pp}}$; $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{bb}{p}\sqrt{2}$. La même valeur que l'on avoit trouvée auparavant independamment du calcul.

6. Suppoſons que le point donné eſt le ſommet K ; les lignes AF, b ; FK, c diſparoiſſent, & ſi l'on efface les termes où elles ſe trouvent dans la formule $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$, elle ſe reduit à $x = o$. Ce qui marque qu'il eſt impoſſible, qu'une droite tirée du ſommet K, ſur la partie infinie KDd de la parabole la coupe de la façon qu'on le demande ici. En effet, une telle ligne coupera la parabole en un point ſeulement.

7. Au reſte en parcourant les differens cas d'un Problême ; rarement on fait une nouvelle Figure 23[e] pour un cas particulier ; rarement on tire de

nouvelles lignes ah, dg Fig. 22. mais à moins, que de grandes difficultez ne le demandent; on ſe contente de la figure, qui ſert à la ſolution generale.

PROBLEME XIII.

ETant donné le triangle rectiligne BAC Fig. 14. trouver ſon aire. Ce Problême remet les lettres, dont on avoit abregé la valeur; afin de faire une formule generale. FIG. 14.

1. Du ſommet A j'abaiſſe AD perpendiculaire ſur CB, & cette perpendiculaire eſt auſſi connuë. C'eſt pourquoi j'aurai l'aire du triangle BAC, en multipliant la moitié de la perpendiculaire AD par la baſe BC, ou la moitié de CB par DA, & l'aire ſera $\frac{1}{2}AD \times BC$, ou $\frac{1}{2}BC \times AD$.

2. Mais ſi l'on exige que les trois côtez ſoient exprimez dans la valeur de l'aire. Je nomme AB, a; AC, b; BC, c; AD, d; BD, z; DC, $c - z$; & l'aire y.

$\overline{AD}^2$, $dd = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$, $aa - zz = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, $bb - cc + 2cz - zz$; équations qui ſe reduiſent à $2cz = aa - bb + cc$; $z = \frac{aa - bb + cc}{2c}$ que je nomme f, pour abreger; & je mets cette valeur de z dans l'équation $dd = aa - zz$, pour avoir $dd = aa - ff$, $d = \sqrt{aa - ff} = AD$, que je multiplie par $\frac{1}{2}BC$, $\frac{1}{2}c$; le produit eſt $\frac{2}{1}c\sqrt{aa - ff} = y$ aire du triangle. Ce qui ſuffit, ſi je ne veux reſoudre le Problême que par rapport au triangle donné ABC, puiſque f renferme l'expreſſion des trois côtez.

3. Mais s'il faut faire une formule generale pour toute ſorte de triangles, & faire ſervir cette ſolution particuliere pour un exemple qui ſerve à la reſolution de tout autre triangle; de ſorte que les lettres a, b, c, qui ſignifient ici les côtez determinez AB, AC, BC, repreſentent les trois côtez de toute ſorte de triangles; & que d qui ne ſignifie maintenant que la perpendiculaire AD, repreſente la perpendiculaire abaiſſée ſur le côté d'un triangle quelconque: dans l'équation $y = \frac{1}{2}c\sqrt{aa - ff}$ je remets pour ff ſa valeur $\frac{a^4 - 2aabb + 2aacc + b^4 - 2bbcc + c^4}{4cc}$, ce qui donne $y = \frac{1}{2}c\sqrt{aa - \frac{a^4 + 2aabb - 2aacc - b^4 + 2bbcc - c^4}{4cc}} = \frac{1}{4}\sqrt{2aacc - a^4 + 2aabb - b^4 + 2bbcc - c^4}$, formule generale pour toute ſorte de triangles rectilignes.

REGLE XII.

NOn ſeulement on peut ſuppoſer que quelque quantité eſt égale à zero, ou nulle dans une équation, comme nous l'avons fait dans le Problême XII. mais encore on peut ſuppoſer qu'une quantité y eſt infinie, les autres reſtant finies.

1. Le terme dans lequel la quantité infinie multiplie, eſt infini; ce qui s'entend du numerateur, lorſque le terme eſt une fraction; car le rectan-

gle, dont un côté fini eſt multiplié par un autre côté infini, eſt un rectangle infiniment étendu. Les termes de l'équation, où cette quantité infinie ne ſe trouve pas, ſont finis, & on les efface : parceque le fini comparé avec l'infini eſt nul ou zero.

FIG. 22. Soit Problême XII. Fig. 22. FK, c infinie, l'équation $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2bb + 2cp}$ ſe reduit à $x = \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2cp}$, & cette valeur infinie de x prouve que ſi le point F étoit élevé à une diſtance infinie, la ligne AD ne couperoit la parabole qu'à une diſtance infinie.

Soit l'équation $yy + bb = 2ax - xy$, dans laquelle on ſuppoſe x infinie; elle ſe reduit à $o = 2ax - xy$, & diviſant par x, $2a - y = o$, $y = 2a$. Ce qui marque, que y eſt $2a$, lorſque x eſt infinie.

2. Les équations telles, que $yy = 2ax + xx$, ne peuvent pas convenir à tous les points de leur courbe, à moins que l'une augmentant l'autre n'augmente auſſi; & que l'une diminuant, l'autre ne diminuë encore. Ainſi dés que vous ſuppoſerez l'une des deux infinie ou zero, ſa coordonnée ſera au même point infinie ou zero.

3. Les équations telles que $xy = ab$, ne ſçauroient convenir à tous les points de leurs courbes, à moins que l'une croiſſant, l'autre ne decroiſſe, & mutuellement : car ſans cela l'égalité ne ſubſiſtera pas. Ayant mis l'équation ſous cette forme $y = \frac{ab}{x}$; ſi l'on ſuppoſe x infinie, y eſt zero; parceque ſa valeur $\frac{ab}{x} = o$; car une fraction, dont le dominateur eſt infini, devient infiniment petite ou nulle. Si l'on ſuppoſe $x = o$, y eſt infiniment grande, parceque ſa valeur $\frac{ab}{x}$ eſt telle; car une fraction, dont le denominateur eſt zero, devient infiniment grande. C'eſt ce qui ſera expliqué plus au long, L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Regle IV. Et c'eſt ce qui arrive à l'hyperbole entre ſes aſymptotes : car y eſt zero au point infiniment éloigné, ou x eſt infinie, & y eſt infinie au ſommet des aſymptotes, ou $x = o$.

4. L'équation $yy = 2ax - xx$ au cercle étant propoſée; ſoit 1° $x = o$; il reſte $yy = o$, $y = o$; ce qui prouve qu'au ſommet, ou $x = o$, on a auſſi $y = o$. Soit 2° $y = o$; il reſte $o = 2ax - xx$, qui peut ſe diviſer par $x = o$, & il reſte $2a - x = o$, qui donne $x = 2a$: D'où l'on conclut, qu'il y a deux valeurs de x, qui répondent à $y = o$; & qu'à l'un des ſommets, où $x = o$, on a auſſi $y = o$; & qu'à l'autre ſommet, où $x = 2a$ le diametre, on a encore $y = o$; c'eſt-à-dire, qu'aux deux extrêmitez du diametre, il n'y a point d'appliquée, & que la courbe eſt fermée.

5. On peut ſuppoſer $x = \infty$ dans l'équation $yy = 2ax + xx$, & on ne le peut pas dans l'équation $yy = 2ax - xx$. Cette difference ſe connoît, parceque quelque valeur que vous donniez à x dans la premiere, y aura toûjours une valeur réelle : au lieu que dans la ſeconde, dès que vous ferez x negative, ou plus grande que $2a$, y aura une valeur imaginaire.

PARTIE SECONDE.

Methode pour resoudre les Problêmes de la Geometrie ordinaire, ou les Problêmes plans.

M. DESCARTES.

ET que si elle peut être resoluë par la Geometrie ordinaire, c'est-à-dire, en ne se servant que de lignes droites & circulaires tracées sur une superficie plate, lorsque la derniere équation aura été entierement demêlée, il n'y restera tout au plus qu'un quarré inconnu égal à ce qui se produit de l'Addition, ou Soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connuë, & de quelqu'autre quantité aussi connuë. *Quels sont les Problêmes plans.*

Et lors cette racine ou ligne inconnuë se trouve aisément. Car si j'ai par exemple $z^2 = az + bb$, je fais Fig. 24. le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b racine quarré de la quantité connuë bb, & l'autre LN, est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connuë, qui étoit multipliée par z, que je suppose être la ligne inconnuë. Puis prolongeant MN la base de ce triangle jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. *Comment ils se resolvent.* FIG. 24.

Que si j'ai $yy = -ay + bb$, & que y soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, & de sa base MN j'ôte NP égale à NL, & le reste PM est y la racine cherchée. De façon que j'ai $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de même si j'avois $x^4 = -ax^2 + b^2$, PM seroit x^2, & j'aurois $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.

Enfin si j'ai $z^2 = az - bb$, je fais NL Fig. 25. égale à $\frac{1}{2}a$, & LM égale à b comme devant, puis au lieu de joindre les points M, N, je tire MQR parallele à LN, & du centre N par L ayant décrit un cercle, qui la coupe aux points Q & R, la ligne cherchée z est MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons à sçavoir $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et si le cer- FIG. 25.

FIG. 25. cle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne coupe, ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut aſſurer, que la conſtruction du Problême propoſé eſt impoſſible.

Au reſte ces mêmes racines ſe peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, & j'ai ſeulement voulu mettre ceux-ci, comme fort ſimples, afin de faire voir qu'on peut conſtruire tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire, ſans faire autre choſe, que le peu, qui eſt compris dans les qûatre Figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les Anciens ayent remarqué; car autrement ils n'euſſent pas pris la peine d'en écrire tant de gros Livres, où le ſeul ordre de leurs Propoſitions nous fait connoître, qu'ils n'ont point eu la vraye Methode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont ſeulement ramaſſé celles, qu'ils ont rencontrées.

M. DESCARTES appelle Geometrie ordinaire celle, qui dans la reſolution de ſes Problêmes, ne ſe ſert que de la regle & du compas, il l'appelle encore * ailleurs Geometrie ſimple. Les Problêmes plans ſont ceux dans la reſolution & dans la conſtruction deſquels on ne ſe ſert que de lignes droites ou circulaires, ſeparément ou enſemble. Ainſi les Problêmes plans regardent la Geometrie ordinaire. 1. L'on expliquera la reſolution des Problêmes, que l'on vient de rapporter. 2. L'on donnera une autre maniere de les reſoudre. 3. L'on examinera, ſi tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire ſe peuvent conſtruire par ce qui a été dit juſqu'à preſent dans cet Ouvrage.

* Liv. 1. Part. 3. Sect. 2.

ARTICLE I.

Explication de la Reſolution des Problêmes, que l'on vient de rapporter.

IL faut expliquer en premier lieu l'operation de l'Algebre en lettres, en ſecond lieu celle de la Geometrie en lignes.

1. Lorſque vous êtes arrivé à la fin du calcul, ſi le Problême eſt plan, vôtre derniere équation eſt une de celles, que renferme cette formule generale $zz = \pm az \pm bb$. En ſuppoſant que le ſecond terme peut être nul, vôtre derniere équation ſera une ces ſix. $zz = bb$, $zz = -bb$; $zz = az + bb$, $zz = -az + bb$, $zz = az - bb$, $zz = -az - bb$. Mʳ DESCARTES ne fait aucune mention des deux premieres, parce que la premiere par l'extraction de racine devient $z = b$, qui eſt trop facile; la ſeconde eſt imaginaire & impoſſible; ni de la derniere, parce qu'elle n'a

n'a que des racines fausses, & qu'il ne propose ici, même dans les trois équations qu'il a examinées, que des racines vrayes. En effet, comme on l'a dit, Part. 1. Sect. 4. Regl. X. Il n'y a jamais qu'une racine que l'on cherche, & qui donne la solution exacte du Problême; & c'est une racine vraye. En supposant que le troisiéme terme composé seulement de quantitez connuës soit nul, vôtre derniere équation sera $zz = \pm az$, qui étant divisée par z, deviendra $z = \pm a$, qui est trop facile, pour que M. DESCARTES en parle.

Pour les autres équations, où les trois termes se trouvent $zz = \pm az \pm bb$, vous ordonnerez ainsi les termes $zz \pm az = \pm bb$; vous ajoûterez de chaque côté $\frac{1}{4}aa$, quarré de $\frac{1}{2}a$, qui est la moitié de la quantité connuë a, qui multiplie l'inconnuë z dans le second terme az; vous aurez $zz \pm az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa \pm bb$, dont le premier membre est un quarré parfait. Vous extrairez la racine quarrée des deux membres $\pm z \pm \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm bb}$. Vous ne laissez que $+ z$ dans l'un des côtez, sa valeur sera $z = \pm \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm bb}$, comme on va le voir en particulier.

Soit proposée l'équation $zz = az + bb$. j'ordonne les termes $zz - az = bb$; je mets $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$, qui a deux racines.

La premiere est $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $z - \frac{1}{2}a$ multipliant $z - \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$; & l'on a, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Soit $a = 12$, $\frac{1}{2}a = 6$, $b = 8$. z sera $= 6 + \sqrt{36 + 64} = 6 + \sqrt{100} = 6 + 10 = 16$.

La seconde racine est $- z + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $- z + \frac{1}{2}a$ multipliant $- z + \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$; & l'on a $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. $z = 6 - \sqrt{36 + 64} = 6 - \sqrt{100} = 6 - 10 = - 4$.

Les deux racines s'expriment ainsi $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; la premiere $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ est vraye, la seconde $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ est fausse, parceque la partie negative $- \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ est plus grande que la positive $\frac{1}{2}a$; car si vous les quarrez, c'est $\frac{1}{4}aa + bb$ d'un côté, & de l'autre $\frac{1}{4}aa$. Or si le premier quarré est plus grand que le second, la premiere racine est aussi plus grande que la seconde.

Soit proposée l'équation $yy = - ay + bb$, l'on fait de la même maniere $yy + ay = bb$, $yy + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$, qui a aussi deux racines.

La premiere est $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $y + \frac{1}{2}a$ multipliant $y + \frac{1}{2}a$ produit $yy + ay + \frac{1}{4}aa$. $y = - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; en nombres $y = - 6 + \sqrt{100} = - 6 + 10 = 4$.

La seconde racine est $- y - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $- y - \frac{1}{2}a$ multipliant $- y - \frac{1}{2}a$ produit $yy + ay + \frac{1}{4}aa$. $y = - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. En nombres $y = - 6 - \sqrt{100} = - 16$.

Les deux racines s'expriment de cette façon $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

La premiere $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ est vraye, parceque la partie positive $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ est plus grande que la negative $\frac{1}{2}a$; car si on les quarre, c'est $\frac{1}{4}aa + bb$ & $\frac{1}{4}aa$. La seconde $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ est fausse.

Soit proposée l'équation $zz = az - bb$. L'on doit faire $zz - az = -bb$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, qui a deux racines.

La premiere est $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, parceque $z - \frac{1}{2}a$ multipliant $z - \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$. $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres soit $a = 20$, $\frac{1}{2}a = 10$, $b = 6$. $z = 10 + \sqrt{100 - 36} = 10 + \sqrt{64} = 10 + 8 = 18$.

La seconde racine est $-z + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, parceque $-z + \frac{1}{2}a$ multipliant $-z + \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$. $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres $z = 10 - \sqrt{64} = 10 - 8 = 2$.

Les deux racines s'expriment ainsi $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Elles sont toutes deux vrayes, lorsque $\frac{1}{2}a$ est plus grand que b; comme on vient de le montrer dans les exemples, que l'on a rapporté en nombres.

Mais si $\frac{1}{2}a$ est plus petit que b les deux racines seront imaginaires, car ce qui se trouve sous le signe radical dans $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ est negatif, soit en nombres $\frac{1}{2}a$, 6; b; 10; $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ sera $z = 6 \pm \sqrt{-64}$.

Lorsque $\frac{1}{2}a = b$, ce qui est sous le signe radical sera nul, & $z = \frac{1}{2}a$. Et l'équation aura deux racines vrayes, & égales.

Soit proposée l'équation $yy = -ay - bb$; $yy + ay = -bb$; $yy + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$.

La premiere racine est $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres soit $\frac{1}{2}a$, 10; b, 8. $y = -10 + \sqrt{100 - 64} = -10 + \sqrt{36} = -10 + 6 = -4$.

La seconde racine est $-y - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres $y = -10 - 6 = -16$.

Les deux racines s'expriment ainsi, $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Elles sont toutes deux fausses, parce que $\frac{1}{2}a$ qui est negatif est plus grand que $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ dans $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Pour l'autre $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, elle est évidemment fausse. Que si $\frac{1}{2}a$ est moindre que b, elles sont encore imaginaires. Mais lorsque $\frac{1}{2}a = b$, elles sont toutes deux égales & se reduisent à $y = -\frac{1}{2}a$.

L'on opere sur l'équation $x^4 = -axx + bb$, comme l'on a fait sur les équations, où x ne montoit qu'au quarré. Ainsi après l'avoir disposé de la sorte $x^4 + axx = bb$, il faut ajoûter $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, ce qui donne $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$; & extraire les deux racines quarrées.

La premiere qui est vraye, sera $xx + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque

$xx + \frac{1}{2}a$ multipliant $xx + \frac{1}{2}a$, produit $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa$; ensuite l'on écrit $xx = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & si l'on extrait encore la racine quarrée de chaque membre, l'on aura $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Soit $\frac{1}{2}a = 6$, $b = 8$. $x = \sqrt{-6 + \sqrt{36 + 64}} = \sqrt{-6 + \sqrt{100}} = \sqrt{-6 + 10} = \sqrt{4} = 2$. La seconde racine, qui est fausse, sera $-xx - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $xx = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. $x = \sqrt{-6 - \sqrt{100}} = \sqrt{-6 - 10} = \sqrt{-16}$, qui est encore imaginaire. Les deux racines s'expriment ainsi $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. on auroit pu en trouver quatre $x \pm \sqrt{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$, parce que les racines du quarré xx sont $\pm x$.

L'on extrait les racines de toutes les équations, lorsque les exposans des trois termes sont en proportion continuë arithmetique dont un est zero ; mais les racines ne sont pas toûjours toutes quarrées. Soit proposée l'équation $x^6 - 2ax^3 = bb$, les exposans des termes sont $6, 3, 0$, en proportion arithmetique continuë, puisque le double du terme moyen est égal à la somme des extrêmes. Ajoûtez aa dans les deux membres, vous ferez $x^6 - 2ax^3 + aa = aa + bb$, dont la premiere racine quarrée est $x^3 - a = \sqrt{aa + bb}$, parceque $x^3 - a$ multipliant $x^3 - a$ produit $x^6 - 2ax^3 + aa$, $x^3 = a + \sqrt{aa + bb}$, dont vous pouvez encore extraire la racine cubique $x = \sqrt{C.\, a + \sqrt{aa + bb}}$.

La seconde racine quarrée de $x^6 - 2ax^3 + aa = aa + bb$, est $-x^3 + a = \sqrt{aa + bb}$, $x^3 = a - \sqrt{aa + bb}$, & la racine cubique $x = \sqrt{C.\, a - \sqrt{aa + bb}}$.

Les deux racines seront $x = \sqrt{C.\, a \pm \sqrt{aa + bb}}$. Mais cette racine ne peut pas se connoître par la regle & le compas seulement ; ainsi le Problême n'est pas plan. Il l'auroit été, si l'on avoit pu extraire la racine quarrée de $x^3 - a = \sqrt{aa + bb}$. V. L. 3. Part. 3. Sect. 3. Art. 1. n. 2.

La Methode pour resoudre les équations quarrées, de laquelle on vient de parler, demande que toutes les grandeurs, qui multiplient au second terme l'inconnuë, dont on cherche la valeur, soient exprimées par une seule lettre connuë, & que toutes les grandeurs, qui ne multiplient pas l'inconnuë, & qui composent le troisiéme terme, soient exprimées par un quarré connu. C'est pourquoi lorsqu'il y a plusieurs seconds ou troisiémes termes, dans lesquels ils se trouve des inconnuës : comme dans l'équation $zz = 2cdz - cxz - abc + cdx$.

L'on commence par determiner l'indeterminée x à representer une quantité arbitraire g ; ce qui reduit l'équation à n'avoir que z d'inconnuë, & c'est $zz = 2cdz - cgz - abc + cdg$: Ensuite l'on cherche $+f = +2cd - cg$, si $2cd$ est plus grand que cg, $2d$ plus grand que g ; ou

$-f$, si $2d$ est moindre que g ; l'on cherche aussi $+bb$ ou $-bb=-abc+cdg$, selon que cdg est plus grand ou moindre que abc. Alors l'équation proposée est reduite à $zz=\pm gz\pm bb$, & elle est telle que M. DESCARTES la demande.

2. Aprés avoir montré comment l'Algebre donne les racines des équations quarrées, voyons comment la Geometrie les peut exprimer en lignes pour resoudre les Problêmes plans.

La racine vraye $z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ de l'équation $zz=az+bb$ se trouve de cette sorte Fig. 24. Faites le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b, le côté $NL=\frac{1}{2}a$; & dont la ligne NM est la base : ensuite du point N comme centre, de l'intervale NL décrivez le cercle LPO, & prolongez MN en O. La ligne MO est z.

FIG. 24.

Dém. $\overline{MN}^2=\overline{NL}^2+\overline{LM}^2$, $\frac{1}{4}aa+bb$, & $MN=\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$. $NO=NL$, $\frac{1}{2}a$: donc la toute $MO=NO+NM$, $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}=z$. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine fausse $z=\frac{1}{4}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ de la même équation $zz=az+bb$ se trouvera aisément. Il faut sur MN couper $MH=NL$, $\frac{1}{2}a$; & aprés avoir prolongé NM du côté de K, prendre $HK=NM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$. La ligne MK est z.

Dém. MK est $+MH-HK$, $+\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}=z$. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine vraye $y=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ de l'équation, $yy=-ay+bb$ se trouve comme la vraye $z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ excepté que l'on ne prolonge pas MN en O. La ligne MP est y.

Dém. MP est $MN-NP$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}-\frac{1}{2}a=y$. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine fausse $y=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ de l'équation $yy=-ay+bb$ se trouve en prenant $MF=NL$, $FG=MN$, la ligne MG est y.

Dém. $MG=MF+FG$, $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}=y$: car les quantitez qui ont été prises en allant de M vers O étant positives ; celles qui se prennent de l'autre côté en allant vers G, sont negatives. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la racine fausse $y=MG$ est égale à la racine vraye $z=MO$, puisque on a pris $MF=NL=NO$, & $FG=MN$. La racine fausse $z=MK$ est aussi égale à la racine vraye $y=MP$: car $MP=MN-NP$, & MK est la ligne $HK=MN$, dont on a retranché $MH=NP$.

La premiere racine vraye, qui s'appelle la plus grande vraye, $z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$ de l'équation $zz=az-bb$ se trouve de cette maniere Fig. 25. Soit $NL=\frac{1}{2}a$, $LM=b$, l'angle NLM droit ; tirez l'infinie

FIG. 25.

MR parallele à NL, l'angle LMR est aussi droit 29. 1. Eucl. Du point N comme centre & de l'intervale NL decrivez le cercle LQR, qui coupe la droite MR aux points Q, R. Joignez NQ, & menez NP perpendiculaire sur MR. La ligne MR est z. FIG. 25.

Dém. 34. 1. Eucl. $NP = LM$, b; $PM = NL$, $\frac{1}{2}a$; $NQ = NL$, $\frac{1}{2}a$. Et 3. 3. Eucl. $PQ = PR$. Maintenant dans le triangle NPQ rectangle en P, $\overline{PQ}^2 = \overline{NQ}^2 - \overline{NP}^2$, $\frac{1}{4}aa - bb$, & PQ, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = PR$: donc $MR = MP + PR$, $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

La seconde racine vraye, qui s'appelle la plus petite vraye, $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de la même équation $zz = az - bb$, est MQ.

Dém. $MQ = MP - PQ$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorsque $\frac{1}{2}a = b$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = o$, les deux racines vrayes & égales sont $z = \frac{1}{2}a$, dont on connoît d'abord la valeur. Mais il faut montrer, que si on vouloit la chercher dans cette figure, la ligne qui l'exprimeroit toucheroit le cercle. Pour cela faites Lm, $b = NL$, $\frac{1}{2}a$, & le cercle LQR étant décrit, tirez Np parallele à Lm; Np sera rayon du cercle, égale au rayon NL & à la ligne Lm. Joignez mp, elle est $z = \frac{1}{2}a$ & touchante du cercle en p.

Dém. Les lignes Lm, Np sont paralleles & égales: dont 33. 1. Eucl. Les lignes NL, mp sont aussi paralleles & égales; donc $mp = \frac{1}{2}a$. De plus dans le parallelogramme $NLmp$ l'angle NLm est droit: donc 34. 1. Eucl. l'angle mpN est aussi droit; & 16. 3. Eucl. mp est touchante en p. Ce qu'il falloit démontrer.

Quand NL, $\frac{1}{2}a$ est moindre que LG, b; la parallele GH ne touchera, ni ne coupera pas le cercle, & rien ne determinera la valeur de z sur la ligne GH. Ainsi l'on voit que la figure de la Geometrie nous avertiroit de l'impossibilité du Problême, si nous ne nous en étions pas apperçus par l'examen de l'équation Algebrique.

Si l'on prolongeoit la ligne RM vers S, & que l'on prît une ligne égale à MR; l'on auroit la plus grande racine fausse $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de l'équation $yy = -ay - bb$. Et si l'on prenoit une ligne égale à MQ; elle seroit la plus petite racine fausse $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de la même équation.

Lorsque les deux racines sont $y = -\frac{1}{2}a$, la ligne sera égale à mp; lorsque $\frac{1}{2}a$ sera moindre que b, la ligne MS ne touchera, ni ne coupera le cercle.

Les racines $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de l'équation $yy = -ay - bb$ sont les mêmes lignes que les precedentes: mais comme elles sont toutes

FIG. 25. deux fausses, il les faut prendre de l'autre côté du point *M*. M. DESCARTES n'en parle point, parce que les racines fausses ne donnent pas une solutiou exacte du Problême.

La racine $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ de l'équation $x^4 = -ax^2 + bb$ se trouvera Fig. 7. si je prens $GH = MP$ Fig. 24. $= -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & qu'après lui avoir ajoûté $GF = \frac{1}{2}a$, que je prens pour l'unité, je décrive sur le diametre *FH* le demi-cercle *FIH*. Car la perpendiculaire *IG* est *x*.

Dém. 13. 6. Eucl. *IG* est moyenne proportionelle entre l'unité *FG*, $\frac{1}{2}a$, & le quarré *GH*, $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = xx$: Mais la racine *x* est moyenne proportionelle entre l'unité & son quarré xx; car $1 : x :: x : \frac{xx}{1} = xx$: donc la ligne *IG* est *x*. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 24. L'on pourroit Fig. 24. décrire un cercle sur le diametre *NM*, & élever au point *P* une perpendiculaire jusqu'à la circonference : cette perpendiculaire seroit *x*.

Pour ce qui regarde $x = \sqrt{C.\, \overline{a + \sqrt{aa + bb}}}$, racine de $x^6 - 2ax^3 = bb$, il faut extraire une racine cubique ; c'est ce qu'on fera L. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 1.

Si dans toutes ces équations il y avoit le plan cd, au lieu du quarré bb : vous prendriez une moyenne proportionelle entre c & d, laquelle vous nommeriez b ; & vous auriez $c : b :: b : d$, & $cd = bb$. Il ne resteroit plus qu'à substituer bb à la place de cd.

Si au lieu de bb, il y avoit seulement c : vous prendriez une moyenne proportionnelle entre $\frac{1}{2}a$, que nous avons supposée être l'unité, & c ; pour avoir $1 : b :: b : c$, & $c = bb$.

ARTICLE II.

Autres manieres de resoudre les Problêmes plans.

L'Algebre & la Geometrie fournissent également d'autres methodes pour resoudre les Problêmes plans.

1. M. DESCARTES donne L. 3. Part. 2. Sect. 2. Art. 3. une regle pour transformer les équations de toutes sortes de degrez par l'évanoüissement du second terme. Cette regle peut s'appliquer aux équations du second degré de cette sorte.

Soit proposée l'équation $zz = az + bb$, ou $zz - az = bb$. L'on joint l'inconnuë z avec la moitié de la quantité connuë a, qui multiplie l'inconnuë z au second terme, & l'on donne à cette moitié le signe, qu'elle a dans l'équation ainsi ordonnée $zz - az = bb$: ainsi l'on prend ici $z - \frac{1}{2}a$, que l'on égale à une nouvelle inconnuë x ; c'est $z - \frac{1}{2}a = x$, $x + \frac{1}{2}a = z$. Ensuite l'on substituë dans l'équation pro-

posée, à la place de zz, sa nouvelle valeur $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ quarré de $x + \frac{1}{2}a = z$; & à la place de z sa valeur $x + \frac{1}{2}a$, de sorte que pour $-az$ l'on a $-ax - \frac{1}{2}aa$. L'on ajoûte les valeurs $xx + ax + \frac{1}{4}aa$, $-ax - \frac{1}{2}aa$, la somme est $xx - \frac{1}{4}aa = zz - az = bb$.

$$\begin{array}{rl} zz = & xx + ax + \frac{1}{4}aa \\ -az = & \quad\;\; -ax - \frac{1}{2}aa \\ \hline zz - az = & xx * - \frac{1}{4}aa = bb \end{array}$$

La transformée sera donc $xx - \frac{1}{4}aa = bb$; $xx = \frac{1}{4}aa + bb$; $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Maintenant je remets pour x sa valeur $z - \frac{1}{2}a$, pour avoir $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, comme on l'a trouvé Art. 1. n. 1.

Soit proposée l'équation $yy = -ay + bb$, ou $yy + ay = bb$. Vous ferez $y + \frac{1}{2}a = v$, $v - \frac{1}{2}a = y$; vous substituerez dans l'équation proposée à la place de yy sa valeur $vv - av + \frac{1}{4}aa$; & à la place de y sa valeur $v - \frac{1}{2}a$; vous ajoûterez les valeurs $vv - av + \frac{1}{4}aa$, $+ av - \frac{1}{2}aa$, & vous aurez $vv - \frac{1}{4}aa = yy + ay = bb$. La transformée sera donc $vv - \frac{1}{4}aa = bb$; $vv = \frac{1}{4}aa + bb$; $v = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; remettez pour v sa valeur $y + \frac{1}{2}a$, vous trouverez $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Comme Art. 1. n. 1.

$$\begin{array}{rl} yy = & vv - av + \frac{1}{4}aa \\ +ay = & \quad\;\; + av - \frac{1}{2}aa \\ \hline yy + ay = & vv * - \frac{1}{4}aa = bb. \end{array}$$

Soit proposée l'équation $x^4 = -ax^2 + bb$, ou $x^4 + ax^2 = bb$, Nous ferons $xx + \frac{1}{2}a = z$, $z - \frac{1}{2}a = xx$. Nous mettrons $zz - az + \frac{1}{4}aa$ valeur de x^4 à sa place dans la proposée, & $+ az - \frac{1}{2}aa$. Valeur de $+ axx$. Nous ajoûterons les deux valeurs, la somme sera $zz - \frac{1}{4}aa = x^4 + axx = bb$. La transformée est donc $zz - \frac{1}{4}aa = bb$; $zz = \frac{1}{4}aa + bb$; $z = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nous remettrons pour z sa valeur $xx + \frac{1}{2}a$, & nous trouverons $xx + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; $xx = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Comme Art. 1. n. 1.

$$\begin{array}{rl} x^4 = & zz - az + \frac{1}{4}aa \\ +axx = & \quad\;\; + az - \frac{1}{2}aa \\ \hline x^4 + axx = & zz * - \frac{1}{4}aa \end{array}$$

2. L'équation $zz = az + bb$ peut se construire avec une hyperbole équilatere. Soit Fig. 99. AN, $\frac{1}{2}a = An$, & l'axe determiné Nn, a; Fig. 99. sur l'axe conjugué coupez $AD = b$; menez DC parallele à l'axe AB, & CB parallele & égale à AD. Je dis que nB est z. Car NB sera $nB - Nn$, $z - a$; & par la nature de l'hyperbole équilatere, $nB \times NB = \overline{CB}^2$, $zz - az = bb$, $zz = az + bb$.

NB est z pour l'équation $zz = -az + bb$, que je mets à la place de $yy = -ay + bb$. Car nB sera $nN + NB$, $z + a$; & par la nature de la même hyperbole, $nB \times NB = \overline{CB}^2$, $zz + az = bb$, $zz = -az + bb$.

FIG. 86. L'équation $zz = az - bb$ peut se construire avec le cercle Fig. 86. dont le rayon EA, $\frac{1}{2}a = Ae$, le diametre Ee, a, menez la tangente $EF = b$, FCc parallele au diametre Ee, & enfin les ordonnées CD, cd du même côté de l'axe, elles sont paralleles & égales à EF. Je dis 1° que eD est la plus grande valeur vraye de z. Car ED sera $Ee - eD$, $a - z$; & par la nature du cercle $eD \times ED = \overline{CD}^2$, $az - zz = bb$, $zz = az - bb$. 2° ed est la moindre valeur vraye de z, car Ed sera $Ee - ed$, $a - z$; & $ed \times Ed = \overline{cd}^2$, $az - zz = bb$, $zz = az - bb$.

De plus si l'on fait $\frac{1}{4}a : b :: b : c$, on aura $\frac{1}{4}ac = bb$; & substituant $\frac{1}{4}ac$ pour bb, les trois équations se construiront avec la parabole Fig. 79. FIG. 79. de laquelle $\frac{1}{2}a$ est le parametre, NK l'axe, sur lequel vous couperez $IN = \frac{1}{2}a$, $IK = \frac{1}{2}c$. Par la nature de la parabole $\overline{AI}^2 =$ le parametre $\frac{1}{2}a \times NI$, $\frac{1}{2}a = \frac{1}{4}aa$, ainsi on a encore AI, $\frac{1}{2}a = IE = BK = KF$; & $NK = NI + IK$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$.

CB est z pour l'équation $zz = az + \frac{1}{4}ac$. Car CK est $CB - BK$, $z - \frac{1}{2}a$, & par la nature de la parabole, $\overline{CK}^2 = \frac{1}{2}a \times NK$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ac$, $zz = az + \frac{1}{4}ac$.

CF est z pour l'équation $zz = -az + \frac{1}{4}ac$. Car CK est $CF + FK$, $z + \frac{1}{2}a$, & $\overline{CK}^2 = \frac{1}{2}a \times NK$, $zz + az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ac$, $zz = -az + \frac{1}{4}ac$.

L'équation $zz = az - \frac{1}{4}ac$ se construira dans l'espace ANE, dans lequel étant $NI = \frac{1}{2}a$, $Ik = \frac{1}{2}c$; on aura Nk, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$, & les deux fc, fc sont z. Car la plus grande fc étant z, Ck est $fc - fk$, $z - \frac{1}{2}a$, & par la nature de la parabole, $\overline{ck}^2 = \frac{1}{2}a \times Nk$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ac$, $zz = az - \frac{1}{4}ac$. La moindre fc étant z, ck est $fk - fc$, $\frac{1}{2}a - z$, & $\overline{ck}^2 = \frac{1}{2}a \times Nk$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ac$, $zz = az - \frac{1}{4}ac$. Lorsque $a = c$, l'équation est $zz - az + \frac{1}{4}aa = 0$, & les deux valeurs de z sont égales à $\frac{1}{2}a$. Lorsque $c > a$, l'équation devient $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ac}$ racine imaginaire, en effet Ik, $\frac{1}{2}c$ étant plus grande que IN, $\frac{1}{2}a$, le point k tombe au delà du sommet N dehors de la parabole, où il ne peut y avoir de valeur pour z, puisqu'il n'y a point là d'ordonnée.

3. La Methode que nous mettons ici pour trouver les lignes, qui soient les racines des Problêmes plans; n'exige pas, comme celle de M. DESCARTES, Art. 1. n. 2. que le dernier terme de l'équation soit un quarré connu bb; mais soit qu'il y ait un quarré connu bb, ou un plan connu bc, l'on trouvera également la racine cherchée.

FIG. 26. 27. Il faut auparavant prouver ce Theorême, Fig. 26. 27. Si les cercles concentriques ABC, GEF sont coupez par une ligne droite quelconque GH; l'on aura $AG = BH$, $GB = AH$.

Dém. 1° Que la ligne GH passe par le centre commun D Fig. 27. $DG = DH$ dans le cercle GEF; $DA = DB$ dans le cercle ABC: donc

Axiom.

Axiom. 3. L. 1. Eucl. $AG = BH$; & Axiom. 2. L. 1. Eucl. $GB = AH$. FIG. 26. 27.
2° Que la ligne BH Fig. 26. ne passe pas par le centre commun D. De ce centre D tirez DI perpendiculaire sur BH. 3. 3. Eucl. $IG = IH$ dans le cercle GEF, $IA = IB$ dans le cercle ABC : donc Axiom. 3. 1. Eucl. $AG = BH$; & Axiom. 2. 1. Eucl. $GB = AH$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit proposée l'équation $zz - az = bc$. Tirez Fig. 26. les infinies EF, HG faisant un angle quelconque FAH. Sur une des lignes GH coupez $AB = a$, & sur l'autre EF prenez $AF = b$; $FC = c$. Faites par la 25. 3. Eucl. passer un cercle ABC par les trois points A, B, C, dont le centre soit D : de ce centre & de l'intervale DF décrivez le cercle concentrique GEF. Je dis que AH est la racine positive z, & AG la negative $-z$.

Dém. L'on a $EA = CF$, c; soit AH, $z = GB$; l'on aura $AG = GB - AB$; $z - a$. & 35. 3. Eucl. $AH \times AG = AF \times AE$, $zz - az = bc$. Soit maintenant AG, $-z = BH$; l'on aura $AH = AB + BH$, $a - z$. Et $AG \times AH = AF \times AE$, $-az + zz = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit proposée l'équation $zz - az = bb$. Après avoir tiré Fig. 27. les infinies AB, EF perpendiculaires l'une à l'autre. Vous ferez $AE = AF$, b; AB, a; vous diviserez AB en deux parties égales au point D; & de D comme centre vous décrirez à l'intervale DA le cercle ABC; & à l'intervale DE le cercle DEF. Le cercle interieur passe par B, car $DB = DA$; le cercle exterieur passe par F, car 3. 3. Eucl. $AF = AE$, & les triangles DAE, DAF ont les angles en A égaux, les côtez AE, AF égaux, AD commun : donc $DE = DF$, qui seront deux rayons du même cercle. Je dis que AH est $+z$; & AG, $-z$.

Dém. soit AH, $z = BG$; AG sera $BG - AB$, $z - a$. Et 35. 3. Eucl. $AH \times AG = AE \times AF$, $zz - az = bb$. Soit AG, $-z = BH$; AH sera $AB + BH$, $a - z$; & $AG \times AH = AE \times AF$, $-az + zz = bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit proposée l'équation $yy + ay = bc$. Je dis que Fig. 26. AG est la racine vraye $+y$; & AH la fausse $-y$.

Dém. Soit AG, $+y = BH$; AH sera $AB + BH$, $a + y$. Et $AG \times AH = AF \times AE$, $ay + yy = bc$. Soit à present AH, $-y = BG$; AG est $BG - BA$, $-y - a$. Et $AH \times AG = AF \times AE$, $yy + ay = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit proposée l'équation $yy + ay = bb$. Je dis que Fig. 27. AG est la racine positive $+y$; & AH la negative $-y$.

Dém. Soit AG, $+y = BH$, AH sera $AB + BH$, $a + y$. Et $AG \times AH = AE \times AF$, $ay + yy = bb$. Soit AH, $-y = BG$; AG sera $BG - BA$, $-y - a$. Et $AH \times AG = AE \times AF$, $yy + ay = bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit proposée l'équation $zz - az = -bc$. Tirons Fig. 28. les infinies FIG. 28.

FIG. 28. AB, AC faiſant un angle quelconque BAC, ſur l'une des lignes prenons $AB = a$; & ſur l'autre $AF = b$; $FC = c$. Enſuite 25. 3. Eucl. décrivons un cercle par les trois points A, B, C, dont le centre ſoit D ; & du même centre & de l'intervale DF, le cercle EHF. Je dis que AH eſt la plus grande racine vraye z ; & AG la plus petite racine vraye z. L'on a $AE = FC$, c.

Dém. Soit AH, z ; BH eſt $AB - AH$, $a - z = AG$. Et les rectangles $AH \times AG$, $AF \times AE$ étant 36. 3. Eucl. égaux au quarré d'une même tangente, ſont auſſi égaux entr'eux. C'eſt-à-dire, en termes analytiques $az - zz = bc$; $zz - az = - bc$. Aprés cela ſoit AG, $z = BH$; AH ſera $AB - BH$, $a - z$. Et $AG \times AH = AF \times AE$, $az - zz = bc$; $zz - az = - bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 29. Soit propoſée l'équation $zz - az = - bb$, étant $\frac{1}{2}a$ plus grand que b. Au point C de la ligne $AC = b$ Fig. 29. l'on éleve $CD = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ perpendiculaire à AC ; par les points A, D l'on tire la droite ADB, & l'on fait $DB = AD$. Du point D comme centre, de l'intervale DC l'on décrit le cercle CGH, & de l'intervale DA le cercle AB. Par la ſupp. le quarré de DC eſt $\frac{1}{4}aa - bb$ le quarré de AC eſt bb : mais le quarré de AD leur eſt égal, parceque l'angle ACD eſt droit : donc le quarré de AD eſt $\frac{1}{4}aa - bb + bb = \frac{1}{4}aa$, & $AD = \frac{1}{2}a = DB$, & $AB = a$. De plus 16. 3. Eucl. AC touche le cercle GCH en D. Je dis que AH eſt la plus grande racine vraye, z, & AG la plus petite vraye z.

Dém. Soit AH, z ; BH eſt $AB - AH$, $a - z = AG$. Et 36. 3. Eucl. $AG \times AH = \overline{AC}^2$, $az - zz = bb$; $zz - az = - bb$. Enſuite ſoit AG, $z = BH$; AH eſt $AB - BH$, $a - z$, & $AG \times AH$, $= \overline{AC}^2$, $az - zz = bb$; $zz - az = - bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 30. Lorſque $\frac{1}{2}a = b$; les lignes $AB = a$, $AC = b$ Fig. 30. font un angle quelconque BAC ; je diviſe AB en deux parties égales au point G ; à ce même point G j'éleve GD perpendiculaire à AB, & au point C la perpendiculaire CD ſur AC ; du point D, & de l'intervale DG je décris un cercle, qui paſſera par C ; puiſque ayant tiré DA, les triangles DAG, DAC ont les côtez AG, $\frac{1}{2}a$, AC, b égaux ſupp. le côté AD commun, les angles en C & G droits : mais les quarrez $\overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GA}^2$ parcequ'ils ſont égaux à $\overline{DA}^2$: donc ôtant les quarrez égaux. $\overline{CA}^2$, $\overline{GA}^2$, il reſtera $\overline{CD}^2 = \overline{DG}^2$, & $CD = DG$. & le cercle paſſe par C. Je dis que AG eſt z, c'eſt-à-dire, les deux vrayes racines égales de l'équation.

Dém. Puiſque ſupp. $\frac{1}{2}a = b$, l'équation propoſée $zz - az = - bb$ ſe peut changer en $zz - 2bz + bb = 0$. Extrayez la racine quarrée $z - b = 0$; $z = b$; $zz = bb$. Mais le quarré de chacune des tangentes AG, AC. 36. 3. Eucl. ſont égaux à un même rectangle, ils ſont donc égaux entr'eux, & $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2$ $zz = bb$; $z = b = \frac{1}{2}a$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorsque $\frac{1}{2}a$ sera plus petit que b, la ligne AD, $\frac{1}{2}a$ Fig. 29. ne sera plus la base, ou le plus grand côté du triangle rectangle ACD, puisque le côté AC est b. De même Fig. 30. les lignes AG, $\frac{1}{2}a$; AC, b n'étant pas égales, elles ne toucheront plus toutes deux ensemble le cercle GC. Et la solution du Problême est impossible dans ces deux Figures. Fig. 29. Fig. 30.

Soit proposée l'équation $yy + ay = -bc$. Je dis que Fig. 28. AH est la plus grande racine fausse $-y$; & AG la plus petite fausse $-y$. Fig. 28.

Dém. Soit $AH - y$; BH est $AB - AH$, $a + y = AG$. Et 35. 3. Eucl. $AH \times AG = AF \times AE$, $-ay - yy = bc$; $yy + ay = -bc$. Soit maintenant AG, $-y = BH$; AH est $AB - BH$, $a + y$. Et $AH \times AG = AF \times AE$, $-ay - yy = bc$; $yy + ay = -bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit proposée l'équation $yy + ay = -bb$. Si $\frac{1}{2}a$ est plus grande que b, l'on trouvera Fig. 29. que AH est la plus grande racine fausse, & AG la plus petite, de la même façon que l'on a trouvé que AH étoit la plus grande racine vraye & AG la plus petite racine vraye de l'équation $zz - az = -bb$. Si $\frac{1}{2}a = b$, l'on trouvera Fig. 30. que AG est la double racine fausse, comme on a vû qu'elle étoit la double racine vraye égale de l'équation $zz - az = -bb$. Si $\frac{1}{2}a$ est plus petite que b, l'on prouvera que le Problême est impossible, comme on l'a montré pour l'équation $zz - az = -bb$. Fig. 29.

ARTICLE III.

Tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire peuvent se construire par les choses, que M. DESCARTES *a dit jusqu'à present.*

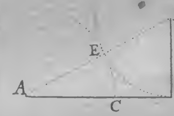
1. M. DESCARTES n'a parlé jusqu'à present, que de l'Addition, de la Soustraction, de la Multiplication, de la Division, de l'Extraction de la racine quarrée des lignes, & de la Resolution des Problêmes plans. Pour expliquer les Regles qu'il a données là-dessus, il n'a employé que quatre Figures, la 6e, la 7e, la 24e, & la 25e, qui ne sont composées, que de lignes droites & de circulaires; c'est-à-dire, qu'il ne s'est servi que de la Regle & du Compas.

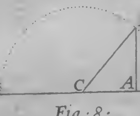
2. Tous les Problêmes, dont la derniere équation contient une inconnuë, qui n'a qu'une, ou deux dimensions, se peuvent resoudre par une ou plusieurs des operations, que l'on vient de rapporter. Car si 1° l'inconnuë a une seule dimension, l'équation sera une de celles-ci, $x = \pm a$, $x = \pm a \pm b$, $x = \pm \frac{a}{b}$, $x = \pm \frac{ab}{c}$; & un lieu à la ligne droite. $x = \frac{ab}{y}$ se reduit à $x = \frac{ab}{c}$, lorsque l'on a determiné l'inconnuë y à être une grandeur arbitraire & connuë c; Et le lieu à l'hyperbole entre ses asymptotes $x = \frac{ab}{y}$ se reduit à $x = \frac{ab}{c}$, lieu à la ligne droite. Or il est évident que toutes ces équations ne demandent autre chose qu'une addi-

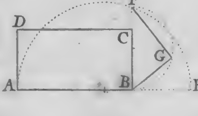
FIG. 28. tion, ou une ſouſtraction, ou une multiplication, ou une diviſion de lignes. Si 2° l'inconnuë a deux dimenſions; l'équation ſera une de celles qui ſont renfermées dans cette formule $xx = \pm ax \pm bb$, en ſuppoſant que le ſecond terme peut être évanoüi; les lieux Geometriques à la parabole, au cercle, à l'ellipſe, à l'hyperbole par rapport à ſes diametres ſe reduiſent à cette formule, après que l'on a determiné une des inconnuës, & que l'on a ſubſtitué, s'il eſt neceſſaire, un quarré connu à la place d'un plan auſſi connu. Car l'équation à la parabole $yy = ax$, ſi pour l'inconnuë x l'on ſubſtituë une connuë a, ou b, ſe reduit à celles-ci $yy = aa$, $yy = ab$. Or il eſt certain qu'il ne faut pour reſoudre ces deux équations, qu'extraire une racine quarrée, puiſque Fig. 7. ſi l'on prend la ligne $FG = a$ pour l'unité, & la ligne $GH = b$; la perpendiculaire GI ſera y racine quarrée de ab, comme on l'a montré, Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. Et la racine quarrée y ſera extraite de l'équation $yy = ab$. Il n'eſt pas neceſſaire de rièn dire de l'équation $yy = aa$, $y = a$. L'équation au cercle $yy = aa - xx$ ſe peut changer en $yy = aa - bb$, ſi $b = x$, & en prenant c moyenne proportionelle aux deux $a + b$, $a - b$, l'on aura, $a + b : c :: c : a - b$, $aa - bb = cc$, & c peut ſe trouver Fig. 7. Maintenant ſubſtituant cc pour $aa - bb$, l'équation $yy = aa - bb$ ſera $yy = cc$, $y = c$. Pour l'équation au cercle $yy = 2ax - xx$, $xx = 2ax - yy$, ſi pour y je mets d, elle ſera $xx = 2ax - dd$, qui eſt contenuë dans la formule $xx = \pm ax \pm bb$ des Problêmes plans. L'équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = aa - xx$, $xx = aa - \frac{d}{p}yy$, en déterminant y à être c, deviendra $xx = aa - \frac{ccd}{p}$, & prenant f moyenne proportionelle entre cc & $\frac{d}{p}$, $xx = aa - ff$; & prenant encore une moyenne proportionelle g entre $a + f$ & $a - f$; l'équation ſera $xx = gg$, $x = g$. L'équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$, $xx = 2ax - \frac{d}{p}yy$, en mettant ff pour $\frac{d}{p}yy$, ſe transformera en $xx = 2ax - ff$, qui eſt encore renfermée dans la formule $xx = \pm ax \pm bb$. Enfin parce que les équations à l'hyperbole par ſes diametres ne different des équations à l'ellipſe, que par les ſignes; l'on prouvera le même des premieres, que des ſecondes.

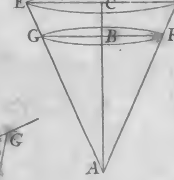
Et comme toutes les équations, dont l'inconnuë a une ou deux dimenſions, ſont celles, que nous venons de rapporter, il ſuit que ces équations où les Problêmes, dont elles ſont les dernieres équations, ſe peuvent tous conſtruire par les choſes que Mr DESCARTES a dit juſques à preſent, & pour leſquelles il n'a employé que quatre Figures.

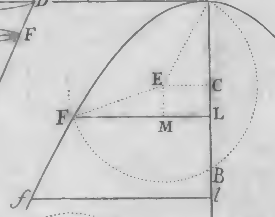
3. Mais ſont-ce là tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire? Les Geometres avant M. DESCARTES n'ont-ils pas traité des Sections Coniques, & ne s'en ſont-ils pas ſervi pour reſoudre & pour conſtruire des Problêmes? Ce que M. DESCARTES aſſure ici eſt pourtant vrai des Problêmes de la Geometrie ordinaire, en la prenant pour la Geometrie

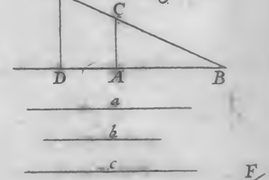

Fig. 1.

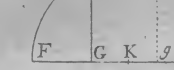

Fig. 2.


Fig. 3.


Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.

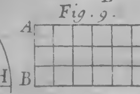
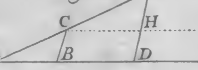

Fig. 8.


Fig. 9.


Fig. 10.

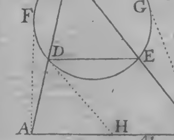
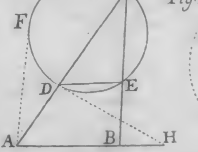
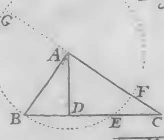
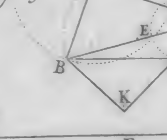

Fig. 11.


Fig. 12.


Fig. 13.


Fig. 14.


Fig. 15.

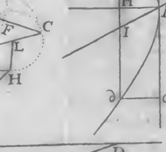
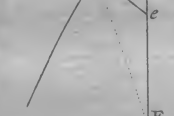
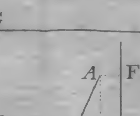
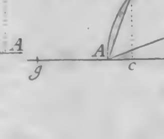
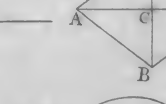

Fig. 16.

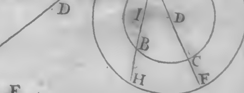

Fig. 17.


Fig. 18.




Fig. 20.


Fig. 21.


Fig. 26.

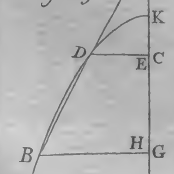

Fig. 23.


Fig. 22.

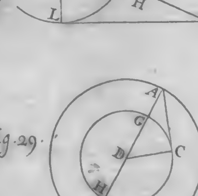
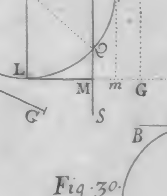
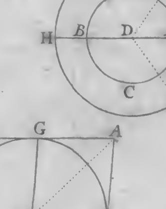

Fig. 24.


Fig. 29.


Fig. 25.


Fig. 27.

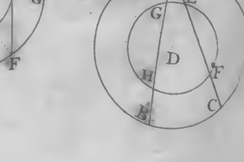
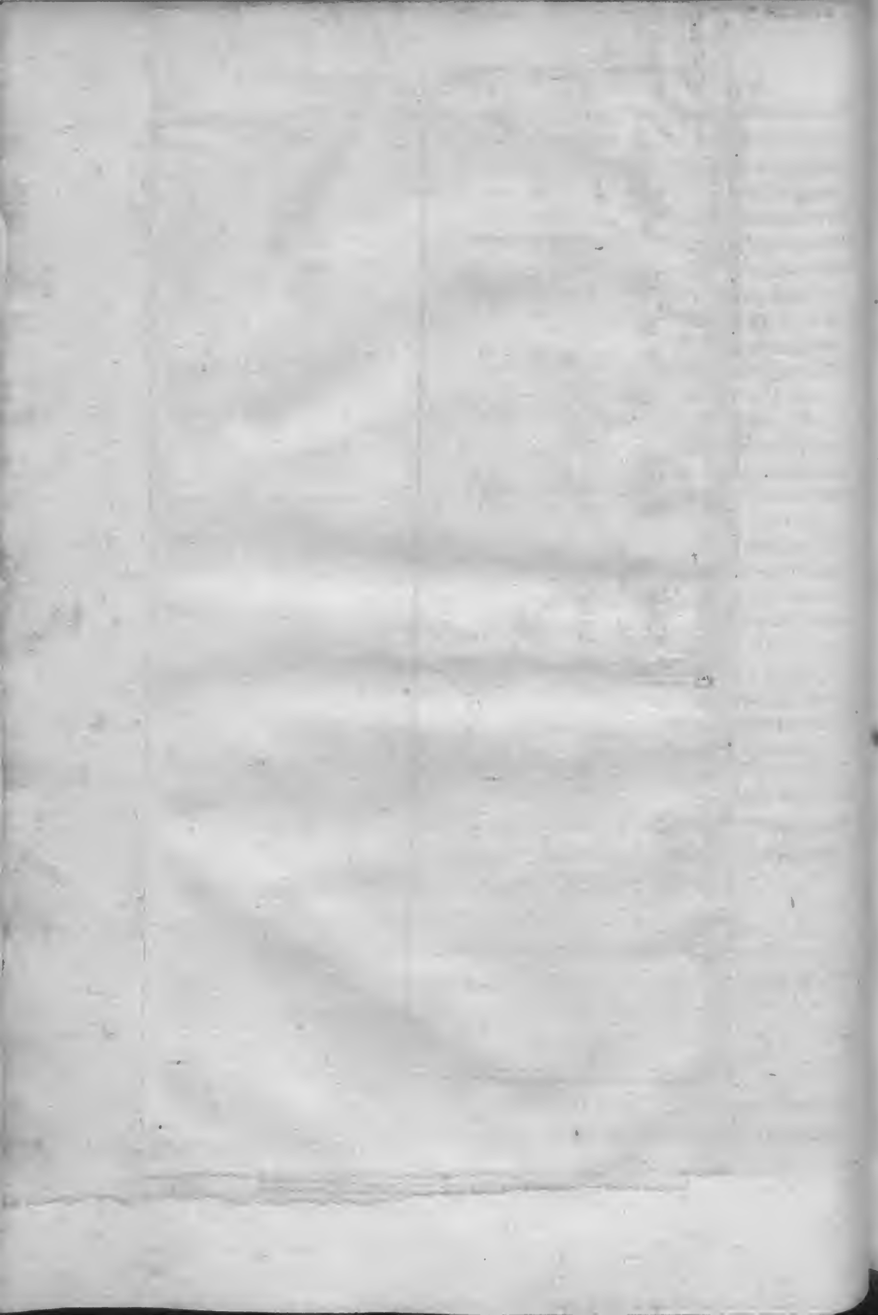
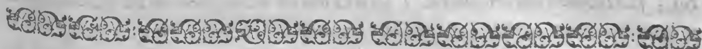

Fig. 28.


Fig. 30.

Foex Fecit.



des Anciens & de tous les Geometres qui l'ont precedé. Dont la raiſon eſt qu'avant M. DESCARTES on n'appelloit lignes Geometriques que la droite & la circulaire ; toute autre étoit méchanique ; les ſeuls Problêmes, pour la reſolution & pour la conſtruction deſquels on n'employoit que la ligne droite & le cercle, étoient reſous & conſtruits geometriquement, les autres l'étoient mechaniquement. En un mot la ſeule ſcience, qui n'employoit que la ligne droite & le cercle, la Regle & le Compas, étoit nommée Geometrie. Ceci ſera expliqué plus au long, L. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 2.



PARTIE TROISIE'ME.

Le commencement de la Queſtion de Pappus.

SECTION I.

La Queſtion de Pappus eſt propoſée.

M. DESCARTES.

ET on le peut voir auſſi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de ſon ſeptiéme Livre, ou après s'être arrêté quelque tems à denombrer tout ce qui avoit été écrit en Geometrie par ceux qui l'avoient precedé, il parle enfin d'une queſtion, qu'il dit que ni Euclide, ni Apollonius, ni aucun autre n'avoient ſçu entierement reſoudre, & voici ſes mots. *Exemple tiré de Pappus.*

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius : ſed neque paululùm quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Et un peu après il explique ainſi quelle eſt cette queſtion.

At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi: Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio

rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ : punctum contingit positione datum ſolidum locum , hoc eſt , unam ex tribus conicis Sectionibus. Et ſi ad quatuor rectas lineas poſitione datas in datis angulis lineæ ducantur ; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data ſit : ſimiliter punctum datam coni Sectionem poſitione continget. Siquidem igitur ad duas tantùm locus planus oſtenſus eſt. Quòd ſi ad plures quàm quatuor , punctum continget locos non adhuc cognitos , ſed lineas tantùm dictas ; quales autem ſint , vel quam habeant proprietatem , non conſtat : earum unam neque primam , & quæ manifeſtiſſima videtur , compoſuerunt oſtendentes utilem eſſe. Propoſitiones autem ipſarum hæ ſunt.

Si ab aliquo puncto ad poſitione datas rectas lineas quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis , & data ſit proportio ſolidi parallelepipedi rectanguli , quod tribus ductis lineis continetur , ad ſolidum parallelepipedum rectangulum , quod continetur reliquis duabus & datâ quâpiam lineâ, punctum poſitione datam lineam continget. Si autem ad ſex , & data ſit proportio ſolidi tribus lineis contenti ad ſolidum , quod tribus reliquis continetur ; rurſus punctum continget poſitione datam lineam. Quòd ſi ad plures quàm ſex , non adhuc habent dicere , an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur , quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus.

Où je vous prie de remarquer en paſſant , que le ſcrupule , que faiſoient les Anciens d'uſer des termes de l'Arithmetique en la Geometrie , qui ne pouvoit proceder , que de ce qu'ils ne voyoient pas aſſez clairement leur rapport, cauſoit beaucoup d'obſcurité & d'embarras en la façon , dont ils s'expliquoient. Car Pappus pourſuit en cette ſorte.

Acquieſcunt autem his , qui paulò ante talia interpretati ſunt , neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes quod his continetur.

Licebit autem per conjunctas proportiones hæc & dicere , & demonſtrare universè in dictis proportionibus , atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit proportio conjuncta ex eâ , quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram , & alia ad aliam , & reliqua ad datam lineam,

si sint septem ; si verò octo , & reliqua ad reliquam ; punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcunque sint impares vel pares multitudine , cùm hæc , ut dixi , loco ad quatuor lineas respondeant , nullum igitur posuerunt , ita ut linea nota sit , &c.

La question donc , qui avoit été commencée à resoudre par Euclide, & poursuivie par Apollonius , sans avoir été achevée par personne , étoit telle.

Ayant trois ou quatre ou plus grand nombre de lignes droites données par position ; premierement on demande un point, duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites , une sur chacune des données , qui fassent avec elles des angles donnez , & que le rectangle contenu en deux de celles, qui seront ainsi tirées d'un même point , ait la proportion donnée avec le quarré de la troisiéme, s'il n'y en a que trois ; ou bien avec le rectangle des deux autres , s'il y en a quatre ; ou bien s'il y en a cinq , que le parallelepipede composé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipede composé des deux qui restent , & d'une autre ligne donnée. Ou s'il y en a six , que le parallelepipede composé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipede des trois autres. Ou s'il y en a sept, que ce qui se produit , lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre , ait la raison donnée avec ce qui se produit par la multiplication des trois autres , & encore d'une autre ligne donnée. Ou s'il y en a huit , que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres. Et ainsi cette question se peut étendre à tout autre nombre de lignes.

Puis à cause qu'il y a toûjours une infinité de divers points , qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé , il est aussi requis de connoître , & de tracer la ligne , dans laquelle ils doivent tous se trouver. Et Pappus dit, que lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données , c'est en une des trois Sections coniques ; mais il n'entreprend point de la determiner , ni de la décrire ; non plus que d'expliquer celles , où tous ces points se doivent trouver , lorsque la question est proposée en un plus grand nombre de lignes. Seulement il ajoûte que les Anciens en avoient imaginé une , qu'ils

montroient y être utile, mais qui sembloit la plus manifeste, & qui n'étoit pas toutesfois la premiere. Ce qui m'a donné occasion d'essayer, si par la Methode, dont je me sers, on peut aller aussi loin qu'ils ont été.

Après avoir expliqué quelques endroits de cette Section, j'examinerai si, lorsque la question de Pappus ne suppose que deux lignes données de position, le lieu est plan, ainsi que l'assure Pappus : *Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus ostensus est.*

ARTICLE I.

Explication.

1. PAppus est un Mathematicien d'Alexandrie, qui vivoit environ l'an 400. de l'Ere chrétienne, & qui a composé huit Livres des Collections Mathematiques. Au commencement du Livre septiéme il écrit plusieurs choses sur les lieux Geometriques, sur la maniere de les resoudre & de les construire ; il rapporte les Livres d'Euclide, d'Apollonius, d'Aristée, d'Eratosthenes sur cette matiere. C'est dans ce qu'il dit sur les Sections coniques d'Apollonius, que l'on trouve les choses que M. DESCARTES en cite ici.

2. M. DESCARTES en donnant d'abord la resolution du Problême de Pappus, prétend commencer sa Geometrie par l'endroit, où les Anciens & les Modernes avoient fini la leur. Car il assure dans * une de ses Lettres, que non seulement tous les Geometres jusques à Pappus n'avoient pû resoudre ce fameux Problême, ainsi que cet Auteur l'assure ; mais encore qu'aucun depuis Pappus ne l'avoit sçû trouver, puisque aucun n'en a écrit, quoique les plus habiles des Modernes l'ayent cherché.

*Tom 3. Lett. 73. au Pere Mersenne.

L'on lit encore dans une ** autre Lettre de M. DESCARTES écrite quatre ans avant que sa Geometrie fût imprimée, qu'il n'avoit travaillé que cinq ou six semaines à la solution qu'il donne de cette question.

** Tom. 2. Lett. 71. au P. Mersenne.

3. Dans ces termes de Pappus : *Punctum datam coni Sectionem continget, punctum continget positione datam lineam*, le mot *continget*, signifie le même que *est*, *invenitur in coni Sectione*, *in lineâ datâ*. Ces lignes s'appellent lieux ; & lieux solides, lorsqu'elles sont une des trois Sections coniques ; lieux plans, lorsqu'elles sont une ligne droite ou un cercle. La ligne cherchée est appellée donnée : ce que Pappus fait en plusieurs autres endroits de ses Collections, où il appelle donné ou connu, ce qui se trouve par les choses, qui sont données.

Proportio conjuncta est la même chose que *ratio composita*. Def. 5. L. 6. Eucl. Les parallelogrammes équiangles sont 23. 6. Eucl. en raison composée de la

la raiſon de leurs côtez, c'eſt-à-dire, que la raiſon d'un parallelogramme à un autre s'exprime par le produit, qui ſe fait, lorſqu'on multiplie entr'eux les expoſans de la raiſon, que chaque côté d'un parallelogramme a avec chaque côté de l'autre, ſoient deux parallelogrammes équiangles bc, fg; que la raiſon du côté $b = 6$ au côté $f = 3$ ſoit double, & ſon expoſant 2; la raiſon du côté $c = 12$ au côté $g = 4$ triple, & ſon expoſant 3; le produit de l'expoſant 2 par l'expoſant 3 eſt 6, qui exprime la raiſon du premier parallelogramme $cb = 72$ au ſecond $fg = 12$: en effet 72 contient 6 fois 12.

Le même ſe trouve dans les parallelepipedes rectangles. Soient les parallelepipedes rectangles abc, def; que la raiſon du côté $a = 1$ au côté $d = 3$ ſoit ſouſtriple, & ſon expoſant $\frac{1}{3}$; la raiſon du côté $b = 4$ au côté $e = 2$ double, & ſon expoſant 2; la raiſon du côté $c = 4$ au côté $f = 8$ ſoûdouble & ſon expoſant $\frac{1}{2}$; le produit de la multiplication des trois expoſans $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$, eſt $\frac{1}{3}$ qui exprime la raiſon du premier ſolide $abc = 16$ au ſecond $def = 48$: en effet 16 eſt un tiers de 48.

Que l'on expoſe les quantitez $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 6$, dont le produit $abcd = 180$, & les quantitez $e = 4$, $f = 9$; $g = 10$, $h = 12$, dont le produit $efgh = 4320$: la raiſon du premier produit au ſecond eſt comme 1 à 24, la même, que la raiſon compoſée de la raiſon des côtez; car la raiſon de $a = 2$ à $e = 4$ eſt ſoûdouble, & ſon expoſant $\frac{1}{2}$; la raiſon de $b = 3$ à $f = 9$ eſt ſoûtriple, & ſon expoſant $\frac{1}{3}$; la raiſon de $c = 5$ à $g = 10$ eſt ſoûdouble, & ſon expoſant $\frac{1}{2}$; la raiſon de $d = 6$ à $h = 12$ eſt encore ſoûdouble, & ſon expoſant $\frac{1}{2}$. Multiplions entr'eux les expoſans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; le produit eſt $\frac{1}{24}$, qui ſignifie que le premier produit $abcd$ eſt une vingt-quatriéme du ſecond produit $efgh$, ou que $abcd$ eſt contenu vingt-quatre fois dans $efgh$.

Et comme la proportion de chaque côté d'un produit à chaque côté de l'autre peut varier de toutes façons: il ſuit, que les produits peuvent avoir telle proportion donnée, que l'on voudra. Ainſi c'eſt la même choſe de dire avec M. DESCARTES, que le produit $abcd$ de la multiplication des quatre premieres lignes ait la proportion donnée avec le produit $efgh$ des quatre autres; ou de dire avec Pappus, ſi l'on donne la raiſon compoſée des raiſons de a à e, de b à f, de c à g, de d à h; *Et data ſit proportio conjuncta ex eâ, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad reliquam.*

4. Ces nombres $1.\ 2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32.\ 64.$ &c. ſont en progreſſion Geometrique continuë. Le ſecond eſt la racine, ou une grandeur d'une dimenſion, exprimée Algebriquement par une lettre b; le troiſiéme eſt le quarré du ſecond, & une grandeur de deux dimenſions, exprimée par bb; le quatriéme eſt le cube du ſecond, & une grandeur de trois dimenſions, b^3; le cinquiéme eſt le quarré de quarré du ſecond, & une gran-

deur de quatre dimenſions , b^4 ; le ſixiéme eſt le premier ſurſolide du ſecond , & une grandeur de cinq dimenſions , b^5 ; le ſeptiéme le quarré cube du ſecond , & une grandeur de ſix dimenſions , b^6 &c. Dans l'Arithmetique l'on peut donc avoir des grandeurs de toute ſorte de dimenſions ou degrez à l'infini , parceque la progreſſion Geometrique croiſſante peut toûjours augmenter. Mais la Geometrie ordinaire ne peut reconnoître que trois eſpeces de quantitez ; la premiere eſt la ligne , qui ſe produit par le mouvement du point ; la ſeconde eſt la ſurface , qui ſe produit de la multiplication d'une ligne par une autre ligne , ou par le mouvement d'une ligne ſur une autre ; la troiſiéme eſt le ſolide , qui ſe produit de la multiplication d'une ligne par une ſurface , ou par le mouvement d'une ſurface le long d'une ligne. L'on ne trouve donc ici , que des quantitez de trois dimenſions , la ligne qui en a une , la longueur ; la ſurface , qui en a deux , la longueur & la largeur ; le ſolide , qui en a trois , la longueur, la largeur , & la profondeur. C'eſt pourquoi Pappus regarde avec les Anciens un produit de quatre , cinq , &c. dimenſions , comme quelque choſe d'inintelligible : *Non adhuc habent dicere , an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur , quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus. Acquieſcunt autem his , qui paulò ante talia interpretati ſunt ; neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes, quod his continetur.* Mais la Geometrie de M. DESCARTES qui exprime ordinairement tout par des lignes , fournit dans le produit de ſa multiplication de lignes , des grandeurs de toutes ſortes de dimenſions. L'on y voit des lignes , qui ſont des quarrez , ou qui ont deux dimenſions ; des lignes, qui ſont des cubes , ou ſont de trois dimenſions ; des lignes , qui ſont des quarrez de quarrez , ou qui montent au quatriéme degré , à quatre dimenſions ; &c.

Et quiconque ſçait , en quoi conſiſte la multiplication des lignes , dont il a été parlé , Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 2. comprend aiſément , ce que veut dire dans cette Geometrie un quarré de quarré , ou une grandeur de quatre dimenſions ; un quarré de cube , ou une quantité du ſixiéme degré ; &c. Et voilà pourquoi M. DESCARTES a dit, Part. 1. Sect. 2. qu'il ne craindra pas d'introduire les termes d'Arithmetique dans la Geometrie, afin de ſe rendre plus intelligible.

5. Les Problêmes indeterminez ne ſont entierement conſtruits , qu'après que l'on a fait deux choſes : la premiere , c'eſt de trouver un point , d'où l'on puiſſe tirer les lignes , qui ſatisfont à la queſtion ; la ſeconde , c'eſt que, comme il y a une infinité de points , d'où l'on peut tirer les lignes , que le Problême demande ; il faut determiner & décrire la ligne droite ou courbe , que tous ces points compoſent , & dans laquelle ils ſe trouvent. En un mot l'on doit trouver le lieu Geometrique cherché. C'eſt principalement en cela que M. DESCARTES l'emporte dans la reſolution , qu'il donne au Problême de Pappus , ſur tous les Geometres , qui l'ont precedé.

ARTICLE II.

Si le lieu eſt plan, lorſque les lignes données dans le Probléme de Pappus, ne ſont que deux.

LA queſtion de Pappus ſuppoſe un Theorême de Trigonometrie, que je vais démontrer, avant que d'examiner les cas, où il y a deux lignes données dans cette fameuſe queſtion. Je parle ici de ces cas, parceque M. DESCARTES n'en dit mot dans ſa Geometrie ; & parceque étant faciles, ils diſpoſent à la ſolution, que l'on trouvera des autres cas dans la ſuite. Au reſte j'ai reſolu avec ce ſeul Theorême tous ceux de ces Commentaires, qui dépendent de la Trigonometrie ; ceux même qu'elle reſout d'une autre maniere.

Theorême de Trigonometrie.

Dans tout triangle rectiligne les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez.

Déf. Le ſinus droit, ou le ſinus Fig. 31. de l'arc *EB*, ou de l'angle *ECB*, c'eſt la droite *EG* tirée d'une des extrêmitez *E* de cet arc perpendiculairement ſur le diametre *CB*, qui paſſe par l'autre extrêmité *B* du même arc *EB*. FIG. 31.

La même ligne droite *EG* eſt le ſinus de l'arc *EDA*, ou de l'angle *ACE* parcequ'elle eſt tirée d'une des extrêmitez *E* de cet arc perpendiculairement ſur le diametre *ACB*, qui paſſe par l'autre extrêmité *A* du même arc *EDA*. De ſorte que les deux arcs *EB*, *EDA*, qui font enſemble le demi-cercle *BDA* ont le même ſinus *EG*.

Appliquez cette définition aux quarts de cercle *DB*, *DA* ; vous verrez que le rayon *DC* eſt leur ſinus, que l'on appelle ſinus total : de ſorte que le rayon d'un cercle eſt le ſinus de l'angle droit.

Dém. 1. Dans un triangle rectangle *ACB*. Fig. 32. Du point *D* milieu de la baſe *AB*, & de l'intervale *DA*, décrivez un cercle, qui 31. 3. Eucl. paſſera par le ſommet *C* de l'angle droit. Du même centre *D* tirez ſur les autres côtez les perpendiculaires *DEF*, *DGH*, qui 3. 3. Eucl. diviſeront les côtez en deux parties égales : de ſorte que 4. 1. Eucl. les triangles *DEA*, *DEC* ſeront égaux, auſſi bien que les triangles *DGC*, *DGB* ; c'eſt pourquoi les angles *ADF*, *CDF* & leurs arcs *AF*, *FC* ſont égaux, comme auſſi les angles *CDH* *BDH* & leurs arcs *CH*, *BH*. Maintenant par la déf. du ſinus, *AD* moitié de la baſe *AB* eſt le ſinus de ſon angle oppoſé *ACB*, qui eſt droit ; *AE* moitié du côté *AC* eſt le ſinus de l'angle *ADF*, qui étant la moitié de l'angle *ADC* au centre, eſt égal 20. 3. Eucl. à l'angle *ABC* à la circonference : ainſi *AE* eſt ſinus de l'angle *ABC* oppoſé au côté *AC*. L'on prouvera de même, que *GC* moitié du côté *BC* eſt le ſinus de l'angle *BAC* oppoſé au côté *BC*. Or comme la baſe *AB* FIG. 32.

Fig. 32. eſt au côté *AC* ; ainſi *AD* moitié de la baſe & ſinus de l'angle droit *ACB* à qui il eſt oppoſé, eſt à *AE* moitié du côté *AC* oppoſé à l'angle *ABC*, & ſinus de cet angle. Et comme *AC* eſt à *CB* ; de même *AE* moitié de *AC* eſt à *GC* moitié du côté *CB* oppoſé à l'angle *CAB* : donc les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez dans un triangle rectangle.

Fig. 33. 2. Dans un triangle acutangle *ABC* Fig. 33. ſoit décrit un cercle autour du triangle 5. 4. Eucl. & du centre *F* abbaiſſez des perpendiculaires ſur les côtez. Comme auparavant l'on fera voir, que les côtez & les arcs ſont diviſez en deux parties égales ; que les angles *AFG*, *BFG*, *BFH*, *CFH*, *AFL*, *CFL* ſont égaux ; que *AD* eſt le ſinus de l'angle oppoſé *ACB*, *BE* le ſinus de l'angle oppoſé *BAC*, *CK* le ſinus de l'angle oppoſé *CBA*. Enfin l'on conclura ainſi, comme le côté *AB* eſt au côté *BC* ; de même *AD* moitié de *AB* & ſinus de l'angle oppoſé *ACB* eſt à *BE* moitié de *BC* & ſinus de l'angle oppoſé *BAC*. Et comme *BC* eſt à *CA* ; de même *BE* eſt à *CK* moitié du côté *AC* & ſinus de l'angle oppoſé *ABC* : donc les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez dans un triangle acutangle.

Fig. 34. 3. Dans un triangle obtuſangle *ABC* Fig. 34. ſoit auſſi décrit un cercle autour du triangle ; du centre *D* tirez ſur les côtez les perpendiculaires *DF*, *DL*, *DH*, qui diviſeront les côtez & les arcs en deux parties égales ; tirez encore les rayons *DA*, *DB*, *DC* ; & les lignes, *AI*, *CI*. La ligne *AE* eſt le ſinus de l'angle *ADF*, égal 20. 3. Eucl. à l'angle *BCA* oppoſé au côté *BA* ; la ligne *BG* eſt le ſinus de l'angle *BDH* égal à l'angle *BAC* oppoſé au côté *BC* ; la ligne *AK* eſt le ſinus de l'angle *ADL* égal à l'angle *AIC* : mais 22. 3. Eucl. les angles *AIC*, *ABC* ſont égaux à deux droits, & leur meſure totale eſt un demicercle : donc def. du ſinus, ils ont le même ſinus *AK*, & l'angle obtus *ABC* a pour ſinus la ligne *AK* moitié du côté *AC* oppoſé à l'angle *ABC*. Enfin comme *AB* eſt à *BC* : de même *AE* moitié de *AB*, & ſinus de l'angle *ACB* eſt à *BG* moitié du côté *BC*, & ſinus de l'angle *BAC*, auquel le côté *BC* eſt oppoſé. Et comme *BC* eſt à *CA* : de même *BG* eſt à *AK* moitié du côté *AC* & ſinus de l'angle *ABC* auquel le côté *AC* eſt oppoſé. Donc les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez dans un triangle obtuſangle. Ce qu'il falloit démontrer.

Dans les trois cas on auroit pû dire, comme un côté eſt à ſa moitié, qui eſt le ſinus de l'angle oppoſé : de même un autre côté eſt à ſa moitié ſinus de l'angle oppoſé.

PROBLEME.

Fig. 35. DEux lignes *AB*, *AD* Fig. 35. étant données de poſition, (elles ſe coupent perpendiculairement ;) l'on demande un point *C*, duquel on puiſſe

tirer les deux lignes CB, CD; CB sur BA faisant avec elle l'angle donné CBF de 60. degrez; CD perpendiculaire sur AD. De plus on demande, & ceci peut se proposer de differentes manieres: ou 1. que le rectangle sous CB & une donnée m, soit égal au rectangle sous CD, & une autre donnée n. ou 2. que le quarré de CB soit égal au quarré de CD. ou 3. que le quarré de CB soit égal au rectangle sous CD & une donnée m. ou 4. que le rectangle sous CB & CD soit égal au rectangle des données m, n. Commençons par le calcul qui est commun aux quatre cas. Fig. 35.

1. Je suppose la chose faite, & après avoir produit la ligne CB, jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne AD en E; je nomme CB, y; AB, x. Après cela je considere le triangle ABE, dont je connois tous les angles. Car l'angle EAB est droit par la supp. l'angle ABE est égal à l'angle CBF donné de 60. deg. L'angle AEB est de 30. degrez. Le sinus total, ou de l'angle droit EAB est 100000, le sinus de l'angle AEB de 30. deg. est 50000, le premier est au second, comme $2 = c$ à $1 = z$. L'on peut mettre la raison de c à z, ou de z à c pour la raison des sinus. z comme vous le voyez, represente ici une grandeur connuë.

Le Theorême de Trigonometrie donne cette analogie. Comme le sinus de l'angle AEB est au sinus total de l'angle EAB, ou comme z est à c: de même le côté AB, x est au côté BE, $\frac{cx}{z}$. Et $CE = CB + BE$, $y + \frac{cx}{z} = \frac{zy + cx}{z}$.

Ensuite je viens au triangle CDE, dont je connois aussi tous les angles; car CDE est droit supp. CED vient d'être connu de 30. degrez. Donc aussi par le Theorême comme le sinus total de l'angle CDE est au sinus de l'angle CED, ou comme c à z: de même CE, $\frac{zy + cx}{z}$ est à CD, $\frac{zy + cx}{c}$. Voilà ce qu'il y a de commun pour tous les cas.

2. L'on demande en premier lieu que le rectangle sous CB, & une donnée m soit égal au rectangle sous CD & une autre donnée n: c'est-à-dire, $my = \frac{nzy + cnx}{c}$. & $cmy = nzy + cnx$, $cmy - nzy = cnx$; $y = \frac{cnx}{cm - nz}$. Substituons les valeurs de c & de z, nous aurons $y = \frac{2nx}{2m - n}$, lieu à la ligne droite.

Pour la construction, sur AB je coupe $AF = 2m - n$, du point F je tire la ligne $FG = 2n$, de sorte que l'angle GFK soit de 60. degrez; par les points G, A je mene l'infinie GA, qui est le lieu cherché.

Dém. Dans l'angle DAF je choisis le point C, je mene CB parallele à GF, & CD perpendiculaire sur AD. Je nomme AB, x; CB, y. A cause des paralleles CB, GF, les triangles ACB, AGF sont équiangles. Donc AF, $2m - n$: FG, $2n$ :: AB, x: BC, y. $2my - ny = 2nx$, $y = \frac{2nx}{2m - n}$. Dans l'angle HAE, du point c pris à volonté je mene cb parallele à GF, & cd perpendiculaire sur AD. Et parceque les $+x$ ont été pris sur AK en allant de A vers K, les Ab pris de l'autre côté, en allant de A vers H seront $-x$; les CB sont $+y$ étant pris d'un côté de la ligne AB,

FIG 35. les cb pris de l'autre côté dans l'angle HAE seront $-y = \frac{-2nx}{2m-n}$. Les triangles AGF, Acb sont encore équiangles AF, $2m-n : FG$, $2n :: Ab$, $-x : cb$, $-y$. $-2my+ny = -2nx$; $2my-ny = 2nx$; $y = \frac{2nx}{2m-n}$. Donc l'on trouve l'équation cherchée dans tous les points de la ligne infinie AG, excepté au point A, où les x & les y commencent. Ce qu'il, &c.

3. L'on demande en second lieu, que le quarré de CB soit égal au quarré de CD, c'est-à-dire, $yy = \frac{zzyy+2czyx+ccxx}{cc}$. $ccyy - zzyy - 2czyx = ccxx$. $yy - \frac{2czxy}{cc-zz} = \frac{ccxx}{cc-zz}$. Mettons de chaque côté $\frac{+cczzxx}{c^4-2cczz+z^4}$ nous aurons $yy - \frac{2czxy}{cc-zz} + \frac{cczzxx}{c^4-2cczz+z^4} = \frac{cczzxx}{c^4-2cczz+z^4} + \frac{ccxx}{cc-zz}$ extrayons la racine quarrée $y - \frac{czx}{cc-zz} = \sqrt{\frac{c^4xx}{c^4-2cczz+z^4}} = \frac{ccx}{cc-zz}$; $y = \frac{ccx+czx}{cc-zz}$. où mettant pour c & z leur valeur; $y = 2x$. lieu à la ligne droite.

La construction se fera ainsi. Fig. 35. soient prises $AF = cc - zz = 3$; $FG = cc + cz = 6$; que l'angle GFK soit de 60. degrez. L'infinie GA est le lieu cherché. Nommons AB, x; BC, y, qui est parallele à FG; Ab, $-x$; cb, $-y$.

Dém. Dans les triangles équiangles AFG, ABC; AF, $cc-zz : FG$, $cc+cz :: AB$, $x : BC$, y. & $ccy - zzy = ccx + czx$; $y = \frac{ccx+czx}{cc-zz}$. Dans les triangles équiangles AFG, Abc; AF, $cc-zz : FG$, $cc+cz :: Ab$, $-x : bc$, $-y$. & $-ccy + zzy = -ccx - czx$; $ccy - zzy = ccx + czx$; $y = \frac{ccx+czx}{cc-zz}$. Ce qu'il, &c.

4. L'on demande en troisiéme lieu, que le quarré de CB soit égal au rectangle de CD & d'une ligne connuë m, c'est à dire $yy = \frac{mzy+cmx}{c} = \frac{mz}{c}y + mx$. $yy - \frac{mz}{c}y = mx$. Prenons $y - \frac{mz}{2c} = v$, $v + \frac{mz}{2c} = y$, Substituons pour yy sa valeur $vv \frac{+mzv}{c} + \frac{mmzz}{4cc}$, & pour $-\frac{mz}{c}y$ sa valeur $-\frac{mzv}{c} - \frac{mmzz}{2cc}$; la reduite sera $vv - \frac{mmzz}{4cc} = mx$; $vv = \frac{mmzz}{4cc} + mx$, & substituant pour c, & pour m qui sont égales & pour z leur valeur, $vv = \frac{1}{4} + 2x$. lieu à la parabole.

FIG. 36. Sa construction sera telle Fig. 36. sur BC coupez $BH = \frac{mz}{2c}$, & l'on aura $CH = CB - BH$, $y - \frac{mz}{2c} = v$. Par le point H menez FH parallele à AB, sur FH prenez $FG = \frac{mzz}{4cc}$. Enfin sur le diametre GH décrivez une parabole dont le point G est le sommet, CH une appliquée, la quantité m le parametre. La parabole décrite CGc est le lieu cherché.

Dém. A cause des paralleles AB, FH, les triangles EAB, EFH sont équiangles. EB, $\frac{cx}{z}$, n. 1. : AB, $x :: EH = EB + BH$, $\frac{cx}{z} + \frac{mz}{2c} : FH$, $x + \frac{mzz}{2cc}$. Et $GH = FH - FG$, $x + \frac{mzz}{2cc} - \frac{mzz}{4cc} = x + \frac{mzz}{4cc}$. Maintenant par la nature de la parabole, le parametre $m \times GH = \overline{CH}^2$, $mx + \frac{mmzz}{4cc} = vv$. Mettez pour vv sa valeur, $mx + \frac{mmzz}{4cc} = yy - \frac{mzy}{c} + \frac{mmzz}{4cc}$; $yy - \frac{mzy}{c} = mx$.

Au point c, $cB = -y$, $cH = cB + BH$, $-y + \frac{mz}{2c} = -v$. Et

par la nature de la parabole l'on aura encore le parametre $m \times GH = \overline{CH}^2$, $mx + \frac{mmzz}{4cc} = vv$, qui se reduit, comme auparavant à $yy - \frac{mzy}{c} = mx$. Il est aisé de montrer, que cette derniere équation se trouve dans tous les points de la parabole CGc, & qu'ainsi elle est le lieu cherché. Ce qu'il, &c. FIG. 36.

5. L'on demande en quatriéme lieu que le rectangle sous CB & CD soit égal à un rectangle sous les données $m = 2$, $n = 1$, c'est-à-dire, $\frac{zyy + cxy}{c} = mn$. $zyy + cxy = cmn$, $yy + \frac{cxy}{z} = \frac{cmn}{z}$. Si l'on fait $y + \frac{cx}{2z} = v$, $v - \frac{cx}{2z} = y$, & que l'on substituë pour yy sa valeur $vv - \frac{cxv}{z} + \frac{ccxx}{4zz}$, & pour $+ \frac{cxy}{z}$ sa valeur $+ \frac{cxv}{z} - \frac{ccxx}{2zz}$, la reduite sera $vv - \frac{ccxx}{4zz} = \frac{cmn}{z}$; $vv = \frac{ccxx}{4zz} + \frac{cmn}{z}$; multipliez par $4zz$, divisez par cc; $\frac{4zzvv}{cc} = xx + \frac{4mnz}{c}$ & substituant la valeur des lettres c, m, n, z, $vv = xx + 4$. ou $xx = vv - 4$; étant $u = y + \frac{cx}{2z} = y + x$.

Voici sa construction Fig. 37. Il faut sur CE, prendre $BH = \frac{cx}{2z} = x$; par les points A, H tirer l'infinie AH; le triangle ABH est équilateral & le côté $AH = x$, parceque $AB = BH$, x; donc les angles BAH, BHA sont égaux & de 60. degrez, l'angle ABH étant supp. de 60. deg. Ensuite par le point A l'on doit mener l'infinie AF parallele à CH, couper $AG = AL = m = 2$, & décrire l'hyperbole équilatere cGC, dont le sommet est G, les appliquées CF paralleles à AH, le diametre determiné LG, le centre A. Je dis qu'elle est le lieu cherché. FIG. 37.

Dém. Constr. $AHCF$ est un parallelogramme, donc $CF = AH$, x; $AF = CH = CB + BH$, $y + x = v$; $LF = LA + AF$, $2 + y + x = 2 + u$. $GF = AF - AG$, $v - 2$. Or par la nature de l'hyperbole équilatere $\overline{CF}^2 = LF \times GF$, $xx = vv - 4$. De même si l'on tire ch parallele à AF, dans le parallelogramme $AFch$, l'on a $ch = AF$, v; $cF = Ah$, $-x$, ce qui donnera la même équation; dans laquelle si pour 4, l'on substituë $\frac{4mnz}{c}$; pour vv, $yy + \frac{cxy}{z} + \frac{ccxx}{4zz}$, & que l'on multiplie cette valeur de vv par $\frac{4zz}{cc} = 1$ parceque $\frac{4zz}{cc}$ multiplioit vv, l'on formera l'équation $xx = \frac{4zzyy}{cc} + \frac{4zxy}{c} + xx - \frac{4mnz}{c}$; $\frac{4zzyy}{cc} + \frac{4zxy}{c} = \frac{4mnz}{c}$; & si l'on divise par $\frac{4zz}{cc}$, l'on fait $yy + \frac{cxy}{z} = \frac{cmn}{z}$, qui est l'équation à construire. Ce qu'il falloit démontrer.

6. Vous voyez que le Problême de Pappus, lorsqu'il est proposé d'une certaine maniere, est un lieu plan, comme n. 2. & 3. ou que c'est un lieu à la ligne droite : & que lorsqu'il est proposé d'une autre maniere, il est un lieu solide, c'est-à-dire, un lieu à une Section conique, comme n. 4. c'est un lieu à la parabole; & n. 5. c'est un lieu à l'hyperbole.

Dans tous les cas, que l'on vient d'examiner, l'on a mis une proportion constante & déterminée entre les quarrez & les rectangles : mais si l'on mettoit une proportion indeterminée, les lieux monteroient à des degrez plus élevez. Comme si n. 3. l'on demandoit que le quarré de CB fût au quarré de CD, comme x est à y; l'on auroit l'équation $y^3 = \frac{zzxyy + 2czxxy + ccx^3}{cc}$.

SECTION II.

Réponse à la Question de Pappus.

M. DESCARTES rapporte ici en peu de mots la ſolution entiere qu'il a trouvé de la queſtion de Pappus, en quelque nombre de lignes qu'elle ſoit propoſée, & quelque poſition qu'ayent ces lignes.

En premier lieu il dit, comment on peut trouver tous les points, qui donnent la ſolution d'un Problême indeterminé; en ſecond lieu il détermine la ligne, où tous ces points ſe trouvent. Mais, parce qu'on verra ailleurs les raiſons & les exemples de ce qu'il avance ici, je renverrai à ces endroits là l'explication de cette Section. Les points cherchez ſe trouvent de cette maniere.

M. DESCARTES.

Réponſe à la Queſtion de Pappus.

Et premierement j'ai trouvé que cette queſtion n'étant propoſée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut toûjours trouver les points cherchez par la Geometrie ſimple, c'eſt-à-dire, en ne ſe ſervant que de la Regle & du Compas, ni ne faiſant autre choſe que ce qui a déja été dit.

La raiſon de ceci ſe trouvera Sect. 4. & 5. Art. 1. n. 3. 4. Les exemples L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Excepté ſeulement lorſqu'il y a cinq lignes données, ſi elles ſont toutes paralleles. Auquel cas, comme auſſi lorſque la queſtion eſt propoſée en ſix, ou 7. ou 8. ou 9. lignes, on peut toûjours trouver les points cherchez par la Geometrie des ſolides, c'eſt-à-dire, en y employant quelqu'une des trois Sections Coniques.

La raiſon en eſt rapportée, Sect. 4. & 5. n. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Les exemples ſont L. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2.

Excepté ſeulement lorſqu'il y a neuf lignes données, ſi elles ſont toutes paralleles. Auquel cas derechef, & encore en 10, 11, 12, ou 13 lignes, on peut trouver les points cherchez par le moyen d'une ligne courbe, qui ſoit d'un degré plus compoſée que les Sections Coniques.

Vous en trouverez la raiſon, Sect. 4. & 5. n. 12. 13. 14.

Excepté en treize, ſi elles ſont toutes paralleles, auquel cas, & en quatorze, 15, 16, & 17. il y faudra employer une ligne courbe

courbe encore d'un degré plus composée que la precedente, & ainsi à l'infini.

Voyez-en la raison, Sect. 4. & 5. n. 15.

Voici quelles sont les lignes, dans lesquelles tous les points, qui satisfont à ce qui est proposé, se trouvent. Voyez L. 2. Part. 2. Sect. 1.

Puis j'ai trouvé aussi, que lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes données, les points cherchez se rencontrent tous non seulement en l'une des trois Sections Coniques, mais quelquefois aussi en la circonference d'un cercle, ou en une ligne droite.

Les exemples seront en grand nombre, L. 2. Part. 2. Sect. 2.

Et que lorsqu'il y en a cinq, ou six, ou sept, ou huit; tous ces points se rencontrent en quelqu'une des lignes, qui sont d'un degré plus composées, que les Sections Coniques, & il est impossible d'en imaginer aucune, qui ne soit utile à cette question.

Voyez L. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 2. L. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2.

Mais ils peuvent aussi derechef se rencontrer en une Section Conique, ou en un cercle, ou en une ligne droite.

Voyez L. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 4.

Et s'il y en a neuf, ou 10, ou 11, ou 12, ces points se rencontrent en une ligne, qui ne peut être, que d'un degré, plus composée, que les precedentes; mais toutes celles, qui sont d'un degré plus composées, y peuvent servir. Et ainsi à l'infini.

Au reste la premiere & la plus simple de toutes, après les Sections Coniques, est celle qu'on peut décrire par l'intersection d'une parabole, & d'une ligne droite, en la façon, qui sera tantôt expliquée.

A sçavoir Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 3.

En sorte que je pense avoir entierement satisfait à ce que Pappus nous dit avoir été cherché par les Anciens, & je tâcherai d'en mettre la Démonstration en peu de mots, car il m'ennuye déja d'en tant écrire.



SECTION III.

Le commencement du calcul pour le Probléme de Pappus.

LA resolution du Problême de Pappus proposé en quatre lignes droites données de position commence ici. Je joindrai à chaque endroit en particulier l'éclaircissement necessaire.

M. DESCARTES.

FIG. 38. Soient Fig. 38. *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, *&c.* plusieurs lignes données par position, & qu'il faille trouver un point comme *C*, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données comme *CB*, *CD*, *CF*, & *CH*, en sorte que les angles *CBA*, *CDA*, *CFE*, *CHG*, *&c.* soient donnez, & que ce qui est produit par la multiplication d'une partie de ces lignes, soit égal à ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile.

Comment on doit poser les termes pour venir à l'équation en cet exemple.

Premierement je suppose la chose comme déja faite, & pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes, je considere l'une des données, & l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple *AB*, & *CB*, comme les principales, & ausquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne *AB*, qui est entre les points *A* & *B*, soit nommé *x*, & que *BC* soit nommé *y*, & que toutes les autres lignes données soient prolongées, jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, & si elles ne leur sont point paralleles; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne *AB* aux points *A*, *E*, *G*, & *BC*, aux points *R*, *S*, *T*.

Les lignes sont données de position & non pas de grandeur, c'est-à-dire, que la situation, où elles sont les unes à l'égard des autres, est déterminée; mais que leur longueur ne l'est pas : ainsi l'on peut les prolonger, autant qu'on le juge à propos. Si donc la ligne *EF*, par exemple, n'étoit tirée que depuis *F* jusques à *E*, il faudroit la continuer jusqu'à *S*. Elles peuvent aussi se trouver prolongées au delà de *R*, *S*, *T*. Lorsqu'une ligne donnée est parallele à *CB* ou à *AB*, comme elle ne peut les cou-

per, on ne la prolongera pas pour cette raiſon, mais on doit quelquefois le faire pour d'autres. Voyez Part. 1. Sect. 4. Regl. 8. n. 2. De plus les lignes étant données de poſition, les angles qu'elles font en ſe coupant, ſont auſſi donnez, auſſi bien que les ſegmens, qu'elles font les unes ſur les autres. FIG. 38.

Puis à cauſe que tous les angles du triangle ARB ſont donnez, la proportion, qui eſt entre les côtez AB & BR eſt auſſi donnée, & je la poſe comme z à b, de façon que AB étant x, RB ſera $\frac{bx}{z}$, & la toute CR ſera $y + \frac{bx}{z}$, à cauſe que le point B tombe entre C & R; car ſi R tomboit entre C & B, CR ſeroit $y - \frac{bx}{z}$, & ſi C tomboit entre B & R, CR ſeroit $-y + \frac{bx}{z}$.

Tous les angles du triangle ARB ſont donnez parce que 1° l'angle ABR eſt le complement à deux droits de l'angle donné CBA: donc il eſt connu. 2° L'angle RAB eſt connu & donné, parceque les lignes AD, AB, qui le font, ſont données de poſition. 3° L'angle ARB eſt le complement à deux droits des deux angles RAB, RBA connus.

Quand on connoît les angles, l'on connoît leurs ſinus, & la raiſon qui eſt entre ces ſinus, & par le Theorême de Trigonometrie, la raiſon qui eſt entre les côtez oppoſez à ces ſinus. La raiſon connuë, qui eſt entre les côtez AB, BR peut s'exprimer par les lettres z, b; & l'on peut dire, comme z eſt à b: ainſi le côté AB, x, eſt au côté BR, $\frac{bx}{z}$. Et $CR = CB + BR$, $y + \frac{bx}{z}$, ou $\frac{zy + bx}{z}$. où z, qui ſert ordinairement à marquer des grandeurs inconnuës, en ſignifie une connuë.

Si R tomboit entre C & B Fig. 39. l'on auroit $CR = CB - BR$, $y - \frac{bx}{z}$. Si c tomboit entre B & R ce ſeroit $cR = BR - cB$, $\frac{bx}{z} - y$, ou $-y + \frac{bx}{z}$. FIG. 39.

Tout de même les trois angles du triangle DRC Fig. 38. ſont donnez, & par conſequent auſſi la proportion, qui eſt entre les côtez CR & CD, que je poſe comme z à c; de façon que CR étant $y + \frac{bx}{z}$, CD ſera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. FIG. 38.

Dans le triangle DRC l'on connoît 1° l'angle DRC, qui eſt le même que l'angle ARB, que l'on vient de connoître. 2° L'angle CDR eſt déterminé par la queſtion, car c'eſt celui que la ligne CD doit faire avec la donnée AD, 3° L'angle DCR eſt connu, 32. 1. Eucl.

La Trigonometrie fournit donc encore le moyen de ſçavoir la proportion du côté CR au côté CD, que je mets comme z à c; & je fais, comme z eſt à c; de même CR, $\frac{zy + bx}{z}$ eſt à CD, $\frac{czy + bcx}{zz} = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$.

Après cela pourceque les lignes AB, AD, & EF ſont données par poſition, la diſtance qui eſt entre les points A & E eſt auſſi

donnée, & si on la nomme, k, on aura EB égal à $k + x$; mais ce seroit $k - x$; si le point B tomboit entre E & A; & $-k + x$, si E tomboit entre A & B.

FIG. 38. 39. Fig. 38. $EB = EA + AB$, $k + x$, Fig. 39. $EB = EA - AB$, $k - x$. Et si le point E tomboit en e, $eB = AB - eA$, $x - k$, ou $-k + x$.

Et pourceque les angles du triangle Fig. 38. ESB sont tous donnez, la proportion de BE à BS est aussi donnée, & je la pose comme z à d; si bien que BS est $\frac{dk + dx}{z}$, & la toute CS est $\frac{zy + dk + dx}{z}$; mais ce seroit $\frac{zy - dk - dx}{z}$, si le point S tomboit entre B & C; & ce seroit $-\frac{zy + dk + dx}{z}$, si C tomboit entre B & S.

Les trois angles du triangle EBS sont donnez, car 1° l'angle EBS est le même, que l'angle ABR déja connu. 2° Parceque la position des lignes AB, EF est donnée, l'angle BES; qu'elles font en se coupant, est aussi donné & connu. 3° L'angle ESB est connu 32. 1. Eucl.

Les angles du triangle EBS étant connus, par la Trigonometrie leurs sinus, la raison des sinus, & la raison des côtez sont aussi connus. Je mets donc la raison du côté BE, au côté BS, comme z à d, & je fais cette Analogie, comme z est à d: de même le côté BE, $k + x$, est au côté BS $\frac{dk + dx}{z}$. Et $CS = CB + BS$, $y + \frac{dk + dx}{z}$, ou $\frac{zy + dk + dx}{z}$. Il est aisé de voir, que si Fig. 39. le point S tomboit entre B & C, l'on auroit $CS = CB - BS$, $y - \frac{dk - dx}{z}$ ou $\frac{zy - dk - dx}{z}$. Et que si le point c tomboit entre B & S, l'on auroit $cS = BS - cB$, $\frac{dk + dx}{z} - y$, ou $\frac{dk + dx - dy}{z}$, ou $-\frac{zy + dk + dx}{z}$.

De plus les trois angles du triangle FSC sont donnez, & ensuite la proportion de CS à CF, qui soit comme z à e, & la toute CF sera $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$.

L'angle CSF est le même que l'angle BSE connu dans le triangle EBS; l'angle CFS est celui, que CF doit faire avec la donnée EF, & il a été déterminé en proposant la question; l'autre angle FCS est aussi connu 32. 1. Eucl.

Je connois donc, comme dans les triangles précedens, le rapport du côté CS au côté CF, que je pose comme z à e; & je dis, $z : e :: CS$, $\frac{zy + dk + dx}{z} : CF$, $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$.

En même façon AG, que je nomme l, est donnée, & BG est $l - x$; & à cause du triangle BGT, la proportion de BG à BT est aussi donnée, qui soit comme z à f; & BT sera $\frac{fl - fx}{z}$; & $CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$.

AG est donnée, parce que c'est la partie de la ligne AB donnée de posi-

tion, qui est prise entre les lignes AD, GH aussi données de position. Fig. 39.
AG est nommée l; & $BG = AG - AB$, $l - x$.

Les angles du triangle BGT sont connus, car l'angle BGT est celui, qui se fait par la rencontre des lignes AB, GH données de position; l'angle TBG est 15. 1. Eucl. égal à l'angle CBA; que la ligne CB doit faire avec la donnée AB, & que la question a déterminé; le troisiéme angle BTG est aussi connu 32. 1. Eucl.

La proportion des côtez BG, BT connuë par la Trigonometrie, soit comme z à f; l'on fait $z : f :: BG, l - x : BT, \frac{fl - fx}{z}$; & $CT = CB + BT$, $y + \frac{fl - fx}{z}$ ou $\frac{zy + fl - fx}{z}$.

Puis derechef la proportion de TC à CH est donnée, à cause du triangle TCH, & la posant comme z à g, on aura $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$.

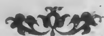
Les angles du triangle TCH sont donnez, car l'angle CTH vient d'être connu sous le nom de BTG; l'angle CHT est celui, que la ligne CH doit faire avec la donnée GH, & il a été donné par la question; le troisiéme est leur complement à deux droits.

Que la proportion du côté CT au côté CH, connuë par la Trigonometrie, soit comme z à g; & que l'on fasse $z : g :: CT, \frac{zy + fl - fx}{z} : CH, \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$.

M. DESCARTES se contente ici d'avoir trouvé la valeur des quatre lignes cherchées CB, CD, CF, CH: il achevera la solution du Problême, Liv. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. 2. &c.

La quantité z a commencé la raison des côtez de tous les triangles.

L'on pourroit commencer une raison par une quantité, & une autre raison par une autre; mais il vaut mieux n'introduire qu'une lettre z, que plusieurs dans le calcul. Lorsque z represente l'unité, comme elle le fait ici, cela donne de la facilité non seulement pour le calcul, où elle pourroit être omise dans les termes, dans lesquels elle multiplie, ou divise; mais encore quand il faut déterminer la valeur de ces mêmes termes: parce que l'unité ne fait aucun changement à la valeur des quantitez, qu'elle multiplie, ou qu'elle divise.



SECTION IV.

Reflexions ſur le Calcul precedent.

M. DESCARTES.

ET ainſi vous voyez, qu'en tel nombre de lignes données par poſition, qu'on puiſſe avoir, toutes les lignes tirées deſſus du point *C* à angles donnez, ſuivant la teneur de la queſtion, ſe peuvent toûjours exprimer chacune par trois termes, dont l'un eſt composé de la quantité inconnuë *y* multipliée ou diviſée par quelqu'autre connuë; & l'autre, de la quantité inconnuë *x*, auſſi multipliée ou diviſée par quelqu'autre connuë, & la troiſiéme d'une quantité toute connuë, excepté ſeulement ſi elles ſont paralleles, ou bien à la ligne *AB*, auquel cas le terme composé de la quantité *x* ſera nul; ou bien à la ligne *CB*, auquel cas celui qui eſt composé de la quantité *y* ſera nul; ainſi qu'il eſt trop manifeſte, pour que je m'arrête à l'expliquer. Et pour les ſignes + & —, qui ſe joignent à ces termes, ils peuvent être changez en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyez auſſi, que multipliant pluſieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantitez *x* & *y*, qui ſe trouvent dans le produit, n'y peuvent avoir que chacune autant de dimenſions, qu'il y a eu de lignes, à l'explication deſquelles elles ſervent, qui ont été ainſi multipliées; en ſorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimenſions, en ce qui ne ſera produit que par la multiplication de deux lignes; ni plus de trois, en ce qui ne ſera produit que par la multiplication de trois; & ainſi à l'infini.

La valeur des lignes tirées du point *C* ſur les données, n'aura pas plus de trois termes, mais elle peut en avoir moins. Les inconnuës ne peuvent avoir dans chaque terme qu'autant de dimenſions, qu'il y a de lignes multipliées pour le produire, parceque ces inconnuës n'ont qu'une dimenſion dans chacune des lignes, qu'on doit multiplier: or *x*, *y* ſe multipliant, ne peuvent produire qu'une quantité de deux dimenſions *xy*; *y* multipliant *y*, ne peut produire que le quarré *yy*; de même ſi ces inconnuës, *x*, *y*, *y*

se multiplient, comme il arrive quand on cherche le produit de trois lignes, elle donneront une grandeur de trois dimensions xyy, *&c.* Mais les inconnuës peuvent avoir moins de dimensions dans un terme, qu'il n'y a eu de lignes multipliées pour le produire, & c'est lors qu'une des lignes est connuë ou donnée. Pour les signes ils varieront de toutes les manieres imaginables, à cause des positions differentes possibles des lignes données. Voyez les Exemples de L.2. Part.2. Sect.2.& 3.de L.3. Part.4. Sect.4. Art.2.

Lorsque toutes les lignes données sont paralleles entr'elles, il n'y a qu'une inconnuë dans la valeur des lignes, que l'on tire du point C sur les données.

PROBLEME.

SOient données les trois lignes paralleles Fig. 40. AB, DR, SE; il faut trouver le point C, d'où l'on puisse tirer la ligne CB sur AB faisant l'angle donné CBA; la ligne CD sur DR faisant l'angle donné CDR; la ligne CE sur SE faisant l'angle donné CES: il faut de plus que le quarré de CD soit égal au rectangle $CB \times CE$. Fig. 40.

Je prolonge CB, jusqu'à ce qu'elle coupe les deux autres paralleles en R & en S. Les paralleles étant données, leur distance est connuë. Nommons BR, b; BS, c; & l'inconnuë CB, y; nous aurons $CR = CB + BR$, $y + b$; $CS = CB + BS$, $y + c$. $z = 1$.

Dans le triangle CRD nous connoissons tous les angles, car 1° l'angle CRD est égal à l'angle CBA que la question a determiné. 2° L'angle CDR est celui, que la ligne CD doit faire avec DR, & que la question a aussi déterminé. 3° L'angle DCR est connu 32. 1. Eucl. Si nous connoissons les angles, par la Trigonometrie nous connoissons leurs sinus, la raison de ces sinus, & la raison des côtez opposez aux angles. Soit la raison du côté CR au côté CD, comme z à d; nous aurons cette analogie $z : d :: CR, y + b : CD, \frac{dy + bd}{z}$.

Nous connoissons aussi tous les angles du triangle CSE, car 1° l'angle CSE est égal à l'angle CBA, 2° l'angle CES est celui, que la ligne CE doit faire avec la donnée ES. 3° L'angle SCE est le complement des deux autres à deux droits. Par la Trigonometrie nous connoissons la raison du côté CS au côté CE; que ce soit comme z à e; nous ferons $z : e :: CS, y + c : CE, \frac{ey + ce}{z}$. La valeur des lignes cherchées CB, CD, CE ne contient donc qu'une seule inconnuë y, lorsque les lignes données sont paralleles entr'elles.

La seule inconnuë dont on se sert alors, peut indifferemment se nommer y ou x, quelque situation qu'ayent les lignes données: & la distinction entre les lignes paralleles à AB, & les lignes paralleles à CB est nulle en ce sens. Cette distinction se fait pourtant dans le Problême de Pappus, dans lequel M. DESCARTES suppose, que les lignes exprimées par x sont dans une position à peu près horizontale, & que les lignes exprimées

FIG. 40. par y approchent de la verticale : ainſi lorſque les paralleles données ſont poſées horizontalement, comme Fig. 40. l'on dit qu'elles ſont paralleles à AB, ou aux x ; & la lettre x n'eſt pas employée dans la valeur des lignes cherchées. Lorſque les paralleles données ſont miſes verticalement ; l'on dit qu'elles ſont paralleles à CB, ou aux y ; & l'on ne ſe ſert pas de la lettre x dans l'expreſſion de la valeur des lignes cherchées.

Achevons le Problême. L'on demande $\overline{CD}^2 = CB \times CE$, $\frac{ddyy + 2bddy + bbdd}{zz} = \frac{eyy + cey}{z}$; $ddyy + 2bddy + bbdd = ezyy + cezy$; $ddyy - ezyy + 2bddy - cezy = - bbdd$; $yy + \frac{2bddy - cezy}{dd - ez} = \frac{-bbdd}{dd - ez}$. Et ajoûtant de chaque côté $\frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}cceezz}{d^4 - 2ddez + eezz}$, l'on fait $yy + \frac{2bddy - cezy}{dd - ez} + \frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}cceezz}{d^4 - 2ddez + eezz} = \frac{-bbdd}{dd - ez} + \frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}cceezz}{d^4 - 2ddez + eezz}$. Ce dernier membre étant reduit à la même denomination, l'équation eſt $yy + \frac{2bddy - cezy}{dd - ez} + \frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}cceezz}{d^4 - 2ddez + eezz} = \frac{bbddez - bcddez + \frac{1}{4}cceezz}{d^4 - 2ddez + e^{e}zz}$, dont la racine quarrée eſt $y = - bdd + \frac{1}{2}cez + \sqrt{\frac{bbddez - bcddez + \frac{1}{4}cceezz}{d^4 - 2ddez + eezz}}$ à la ligne droite. $z = 1$; $d = 2$; $e = 3$.

C'eſt pourquoi ſi ſur la ligne SB prolongée je prends $CB = y$, & que par le point C je mene l'infinie Cc parallele à AB, elle ſera le lieu cherché, & tous ſes points comme c ſatisferont au Problême ; ce qui eſt évident puiſque $cb = CB$, 34. 1. Eucl. ; le triangle crd égal au triangle CRD, le triangle $cſe$ égal au triangle CSE, parceque CD & cd, CE & ce ſont paralleles. L'on peut donc faire au point c le même calcul qu'au point C.

SECTION V.

Comment on connoît de quel degré eſt un Problême, & comment on trouve tous les points, qui ſatisfont à un Problême.

M. DESCARTES.

Comment on trouve que ce Problême eſt plan, lorſqu'il n'eſt

DE plus à cauſe que pour determiner le point C, il n'y a qu'une ſeule condition qui ſoit requiſe, à ſavoir que ce qui eſt produit par la multiplication d'un certain nombre de ces lignes ſoit égal, ou (ce qui n'eſt de rien plus malaiſé) ait la proportion donnée, à ce qui eſt produit par la multiplication des autres ; on peut prendre

prendre à discretion l'une des deux quantitez inconnuës x ou y, & chercher l'autre par cette équation ; en laquelle il est évident, que lorsque la question n'est point proposée en plus de cinq lignes, la quantité x, qui ne sert point à l'expression de la premiere peut toûjours n'y avoir que deux dimensions. De façon que prenant une quantité connuë pour y, il ne restera que $xx = +$ ou $- ax +$ ou $- bb$: & ainsi on pourra trouver la quantité x avec la Regle & le Compas, en la façon tantôt expliquée. Même prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x ; & ainsi on aura une infinité de divers points, tels que celui, qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.

point proposé en plus de cinq lignes.

Il se peut faire aussi, la question étant proposée en six, ou plus grand nombre de lignes ; s'il y en a entre les données, qui soient paralleles à BA, ou BC, que l'une des deux quantitez x ou y n'ait que deux dimensions en l'équation, & ainsi qu'on puisse trouver le point C avec la Regle & le Compas.

Mais au contraire, si elles sont toutes paralleles, encore que la question ne soit proposée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra être ainsi trouvé, à cause que la quantité x ne se trouvant point en toute l'équation, il ne sera plus permis de prendre une quantité connuë, pour celle qui est nommée y, mais ce sera elle, qu'il faudra chercher. Et pour ce qu'elle aura trois dimensions, on ne la pourra trouver, qu'en tirant la racine d'une équation cubique, ce qui ne se peut generalement faire, sans qu'on y employe pour le moins une Section conique. Et encore qu'il y ait jusques à neuf lignes données, pourveu qu'elles ne soient point toutes paralleles, on peut toûjours faire, que l'équation ne monte que jusques au quarré de quarré. Au moyen de quoi on la peut aussi toûjours resoudre par les Sections coniques, en la façon que j'expliquerai ci-après. Et encore qu'il y en ait jusques à treize, on peut toûjours faire, qu'elle ne monte que jusques au quarré de cube. Ensuite de quoi, on la peut resoudre par le moyen d'une ligne, qui n'est que d'un degré plus composée que les Sections coniques, en la façon

que j'expliquerai aussi ci-après. Et ceci est la premiere partie de ce que j'avois ici à démontrer : mais avant que je passe à la seconde, il est besoin que je die quelque chose en general de la nature des lignes courbes.

Cette Section aura deux Articles, qui expliqueront les deux parties du Titre.

ARTICLE I.

Comment on connoît de quel degré est un Problême.

1. TOutes les fois que la derniere équation d'un Problême peut se reduire à $yy = \pm ay \pm bb$, ou $xx \pm ax \pm bb$, l'on pourra trouver la quantité inconnuë y ou x par la Regle & le Compas, comme M. DESCARTES l'a enseigné Part. 2. Lorsque l'une des inconnuës ne va que jusques à son quarré, l'équation pourra toûjours se reduire à une de ces formules. Par exemple nous trouverons L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. que la multiplication Fig 38 de la ligne CB Fig. 38. par la ligne CF, & celle de la ligne CD par la ligne CH donnent deux produits, dont on compose cette équation.

$$yy = \frac{\begin{matrix} -dekzzy & -dezzxy & +bcfglx \\ +cfglzy & -cfgzxy & -bcfgxx \\ & +bcgzxy & \end{matrix}}{ez^3 - cgzz}$$

Determinons l'inconnuë x à être la grandeur connuë & determinée h, l'équation sera celle, qui suit, dans laquelle il ne reste que y d'inconnuë.

$$yy = \frac{\begin{matrix} -dekzzy & -dezzhy & +bcfglh \\ +cfglzy & -cfgzhy & -bcfghh \\ & +bcgzhy & \end{matrix}}{ez^3 - cgzz}$$

Faisons $\frac{-dekzz + cfglz - dezzh - cfgzh + bcgzh}{ez^3 - cgzz} = -a$; $\frac{bcfglh - bcfghh}{ez^3 - cgzz} = mm$; l'équation se reduira à $yy = -ay + mm$, $yy + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + mm$, $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + mm}$, & la valeur de y est connuë dans le cas, où $x = h$.

Part. 3. Sect. 1. 2. Dans ce Problême de Pappus * l'on multiplie les lignes données, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. en ajoûtant une ligne connuë, lorsque le nombre des cherchées est impair : & l'on fait toûjours deux produits. La raison de l'un de ces produits à l'autre peut être constante, ou variable. Je m'explique. La raison est constante, si elle est

la même dans tous les points ; qui satisfont au Problême, c'est-à-dire, en supposant que tous les points du cercle NCc Fig. 90. satisfont au Problême ; que si à un point C le produit $CB \times CF$ est égal au produit $CD \times CH$, il faut que à tous les autres points c, c, qui satisfont au Problême, le produit de $cb \times cf$ soit toûjours égal au produit $cd \times ch$; & que si au point C le produit $CB \times CF$ est double du produit $CD \times CH$, il faut que à tous les autres points c, c, le produit $cb \times cf$ soit toûjours double du produit $cd \times ch$: & si au point C le produit $CB \times CF$ est triple, &c. Alors la raison d'un produit à un autre est constante ; & comme une connuë $b = 1$ à une connuë $c = 1$, ou comme une connuë $b = 2$ à une connuë $c = 1$. &c. FIG. 90.

Mais si l'on demandoit que le premier produit fût au second, comme une variable x à une variable y, ou comme le quarré xx au quarré yy, ou que le premier produit $\pm$ une quantité variable fût égal au second $\pm$ une quantité constante, &c. Lorsque ces quantitez x, y vont en augmentant, ou en diminuant, les produits feroient de même ; & après avoir été l'un double de l'autre, ils pourroient être l'un triple, quadruple, &c. de l'autre. Alors la raison des produits seroit variable, & ne seroit plus constamment, comme une connuë à une connuë, mais comme une indeterminée à une autre indeterminée.

L'on pourroit encore exiger, que les produits fussent entr'eux, comme une constante b à une variable x. Alors la raison, qui seroit entre les produits, ne seroit pas constante.

Comme ces produits, ainsi que l'assure * M. DESCARTES avec Pappus, peuvent être en raison donnée quelconque, la raison que le premier a au second peut être variable, aussi bien que constante. Il faut donc observer, que lorsque Mr DESCARTES a ici determiné le degré d'un Problême, il a toûjours supposé, que la raison d'un produit à un autre est constante.

* Part. 3. Sect. 1. 3. 5. & Tom. 3. Lett. 81. *Ut Exempli causâ si rectangulum ex FC in CD debeat esse majus, quàm rectangulum ex CB in CH quâdam datâ quantitate, vel quid simile.*

3. Lorsque la question de Pappus est proposée en trois, ou quatre lignes, & que la raison du produit de deux lignes au produit de deux autres est constante, les inconnuës ne peuvent monter qu'à leur quarré comme on l'a dit Sect. 4. & comme on le verra dans presque tous les Exemples du L. 2. Part. 2. Sect. 2. Ainsi tous ces cas se resoudront par la Regle & le Compas, puisqu'ils se rapportent à la formule $zz = \pm az \pm bb$, comme on a dit n. 1. & qu'ils sont des Problêmes plans.

Et comme il peut se trouver dans les équations, qui resultent des deux produits, que l'on ait $+yy$, $-yy$; $+\frac{axx}{b}$, $-\frac{axx}{b}$; &c. qui se detruisent ; le lieu pourra être à la ligne droite, & sera toûjours un Problême plan, qui pourra se construire avec la Regle & le Compas. Car l'équation pourra être $ay - xy + mm = 0$, & mettant h pour x, $ay - hy + mm = 0$, $y = \frac{mm}{h-a}$.

Fig. 40. Mais si la raison du premier produit au second est variable, outre les deux inconnuës, que la multiplication des deux lignes cherchées introduit dans quelques termes du produit, il y en entrera encore necessairement quelqu'autre, ce qui fera monter l'équation au troisiéme, quatriéme, &c. degré. Par exemple, si dans le Problême de la Section 4e, où les cherchées sont CB, y; CD, $\frac{dy+bd}{z}$; CE, $\frac{ey+ce}{z}$; l'on avoit demandé, que le quarré de CD fût au rectangle $CB \times CE$, comme le quarré yy est à une connuë a; l'on auroit trouvé $\frac{addyy+2abddy+abbdd}{zz} = \frac{ey^4+cey^3}{z}$; $addyy + 2abddy + abbdd = ezy^4 + cezy^3$; $ezy^4 + cezy^3 - addyy - 2abddy - abbdd = 0$; $y^4 + cy^3 \frac{-addyy-2abddy-abbdd}{ez} = 0$. qui est une équation de quatre dimensions, qui ne peut pas se construire par la Regle & le Compas; mais qui demande une Section conique, comme on le verra Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 2.

Il peut encore arriver, le Problême étant proposé en trois, ou quatre lignes, que les quarrez xx, yy des inconnuës ne soient pas dans l'équation, mais que le rectangle xy de ces mêmes inconnuës y soit; comme il arriveroit dans l'équation n. 1. Alors, comme on l'apprend dans les Traitez des lieux Geometriques, ce peut être un lieu à l'hyperbole par rapport à ses asymptotes, & l'on en donnera des exemples Liv. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 8. M. DESCARTES * reconnoît dans une de ses Lettres, qu'il a omis ce cas dans la resolution generale, qu'il a donné du Problême de Pappus.

*Tom 3. Lett. 71. à M. de Beaune.

4. Lorsque la question est proposée en cinq lignes, qui ne sont pas toutes paralleles entr'elles; alors, comme il y en a quelques-unes qui se coupent, l'on aura l'inconnuë AB, x, avec CB, y aussi inconnuë: & si la raison d'un produit de trois lignes cherchées au produit des deux autres cherchées & d'une donnée est constante; l'une des deux inconnuës, comme y peut monter au cube y^3, parceque trois lignes, qui se multiplient, auront chacune y dans quelqu'un de leurs termes; tandis que l'autre x ne sera élevé, que jusqu'à son quarré xx, parceque des trois lignes, qui se multiplient, il n'y en aura que deux, qui ayent l'inconnuë x; la troisiéme étant une ligne donnée. C'est pourquoi l'on doit chercher l'inconnuë x, & prendre pour y une determinée h, & pour y^3, le cube h^3; afin que la seule inconnuë x, qui reste dans l'équation ne montant au plus qu'au quarré, le Problême soit plan, & puisse se construire avec la Regle & le Compas, suivant la methode de Part. 2. Les exemples sont Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 4. Apresent deux Exemples éclairciront la chose. Soit 1e l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 4a^3 = axy$, vous ordonnez ainsi les termes $x = \frac{y^3-2ayy-aay+4a^3}{ay}$ & faisant $y = a$, vous avez $x = \frac{a^3-2a^3-a^3+4a^3}{aa} = 2a$ valeur de x, lorsque y est égale à a. Soit 2e l'équation $y^3 + 2ayy = axy + axx$; vous arrangez ainsi les termes xx

Fig. 122. Fig. 122.

$+xy = \frac{x^3 + 2ayy}{a}$, & si $y = a$, $xx + ax = 3aa$, $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ FIG. 122.
$= 3aa + \frac{1}{4}aa = \frac{13}{4}aa$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{13}{4}aa} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{13}$ valeur de x, lorſqu'on ſuppoſe $y = a$.

Si la raiſon d'un produit à un autre étoit variable, par exemple comme yy à xx, y^3 à x^3, &c. il eſt évident que les inconnuës pourroient être élevées au cinquiéme, ſixiéme, &c. degré.

Il peut arriver auſſi, qu'une des inconnuës x n'ait qu'une, ou deux dimenſions, & que le Problême ſoit plan, alors il ſe conſtruira par une ligne droite, ou une circulaire. Les Exemples ſe trouvent l. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 2.

5. Lorſque la queſtion eſt propoſée en cinq lignes toutes paralleles entr'elles, une ſeule inconnuë y ſe trouve dans l'équation, & cette inconnuë montera juſqu'au cube y^3, parceque trois lignes, dans leſquelles y ſe trouve, ſe multiplieront. Alors la valeur de y ne peut être connuë, que par une extraction de racine cubique, laquelle extraction demande ordinairement une Section conique. Comme on le verra Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1.

Quelquefois l'on n'a pas beſoin de Section conique. Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1.

Et ſi l'on demandoit qu'un produit fût à un autre, comme yy à y^3 &c. l'on voit aiſément, que l'inconnuë iroit à une dimenſion plus élevée, que n'eſt le cube.

6. A plus forte raiſon, quand le Problême eſt propoſé en ſix, ou plus grand nombre de lignes, toutes paralleles entr'elles, l'on ne pourra pas le reſoudre, comme les Problêmes plans, Part. 2. L. 1. Mais s'il y a 6. 7. 8. lignes paralleles données, il faut ordinairement des Sections coniques. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. Vous trouverez au même Art. §. 5. qu'étant données huit paralleles, l'équation s'abaiſſe au ſecond degré.

L'équation montera juſqu'à une dimenſion bien plus haute encore, ſi les produits n'ont pas entr'eux une raiſon conſtante.

Il ſe peut faire auſſi, la queſtion étant propoſée en ſix, ou plus grand nombre de lignes, s'il y en a entre les données, qui ſoient paralleles à *BA*, ou à *BC*; que les quantitez x, ou y n'ayent qu'une dimenſion : pourveu, comme on l'a déja dit ſouvent, que les produits ayent entr'eux une raiſon conſtante. Voyez L. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. §. 4.

7. Lorſqu'il y a ſix lignes, & que la raiſon des produits eſt conſtante, l'équation ne peut monter qu'aux cubes des inconnuës; parceque les lignes cherchées ſe multiplient trois à trois. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. §. 1.

Les cubes peuvent encore s'effacer, & l'équation ſera deprimée à un moindre degré.

8. Lorſque les lignes propoſées ſont ſept, l'on aura d'un côté, quatre

Fig. 122. des lignes cherchées, qui se multiplieront, & qui donneront un quarré de quarré y^4, si les produits ont une raison constante. Et il faut alors une Section conique. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. §. 3.

9. Lorsqu'il y a huit lignes données, & que la raison donnée entre les produits est constante; les lignes cherchées se multiplieront quatre à quatre; les inconnuës ne peuvent monter qu'au quatriéme degré; & la resolution se fera par les Sections coniques.

10. Lorsqu'il y a neuf lignes données, avec une raison constante des produits, d'un côté cinq lignes se multiplieront, & pourront produire la cinquiéme puissance y^5 d'une des inconnuës; mais de l'autre côté quatre lignes seulement des cherchées se multiplieront avec une cinquiéme donnée, & l'autre inconnuë ne pourra être élevée qu'à la quatriéme puissance x^4. Alors l'on determinera y, & l'on cherchera la valeur de x par les Sections coniques.

11. Jusques ici les Problêmes, lorsque la raison du premier produit au second est constamment la même, ne peuvent être, pour le plus, que solides: mais soit par la position des lignes, qui ne donneront qu'une ou deux lignes, où x se trouve, soit par la multiplication des lignes, qui ont y, par celles, qui ont x, il peut arriver, que l'équation soit abaissée, jusqu'à être un Problême plan. V. L. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 2.

12. Mais si les neuf lignes données sont toutes paralleles à une seule, une des inconnuës x ne sera pas dans les produits, dont la raison est toûjours la même; & l'autre inconnuë y sera élevée à la quatriéme dimension y^4 dans le produit de quatre des lignes cherchées avec une donnée, & à la cinquiéme dimension y^5, dans le produit des cinq autres lignes cherchées; & alors il faut une ligne plus composée d'un degré, que les Sections coniques, comme on l'explique Liv. 3. Part. 5.

13. A plus forte raison lorsque les lignes données, toutes paralleles entr'elles sont dix, onze, douze, & que la raison des produits est constante faudra-t-il une ligne plus composée d'un degré, que les Sections coniques. Car lorsque les lignes données sont dix, chaque produit aura y^5; lorsqu'elles sont onze, un produit aura y^6, l'autre y^5; lorsqu'elles sont douze, les deux produits auront chacun y^6.

De même de quelque maniere, que les lignes données se coupent, si elles sont dix, elles se multiplient cinq à cinq, & les produits pour le plus contiendront les cinquiémes puissances y^5, x^5; si elles sont onze, le produit de six des cherchées contiendra le quarré de cube y^6, le produit des cinq autres & d'une donnée le premier sursolide x^5; si elles sont douze, un produit de six lignes contiendra le quarré de cube y^6, l'autre produit le quarré de cube x^6. Et tous ces cas se resoudront par une ligne plus composée d'un degré, que ne sont les Sections coniques, comme on l'expliquera L. 3. Part. 5.

Il arrivera quelquefois, ou par la disposition des lignes données, ou par la multiplication de celles, qui contiennent l'inconnuë x avec celles, qui contiennent l'inconnuë y, que l'équation descendra au quarré de quarré, ou au cube, ou au quarré, ou à la racine de x. Fig. 112.

14. Lorsque le nombre des lignes données est treize, si elles ne sont pas toutes paralleles entr'elles, & que les produits sont comme une quantité connuë à une connuë : le produit de sept des lignes cherchées pourra être de sept dimensions y^7 ; & l'autre de six des cherchées & d'une donnée ne sera que de six x^6. L'on doit alors chercher la valeur de x, & determiner y ; afin que la resolution ne demande plus, qu'une ligne d'un degré plus composée, que les Sections coniques.

Ces équations peuvent, comme les precedentes & pour les mêmes raisons, être deprimées à de moindres degrez.

15. Mais si les treize lignes sont toutes paralleles à une seule, une des inconnuës x ne s'y trouvera pas, & l'autre y sera dans un des produits y^6, & dans l'autre y^7. Et il faudra une ligne plus composée de deux degrez que les Sections coniques.

16. L'on peut continuer un semblable raisonnement dans un plus grand nombre de lignes à l'infini. M. DESCARTES L. 3. Part. 5. Sect. 5. veut, que de deux en deux dimensions, la ligne, qui doit être employée à la solution d'un Problême, soit toûjours plus composée d'un degré. Il veut que pour le cube & le quarré de quarré l'on se serve du Cercle & d'une Section conique ; pour les équations de cinq & de six dimensions du cercle & d'une courbe plus composée d'un degré, que les Sections coniques ; pour les équations de sept & de huit dimensions d'un cercle & d'une courbe plus composée de deux degrez que les Sections coniques, &c. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 5. n. 3.

ARTICLE II.

Comment on trouve tous les Points qui satisfont à un Problême.

1. IL est à propos d'expliquer ici la difference qu'il y a entre lieu plan & Problême plan, lieu solide & Problême solide, lieu sursolide & Problême sursolide. Le lieu plan est une ligne droite, ou une circonference de cercle ; le Problême plan est celui qui se resout, où dont tous les points qui satisfont au Problême, se trouvent par l'intersection de deux lignes droites, ou de deux circonferences de cercles, ou d'une ligne droite & d'un cercle. Le lieu solide est une des trois Sections coniques ; le Problême solide est celui, dont tous les points, qui resolvent la question, se trouvent par l'intersection d'une Section conique avec une autre Section conique, ou avec un cercle, ou avec une ligne droite. Le lieu sursolide est une courbe plus composée que les Sections coniques ; le Problême sursoli-

de eſt celui pour la ſolution duquel il faut employer une courbe plus composée que les Sections coniques, quelle que ſoit l'autre ligne, avec laquelle ſe coupe. Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 10. De ſorte que comme on va le voir ici, un lieu ſolide ſe conſtruira, c'eſt-à-dire, qu'on trouvera tous les points, qui compoſent une Section conique, avec un Problême plan, & en n'employant que la ligne droite & la circulaire.

L'on conſtruit quelquefois un lieu ſurſolide, & l'on trouve tous les points d'une ligne plus compoſée, que les Sections coniques, avec un Problême plan, en ne ſe ſervant que de lignes droites & circulaires. L'on en verra des Exemples, L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

2. Au reſte ce que l'on va dire ici, n'eſt autre choſe qu'une maniere de décrire une ligne courbe, en trouvant une infinité de ſes points, qu'on joint enſuite. Et comme cette Methode ſera décrite au long, L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. L'on n'en traitera maintenant, qu'autant qu'il eſt neceſſaire pour comprendre ces mots de M. DESCARTES, *même prenant ſucceſſivement infinies diverſes grandeurs pour la ligne* y, *on en trouvera auſſi infinies pour la ligne* x; *& ainſi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui eſt marqué* C, *par le moyen deſquels on décrira la ligne courbe demandée.*

FIG. 41. 3. Soit propoſée l'équation $yy = ax$ à la parabole, il faut avec cette équation décrire une parabole Fig. 41. qui eſt un lieu ſolide. Parceque x n'a qu'une dimenſion, c'eſt elle que je chercherai, & je determinerai y; je trouverai tous les points D, d de la parabole par des Problêmes plans, & en ne me ſervant que de la ligne droite, & de triangles ſemblables.

Prenons l'infinie ACc pour l'axe, le point A pour le ſommet, $AB = a$ pour le parametre: les x doivent ſe prendre ſur l'axe AC, dont elles ſont les coupées, les y ſont les appliquées. Je determine y à être la ligne b connuë. L'équation $yy = ax$, ou $x = \frac{yy}{a}$ devient $x = \frac{bb}{a}$. Faiſons un angle quelconque IEH, dont les lignes ſont indefinies, coupons $EF = a$, $EG = b$, $FH = b$; joignons FG, & par le point H menons HI parallele à FG; nous avons cette Analogie, EF, a: EG, b:: FH, b: GI, $\frac{bb}{a} = \frac{yy}{a} = x$. De ſorte que $GI = x$ eſt l'abſciſſe, qui répond à l'appliquée $y = b$. Ainſi nous prendrons ſur l'axe ACc, l'abſciſſe $AC = GI$, x, & au point C nous appliquerons CD, $y = b$, faiſant l'angle droit ACD, & nous aurons un point D, qui ſatisfait au Problême, ou qui donne l'équation $x = \frac{bb}{a} = \frac{yy}{a}$, & $ax = yy$.

Enſuite pour avoir un autre point d, je determine y à être la ligne m; & je cherche l'abſciſſe, qui correſpond à cette appliquée $y = m$. Je prends ſur les côtez du triangle IEH, la ligne $EF = a$, $Eg = m$, $Fh = m$; je joins Fg, & par le point h je mene hi parallele à Fg. J'aurai encore, EF, a : Eg, m:: Fh, m: gi, $\frac{mm}{a} = \frac{yy}{a} = x$ puiſque $y = m$. De ſorte que l'abſciſſe égale à gi, x eſt celle qui répond à l'appliquée $y = m$. C'eſt pour-

pourquoi je prens $Ac = gi$, x; & au point c j'applique cd, $y = m$, parallele à CD; & un autre point d de la parabole est trouvé.

En determinant successivement y à être des lignes de differente grandeur, ou en determinant la grandeur de differentes ordonnées, je trouverai de la même maniere differentes grandeurs des abscisses x correspondantes.

Les differentes ordonnées étant appliquées à l'axe donneront differens points D, d; qui seront joints par une ligne courbe ADd, elle sera la moitié de la parabole cherchée.

Si en appliquant CD, on la prolonge de l'autre côté de l'axe, de sorte que CK soit égale à CD; & qu'on prolonge de même les autres appliquées, l'on aura les points K, k par lesquels l'autre partie AKk de la parabole passera.

4. Il faut décrire une ellipse Fig. 42. qui est un lieu solide, avec l'équation $\frac{2a}{p}yy = 2ax - xx$, dans laquelle l'axe est $2a$, le parametre p. Ce qui se peut faire 1° en cherchant x & en déterminant y, 2° en cherchant y & en determinant x. Ce sera toûjours un Problême plan, parceque vous trouverez les points m, d, D, h, &c. de la courbe avec la regle & le compas, ou avec la ligne droite & le cercle.

Si c'est x, que vous cherchez; arrangez ainsi les termes $xx - 2ax = -\frac{2a}{p}yy$, $xx - 2ax + aa = aa - \frac{2a}{p}yy$; $x = a \mp \sqrt{aa - \frac{2a}{p}yy}$. Prenons l'axe $2a$ pour l'unité. Cet axe est AB, & $AC = CB$, a.

Soit $y = p$, l'équation devient $x = a \mp \sqrt{aa - 2ap}$. cherchez Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. La moyenne proportionelle f entre l'unité $2a$ & p, & vous aurez $2ap = ff$, & $x = a \mp \sqrt{aa - ff}$.

Maintenant Fig. 25. faites $NL = a$, $LM = f$, l'angle NLM droit, menez MR parallele à NL, NP parallele à LM & perpendiculaire à MR; enfin du centre N, de l'intervale NL décrivez le cercle LQR. Suivant ce qui a été démontré, Part. 2. Art. 1. n. 2. Vous aurez la moindre racine vraye MQ, $x = a - \sqrt{aa - ff}$, la plus grande vraye MR, $x = a + \sqrt{aa - ff}$. Fig. 25.

Soit Fig. 42. A l'origine des x: coupez $Ae = MQ$ Fig. 25. & Ag Fig. 42. $= MR$ Fig. 25. aux points e, g élevez les perpendiculaires ed, gh chacune égale à p, & vous aurez deux ordonnées y correspondantes aux deux valeurs de x. Et parceque dans l'équation $x = a \mp \sqrt{aa - \frac{2a}{p}yy}$, yy est autant le quarré de $-y$, que de $+y$: il suit qu'à chaque valeur de x il répond des $-y$, comme des $+y$. Ainsi aux mêmes points e, g vous éleverez de l'autre côté de l'axe AB, les perpendiculaires $ea = ed$, $gl = gh$. Vous aurez donc les quatre points d, h, l, a, qui sont à l'ellipse, qu'on veut décrire.

Enfin si vous déterminez plusieurs valeurs de $\pm y$, & que vous cherchiez de la même façon les valeurs de x, qui leur répondent : vous trouverez

autant de points que vous voudrez, lesquels appartiendront à la même ellipse. Après quoi en joignant tous ces points par une ligne courbe *ADBK*, vous décrirez l'ellipse, dont l'équation est $\frac{2a}{p}yy = 2ax - xx$.

5. Si c'est y que vous cherchez ; les termes de l'équation se disposeront ainsi $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, $\pm y = \sqrt{px - \frac{pxx}{2a}}$.

Soit d'abord $x = a = AC$ Fig. 42. l'équation sera $\pm y = \sqrt{ap - \frac{1}{2}ap}$. $= \sqrt{\frac{1}{2}ap}$. Cherchez, comme auparavant, Fig. 7. la moyenne proportionelle *GI* entre *HG* que vous ferez égale à la ligne *AC*, a, & *GF*, que vous ferez égale à $\frac{1}{2}p$; *HG* sera $\sqrt{\frac{1}{2}ap} = \pm y$. Ensuite au point *C* Fig. 42. où finit la valeur de $x = a$; vous éleverez les perpendiculaires, d'un côté *CD*, $+ y$; de l'autre *CK*, $- y$; chacune égale à $\sqrt{\frac{1}{2}ap}$; & vous aurez les points *D*, *K* à l'ellipse.

Soit encore $x = \frac{1}{3}a = Af$. L'équation devient $\pm y = \sqrt{\frac{1}{3}ap - \frac{1}{18}ap}$ $= \sqrt{\frac{5}{18}ap}$. Vous chercherez une moyenne proportionelle entre *AC*, a & $\frac{5}{18}p$, laquelle vous appliquerez perpendiculairement au point f, en faisant fm, $+ y = \sqrt{\frac{5}{18}ap}$; fn, $- y = \sqrt{\frac{5}{18}ap}$. Ou bien parceque $\sqrt{\frac{5}{18}ap}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}ap}$; vous chercherez la moyenne proportionelle entre a & $\frac{5}{2}p$; elle sera $\sqrt{\frac{5}{2}ap}$, & vous en prendrez le tiers, que vous appliquerez en fm, fn.

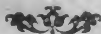
Vous pourrez, en suivant la même Methode, trouver autant de points que vous voudrez ; lesquels étant joints par la courbe *ADBK*, vous aurez décrit l'ellipse, dont l'équation a été proposée.



LA GEOMETRIE DE M. DESCARTES.

LIVRE II.

CE Livre sera divisé en cinq Parties. Dans la premiere M. DESCARTES parle de la nature des lignes courbes ; dans la seconde il poursuit la resolution du Problême de Pappus ; dans la troisiéme il montre que l'on peut déduire les proprietez des lignes courbes de leur équation ; ce qu'il fait voir en particulier de leurs tangentes ; dans la quatriéme il explique les proprietez de quelques verres de figure ovale, qui peuvent servir à la reflexion, & à la refraction de la lumiere ; dans la cinquiéme il parle des lignes décrites sur une surface courbe.



PARTIE PREMIERE.

De la Nature des lignes courbes.

SECTION I.

Des Problêmes Geometriques.

M. DESCARTES.

LEs Anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problêmes Geometriques, les uns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires; c'eſt-à-dire, que les uns peuvent être conſtruits, en ne traçant que des lignes droites & des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y employe pour le moins quelque Section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelqu'autre ligne plus compoſée.

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Geometrie.

Cet endroit eſt tiré de Pappus, qui s'explique ainſi avant la Prop. 5. L. 3. de ſes Collections Mathematiques. * *Les Anciens ont determiné trois genres de Problêmes Geometriques; dont ils ont voulu que les uns fuſſent appellez Problêmes plans, les autres Problêmes ſolides, les troiſiémes Problêmes lineaires. C'eſt avec raiſon qu'ils ont nommez Problêmes plans ceux, qui peuvent ſe reſoudre par des lignes droites & par la circonference d'un cercle; en effet les lignes, avec leſquelles l'on reſout ces Problêmes, ont leur origine dans un plan. Mais tous les Problêmes qui ſont reſolus en prenant une, ou pluſieurs Sections coniques pour leur conſtruction, s'appellent ſolides; parceque pour les conſtruire, il eſt neceſſaire de ſe ſervir des ſurfaces de Figures ſolides, à ſçavoir des coniques. Il reſte le troiſiéme genre de Problêmes, qu'on appelle lineaires, parceque pour leur conſtruction, outre les lignes dont on a déja parlé, l'on en prend, qui ont une origine changeante; telles que ſont les Spirales, les Quadratrices, les Conchoïdes, & les Ciſſoïdes; qui ont pluſieurs proprietez admirables.*

* *Problematum Geometricorum antiqui tria genera eſſe ſtatuerunt, & eorum alia quidem plana appellari, alia ſolida, alia linearia. Quæ igitur per rectas lineas & circuli circunferentiam ſolvi poſſunt, meritò plana dicuntur; etenim, lineæ per quas ejuſmodi Problemata ſolvuntur, in plano ortum habent. Problemata verò quæcumque ſolvuntur aſſumptâ in conſtructionem aliqua Coni Sectione vel pluribus, ſolida appellantur; namque ad conſtructionem neceſſe eſt ſolidarum Figurarum ſuperficiebus, nimirum conicis uti. Reſtat tertium genus, quod lineare appellatur; lineæ enim aliæ præter jam dictas, in conſtructionem aſſumuntur varium & tranſmutabilem ortum habentes, quales ſunt Helices, & quas Græci τετραγωνίζουσας, nos Quadrantes dicere poſſumus, Conchoïdes & Ciſſoïdes, quibus multa & mirabilia accidunt... neque coni ſectiones facile eſt in plano deſignare.*

Pappus dit preſque la même choſe avant la Prop. 31. L. 4. ** où il dit

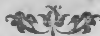
** *Varium & difficilem ortum habent, ex inordinatis ſuperficiebus & motibus implicatis facta.*

que ces dernieres lignes ont une origine changeante & difficile, étant faites par des surfaces irregulieres, & par des mouvemens embarrassez.

M. DESCARTES a retenu le nom, que les Anciens ont donné aux differens Problêmes de la Geometrie; mais ce n'est pas pour les mêmes raisons: comme on le peut voir, Sect. 2. Art. 2. Car il prétend avec raison que les Sections coniques se peuvent décrire sur un plan, comme l'on y décrit un cercle; & que la conchoïde, la cissoïde & plusieurs autres lignes, qui servent aux Problêmes lineaires, peuvent se décrire par un, ou plusieurs mouvemens uniformes. Pappus ne dit pas qu'il est impossible; mais qu'il n'est pas facile de décrire les Sections coniques sur un plan. M. DESCARTES appelle encore Problêmes plus que solides ceux, que l'on vient de nommer lineaires. Au Titre du L. 2.

Quelques Geometres divisent les Problêmes de la Geometrie en quatre especes, de cette maniere. Le Problême simple ou lineaire est celui qui se peut resoudre par l'intersection de deux lignes droites; le Problême plan est celui, qui se peut resoudre par l'intersection d'une ligne droite & d'un cercle, ou par celle de deux circonferences de cercle; le Problême solide est celui, qui se peut resoudre par l'intersection d'une circonference de cercle avec une des trois Sections coniques, ou par l'intersection de deux Sections coniques; le Problême sursolide est celui, qui peut se resoudre par l'intersection d'une des courbes, dont on a déja parlé, avec une autre d'une dimension plus élevée, ou par l'intersection de deux lignes d'une dimension plus élevée, que ne le sont les Sections coniques, quelle que soit cette dimension.

L'on auroit pû diviser les Problêmes de Geometrie d'une autre façon, car cela est fort arbitraire, & en assigner divers genres. Les Problêmes du premier genre seroient ceux, qui peuvent se resoudre en y employant des lignes d'une dimension, c'est-à-dire, des lignes droites, dont les équations ne contiennent que des inconnuës d'une dimension, x, y; les Problêmes du second genre seroient ceux, qui ne peuvent se resoudre, que l'on n'y employe au moins une ligne de deux dimensions, c'est-à-dire un cercle, ou une parabole, ou une ellipse, ou une hyperbole, dans les équations desquelles les deux inconnuës, ou l'une des deux ont deux dimensions, ou dans lesquelles le plan des deux inconnuës se trouve, yy, xy, xx; les Problêmes du troisiéme genre seroient ceux, que l'on ne peut construire, que l'on n'y employe au moins une ligne de trois dimensions, & dans l'équation desquelles une inconnuë, ou toutes les deux montent à la troisiéme dimension, ou dans lesquelles le solide fait par les deux inconnuës se trouve, y^3, xyy, xxy, x^3; les Problêmes du quatriéme genre, &c.



SECTION II.

Des Lignes Geometriques & des Mechaniques.

M. DESCARTES.

MAis je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrez entre ces lignes plus composées, & je ne sçaurois comprendre, pourquoi ils les ont nommées méchaniques plûtôt que geometriques. Car de dire que ç'ait été, à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudroit rejetter par même raison les cercles & les lignes droites, vû qu'on ne les décrit sur le Papier qu'avec un Compas, & une Regle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instrumens, qui servent à les tracer, étant plus composez que la Regle & le Compas, ne peuvent être si justes; car il faudroit pour cette raison les rejetter des méchaniques, où la justesse des Ouvrages, qui sortent de la main, est desirée; plûtôt que de la Geometrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, & qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Je ne dirai pas aussi, que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils se sont contentez, qu'on leur accordât, qu'ils pussent joindre deux points donnez par une ligne droite, & décrire un cercle d'un centre donné, qui passât par un point donné. Car ils n'ont point fait de scrupule de supposer outre cela, pour traiter des Sections Coniques, qu'on pût couper tout cone donné par un plan donné. Et il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes, que je prétens ici introduire; sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être muës l'une par l'autre, & que leurs interfections en marquent d'autres; ce qui ne me paroît en rien plus difficile. Il est vrai qu'ils n'ont pas aussi entierement reçu les Sections Coniques en leur Geometrie, & je ne veux pas entreprendre de changer les noms, qui ont été approuvez par l'usage; mais

il eſt, ce me ſemble, très-clair, que prenant, comme on fait, pour Geometrique ce qui eſt précis & exact, & pour méchanique ce qui ne l'eſt pas; & conſiderant la Geometrie comme une ſcience, qui enſeigne generalement à connoître les meſures de tous les corps, on n'en doit pas plûtôt exclurre les lignes les plus composées, que les plus ſimples, pourvû qu'on les puiſſe imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuivent, & dont les derniers ſoient entierement reglez par ceux qui les precedent: car par ce moyen on peut toûjours avoir une connoiſſance exacte de leur meſure. Mais peut-être que ce qui a empêché les Anciens Geometres de recevoir celles, qui étoient plus composées, que les Sections Coniques; c'eſt que les premieres, qu'ils ont conſiderées, ayant par hazard été la Spirale, la Quadratrice & ſemblables, qui n'appartiennent veritablement qu'aux méchaniques, & ne ſont point du nombre de celles que je penſe devoir être ici reçûës, à cauſe qu'on les imagine décrites par deux mouvemens ſeparez, & qui n'ont entr'eux aucun rapport, qu'on puiſſe meſurer exactement: bien qu'ils ayent après examiné la Conchoïde, la Ciſſoïde, & quelque peu d'autres, qui en ſont; toutesfois à cauſe qu'ils n'ont peut être pas aſſez remarqué leurs proprietez, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premieres. Ou bien c'eſt que voyant, qu'ils ne connoiſſoient encore, que peu de choſes touchant les Sections Coniques, & qu'il leur en reſtoit même beaucoup, touchant ce qui ſe peut faire avec la Regle & le Compas, qu'ils ignoroient, ils ont cru ne devoir point entamer de matiere plus difficile. Mais pource-que j'eſpere, que d'oreſnavant ceux qui auront l'adreſſe de ſe ſervir du calcul Geometrique ici propoſé, ne trouveront pas aſſez de quoi s'arrêter touchant les Problêmes plans, ou ſolides; je croi qu'il eſt à propos, que je les invite à d'autres recherches, où ils ne manqueront jamais d'exercice.

M. DESCARTES après avoir donné dans ſa Geometrie la maniere de reſoudre les Problêmes plans & ſolides, donne la methode de reſoudre ceux des plus que ſolides, qui montent à cinq ou ſix dimenſions, & il aſſure à la fin du Livre troiſiéme, qu'il ne faut que ſuivre la même voye, pour conſtruire tous ceux, qui ſont plus compoſez à l'infini. Ainſi il peut inviter à des recherches, où l'on ne manquera jamais d'exercice.

Après avoir expliqué ce que c'eſt que Geometrique & Méchanique en general, nous dirons quelles lignes ſont Geometriques, ou Méchaniques ; & nous rapporterons quelques lignes tant Geometriques que Méchaniques en particulier.

ARTICLE I.

Ce que c'eſt que Geometrique & Mechanique.

1. L'On appelle Geometrique ce qui eſt précis & exact, méchanique ce qui ne l'eſt pas. Une operation Geometrique eſt celle, qui me donne une meſure, ou un rapport exact ; une operation méchanique eſt celle, qui ne me donne ni une meſure, ni un rapport exact. La raiſon de cela eſt, parceque dans la pratique, qui eſt la mechanique, l'on ne peut jamais atteindre à l'exactitude de la Geometrie & de ſes ſuppoſitions. Jamais on ne trace une ligne ſans largeur, une ſurface ſans épaiſſeur, jamais on ne fera un levier, qui ne touche ſon appui qu'en un point, jamais on ne polira ſi bien un plan & un globe, qu'ils ne ſe touchent qu'en un point, &c.

2. La meſure doit être de même eſpece, que la choſe meſurée, la longueur meſure la longueur, la ſurface meſure la ſurface, le ſolide meſure le ſolide.

La meſure doit auſſi être ce qu'il y a de plus aiſé à connoître dans chaque eſpece. La ligne droite eſt la meſure de toutes les lignes, parce qu'étant la plus courte qui ſe puiſſe tirer d'un point à un autre, elle eſt parfaitement connuë, dès que les points ſont donnez. L'on ne dit point, que l'on connoiſſe exactement la grandeur d'une ligne courbe, que l'on ne puiſſe aſſigner la ligne droite qui lui eſt égale ; & c'eſt ce que l'on appelle la rectification de la courbe. La meſure des ſurfaces eſt le quarré, parceque ſes côtez étant égaux, & ſes angles droits, il ſuffit de donner la ligne, qui eſt ſon côté, pour qu'il ſoit parfaitement connu. Nous ne croyons pas connoître geometriquement une ſurface curviligne, ou mixte, que nous ne puiſſions dire à quel quarré, ou ce qui eſt le même par la Prop. 26. 6. Eucl. à quelle figure rectiligne elle eſt égale ; ce qui s'appelle trouver la quadrature d'une Figure curviligne, ou mixte. La meſure des ſolides eſt le cube, parceque ſes côtez étant égaux & ſes angles droits, il ne faut qu'avoir un de ſes côtez, pour le connoître exactement.

3. Les Geometres qui n'ont pas cru, qu'ils puſſent trouver geometriquement & exactement la longueur des lignes courbes, ont voulu au moins connoître exactement, lorſque cela s'eſt pû faire, le rapport, que chaque point d'une courbe, a avec chaque point d'une ligne droite. Ce rapport s'exprime par une équation, qui, en ſuppoſant deux de ſes quantitez variables, eſt la même pour tous les points de la courbe. Tous les lieux Geometriques ſont des exemples de ce rapport.

L'on connoît donc le rapport de chaque point *D*, *d* de la parabole *DAK*

FIG. 41. Fig. 41. avec les points C, c de la ligne droite ACc, par cette équation $yy = ax$, qui est la même dans tous les points D, d de la courbe, pourveu qu'on suppose les deux quantitez y, x variables ; y qui represente successivement toutes les appliquées CD, cd ; x qui represente aussi de suite toutes les coupées AC, Ac. Le rapport connu du point D de la courbe avec le point C de la droite consiste donc en ce que CD, y est moyenne proportionelle entre AC, x & $AB = a$, d'où il suit 17. 6. Eucl. que le quarré yy de CD est égal au rectangle ax sous le parametre AB, a & l'abscisse AC, x. Il est évident par la nature de la parabole, que l'on aura le même rapport de chaque point d de la parabole avec chaque point c de l'axe ; & que l'expression de ce rapport sera toûjours le même. L'operation qui montre exactement un semblable rapport entre les points d'une ligne courbe & ceux d'une ligne droite, est appellé par M. DESCARTES Geometrique ; & celle qui ne le montre pas exactement, méchanique.

4. Les Anciens Geometres n'ont appellé geometrique, que ce qui se fait avec la Regle & le Compas ; nulle autre operation n'étoit geometrique ; de toutes les lignes, la droite & la circulaire étoient les seules geometriques. Toutes les autres lignes courbes, même les Sections coniques, passoient pour méchaniques, & toute operation, pour laquelle on les employoit, étoit aussi appellée méchanique. Pappus s'explique ainsi sur le Problême, qui cherche deux moyennes proportionelles entre deux lignes données, avant la 5. Prop. L. 3. de ses Collections Mathematiques. * *Les Anciens Geometres n'ont jamais pû construire geometriquement ce Problême, qui de sa nature est solide, parcequ'il n'est pas aisé de décrire les Sections Coniques sur un plan.... Mais avoüant que le Problême étoit solide, ils ne l'ont construit qu'avec des instrumens, conformément à Apollonius, qui l'a resolu par les Sections coniques, d'autres l'ont construit par les lieux solides d'Aristée, aucun par les lieux qu'on appelle proprement plans, Nicomedes l'a fait par la Conchoïde.* Il est certain que Pappus exclud les Sections coniques & la Conchoïde des lignes geometriques, puisqu'il dit, que le Problême des deux moyennes proportionelles a été construit par les Sections coniques & par la Conchoïde, sans avoir été construit geometriquement. Il est certain aussi, que Pappus ne tient pour lignes Geometriques que la droite & la circulaire, puisque pour prouver que ce Problême n'a pas été construit geometriquement, il n'apporte d'autre raison, si ce n'est, que personne ne l'a construit par les lieux qu'on appelle proprement plans, qui sont la ligne droite & la circulaire.

* *Antiquì Geometræ Problema antedictum in duabus lineis rectis, quod naturâ solidum est, Geometricâ ratione innixi construere non potuerunt, quoniam neque coni Sectiones facile est in plano designare.... Hi autem asserentes Problema solidum esse, ipsius constructionem instrumentis tantùm perfecerunt, congruenter Apollonio Pergæo, qui & resolutionem ejus facit per coni Sectiones ; alii per locos solidos Aristæi : nullus autem per ea, quæ propriè plana appellantur. At Nicomedes & ratione illud facit per lineam Conchoïdem.*

5. Non seulement les Anciens Geometres, mais encore les nouveaux jusques à M. DESCARTES ont mis la même difference entre les operations

tions & les lignes Geometriques & Méchaniques ; comme on en peut juger par ces paroles, que Viete a mis à la tête de son Apollonius Gallus. * *Lorsque j'ai proposé aux Mathematiciens le Problême d'Apollonius, qui consiste à trouver un cercle, qui en touche trois autres donnez ; c'étoit afin qu'on le construisit geometriquement, & non pas mechaniquement. Ainsi lorsque vous construisez le Problême avec une hyperbole. Vous ne réussissez pas, car les hyperboles ne se décrivent pas d'une maniere démonstrative en Geometrie. Menechmus a trouvé la duplication du cube par les Paraboles, Nicomedes par les Conchoides : est-ce que pour cela l'on a trouvé geometriquement la duplication du cube ? Archimedes a trouvé la quadrature du cercle par la Spirale, Dinostrate par la Quadratrice ; est-ce donc que l'on a trouvé la quadrature du cercle ? certainement aucun Geometre ne l'assurera ; Euclide & tous ses Sectateurs se recrieroient.... D'ailleurs les Anciens ont toûjours craint de décrire les Sections coniques sur un plan.*

** Problema Apollonii de describendo circulo, quem tres dati contingant, clarissime Adriane, Geometricâ ratione construendum proposui φιλομαθέσι, non mechanicâ. Dum itaque circulum per hyperbolas tangis, rem acu non tangis. Neque enim hyperbolæ describuntur in Geometricis Κατ ἐπιστημονικὸν λογόν. Duplicavit cubus per Parabolas Menechmus, per Conchoïdas Nicomedes : an igitur duplicatus est Geometricè cubus ? Quadravit circulum per volutam inordinatam Dinostratus, per ordinatam Archimedes ; an igitur Geometricè quadratus est circulus ? Id verò nemo pronuntiabit Geometra. Reclamaret Euclides & tota Euclideorum schola.... Et alioqui conicas Sectiones in plano describere semper veriti sunt Antiqui.*

6. M. DESCARTES dit dans cette Section, que les Anciens n'ont pas entierement reçu les Sections coniques dans leur Geometrie. En effet d'un côté ils les ont reçu, puisqu'ils en ont fait des traitez, comme Apollonius, qui passe pour un grand Geometre, & qu'ils ont parlé des lieux solides, qui sont des Sections coniques. D'un autre côté aussi ils ne les ont pas reçu entierement, parcequ'ils n'ont point cru exactes & geometriques ni leurs descriptions sur un plan, ni les constructions de Problêmes, que l'on fait avec elles.

ARTICLE II.

Quelles lignes sont appellées Geometriques ou Méchaniques.

1. LEs raisons, pour lesquelles M. DESCARTES a mis les Sections coniques & une infinité d'autres courbes au nombre des lignes Geometriques, ont été trouvées si bonnes ; que l'on s'est depuis ce tems-là écarté avec lui du sentiment de tous les Geometres, qui l'avoient precedé.

2. La premiere définition que M. DESCARTES apporte des lignes Geometriques & Méchaniques, se trouve dans cette Section en ces termes. *Il est, ce me semble, clair, que prenant, comme on fait, pour geometrique ce qui est précis & exact, & pour méchanique ce qui ne l'est pas, & considerant la Geometrie comme une science, qui enseigne generalement à connoître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plûtôt exclurre les lignes les plus composées, que les plus simples ; pourveu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent, & dont les derniers sont entierement*

reglez par ceux qui les precedent : car par ce moyen on peut toûjours avoir une connoissance exacte de leur mesure. Les lignes mechaniques sont celles qu'on imagine décrites par deux mouvemens separez, & qui n'ont entr'eux aucun rapport, qu'on puisse mesurer exactement.

La seconde définition des lignes geometriques, qui est dans la Section 4. suivante, est celle-ci. *Je ne sçache rien de meilleur que de dire, que tous les points de celles, qu'on peut nommer Geometriques, c'est-à-dire, qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont necessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même.*

L'on peut donc définir, suivant la pensée de M. DESCARTES, une ligne Geometrique, celle 1. que l'on peut concevoir décrite par un mouvement continu, ou par plusieurs mouvemens, qui dépendent les uns des autres; 2. celle dont chaque point a avec une ligne droite un rapport, qui se peut exprimer exactement par une équation, laquelle sera la même en chacun de ces points, comme on vient de l'expliquer, Art. 1. n. 3.

Une ligne Méchanique est celle, 1. que l'on peut concevoir décrite par deux mouvemens separez, qui ne dépendent point l'un de l'autre; 2. dont chaque point n'a pas avec chaque point d'une ligne droite un rapport, qui se puisse exactement exprimer par une équation, laquelle soit la même en chacun de ses points.

Il faut se souvenir, que par un rapport exact, l'on entend un rapport exactement connu, comme celui, qui est entre deux lignes droites connuës, & qui ne peut se trouver entre deux lignes courbes, ou entre une ligne droite & une courbe, à moins que l'on ne sçache à quelle ligne droite une courbe est exactement égale.

* Hist de l'Academie Royale des Sciences 1705.

FIG. 41.

3. * *Depuis* M. DESCARTES, *on a fixé plus precisément par la Geometrie des infinimens petits l'idée des courbes geometriques & mechaniques.* Expliquons, autant qu'il est necessaire àpresent, ce que l'on entend par Geometrie des infiniment petits. Soit ADd Fig. 41. une courbe, dont l'axe est ACc, sur laquelle vous prenez la coupée AC, x; & au point C vous appliquez CD, y; menez fg parallele & infiniment proche de CD, & par le point D la ligne Dh parallele à Cf. Puisque les lignes CD, fg sont infiniment près l'une de l'autre, les lignes Cf, Dh, Dg sont infiniment petites, & l'arc de courbe Dg peut être regardé comme une ligne droite à cause de son infinie petitesse. La petite ligne Cf sera la difference de AC, x; car l'on appelle ici difference d'une grandeur variable AC, x, la portion infiniment petite Cf, dont on conçoit que cette grandeur variable augmente, ou diminuë infiniment peu, lorsqu'elle devient Af; & cette difference Cf de x s'exprime par dx, que l'on appelle expression differentielle. De même la ligne infiniment petite gh, est la difference, dont la variable CD, y croit, ou décroit infiniment peu, lorsqu'elle devient fg;

& l'expreſſion differentielle de gh ſera dy. Et ſi l'on nomme AD, u ; la difference Dg ſera du, & Dg eſt regardée, comme un prolongement de LD tangente de la courbe en D. Maintenant à cauſe des paralleles LC, Dh les triangles rectilignes LCD, Dhg, ſont équiangles dans leſquels $LC = 2AC = 2x$, ſi la courbe eſt ſuppoſée une parabole, comme on l'a vû dans les traitez des Sections coniques. L'on peut donc faire cette Analogie LC, $2x : CD$, $y :: Dh = Cf$, $dx : hg$, dy, $ydx = 2xdy$, $y = \frac{2xdy}{dx}$. Equation differentielle, qui peut convenir, comme il eſt évident, à tous les points de la parabole ; auſſi bien que l'expreſſion Algebrique $yy = px$ leur convient.

Ce calcul qu'on appelle differentiel, pour le diſtinguer d'un autre, qui convient auſſi à la Geometrie des infiniment petits, & qu'on nomme calcul integral, s'applique à pluſieurs lignes méchaniques, à qui le calcul Algebrique ne peut convenir. Ainſi toute ſorte de courbes peut avoir une équation, qui exprime le rapport de chaque point de la courbe à chaque point d'une ligne droite, par une expreſſion, qui renferme ou les appliquées & les abſciſſes, ou les differences des appliquées & des abſciſſes.

4. La Geometrie des infiniment petits a donné lieu à ces nouvelles definitions. *Les courbes Geometriques ſont celles, dont on peut exprimer & déterminer la nature par le rapport des ordonnées & des abſciſſes, qui ſont les unes & les autres des grandeurs finies. Les Méchaniques ſont celles, dont on ne peut ainſi exprimer la nature, parceque les ordonnées & les abſciſſes n'ont point de rapport reglé. Dans la Geometrie des infiniment petits, la nature de toutes les courbes ſoit Geometriques ſoit Méchaniques peut également s'exprimer, par le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux differences correſpondantes. Toute la difference entre les courbes Geometriques & Méchaniques eſt, que les Méchaniques ne peuvent s'exprimer que par ce rapport, au lieu que les Geometriques peuvent auſſi s'exprimer par le rapport des ordonnées & des abſciſſes.* *Hiſtoire de l'Academie des Sciences 1704.*

Ainſi les lignes Geometriques ſont celles, dont 1° les deux coordonnées, ou les abſciſſes & les ordonnées correſpondantes AC, CD Fig. 41. ſont deux lignes droites finies, qui ſe rencontrent en un point C, où elles font un angle donné ACD ; 2° dont l'une des coordonnées AC, Ac commence toûjours à un point fixe A, & ſe prend ſur une ſeule ligne ACc ; & l'autre des coordonnées CD, cd eſt toûjours parallele à elle-même : 3° dont l'équation peut ne contenir, que deux inconnuës x, y, qui expriment les coordonnées, & n'avoir que des termes propres du calcul Algebrique $yy = ax$. 4° Et cette équation doit exprimer le rapport de chaque point de la courbe, dont elle eſt l'équation, à chaque point de la ligne droite, avec qui la courbe eſt comparée : de ſorte que cette équation ſoit la même pour chaque point de la courbe. FIG 41.

Les lignes Méchaniques ſont celles, dont 1° les coordonnées qui entrent dans l'équation, ſont des grandeurs infiniment petites, ou dont l'une, ou

Fig. 41. toutes les deux peuvent être des arcs de courbes, ou dont ces coordonnées ne se rencontrent point & ne font point d'angle. 2° Dont les ordonnées y peuvent n'être pas paralleles entr'elles, & peuvent même partir toutes d'un seul point. 3° Dont l'équation ne peut pas être exprimée par des termes du seul calcul Algebrique, mais qui contient des termes tirez du calcul differentiel. 4° Et cette équation doit exprimer le rapport de tous les points de la courbe, dont elle est l'équation differentielle, à tous les points d'une autre ligne droite ou courbe; de sorte que cette équation soit la même pour chaque point de la courbe.

5. L'on remarque aussi que les lignes Geometriques ne sont rencontrées par leur axe, qu'un nombre de fois déterminé; & que ce nombre n'excede jamais le nombre des racines de l'équation; de sorte que si l'inconnuë monte au cube y^3, l'axe ne rencontrera la courbe pour le plus qu'en trois points; il peut aussi la rencontrer en deux points, ou en un seulement, ou même ne la rencontrer du tout point. Au lieu qu'il y a des lignes Méchaniques tellement contournées, que leur axe les rencontre en une infinité de points; & comme chaque point, où l'axe rencontre une courbe, donne une nouvelle racine de l'équation de cette courbe; il faudroit que l'équation de certaines courbes méchaniques eût une infinité de racines.

La raison pourquoi une courbe peut être ainsi figurée, c'est que toute ligne courbe tant les Geometriques, que les Méchaniques, ou bien rentrent en elles-mêmes, comme le cercle & l'ellipse, car poursuivez à les décrire aussi long-tems qu'il vous plaira, vous repasserez toûjours sur la ligne courbe déja décrite: ou bien s'étendent à l'infini, comme la parabole & l'hyperbole, si l'on continuë toûjours à les décrire. Ainsi certaines lignes méchaniques s'étendent à l'infini de telle sorte qu'elles rencontrent leur axe en une infinité de points, ou en le touchant, ou en le coupant.

Pour éclaircir tout ce qui a été expliqué dans cette Section, il reste à parler de quelques lignes soit Geometriques, soit Méchaniques.

ARTICLE III.

De quelques lignes Geometriques & Méchaniques.

1. DE la Conchoïde. Les droites infinies *AP*, *CB* se coupent à angles droits au point *B*; sur *AP* l'on détermine *BA* & *BP*; autour du point *P*, Fig. 43. qui s'appelle Pole, l'on fait tourner l'infinie *PA*, de sorte qu'elle passe toûjours sur *CB*, qui s'appelle Directrice ou Regle; & dans toutes les positions, que *PA* peut avoir, l'on coupe au dessus & au dessous de *CB*, les lignes *CD*, *cd* égales à *BA*; la courbe qui joindra les points *D*, *D*, est la Conchoïde superieure, & celle qui joint les *d*, *d*, la Conchoïde inferieure. Nicomede en est l'inventeur, & il s'en est servi pour trouver deux moyennes proportionelles.

Pour avoir l'équation de la Conchoïde ſuperieure, du point quelconque D de la courbe abbaiſſez DF perpendiculaire ſur la directrice BC, & DG perpendiculaire ſur AP, $DG = FB$, $DF = GB$. Nommons AB, $a = CD$; BP, b; l'abſciſſe BF, $x = DG$; l'ordonnée FD, $y = BG$; $PG = PB + BG$, $b + y$. Fig. 43.

A cauſe des triangles équiangles PGD, CFD on a cette Analogie $PG, b + y : GD, x :: DF, y : FC, \frac{xy}{b+y}$. Dans le triangle rectangle DFC, $\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FC}^2$, $aa = yy + \frac{xxyy}{bb + 2by + yy}$; $aabb + 2aaby + aayy = bbyy + 2by^3 + y^4 + xxyy$; $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = 0$, équation de la Conchoïde ſuperieure.

La Conchoïde DAD eſt une ligne Geometrique, car 1° on la peut concevoir décrite par un mouvement continu, ſi l'on ſuppoſe que la ligne PA, ou PD paſſe toûjours par le centre C du cercle DKd, que ce centre gliſſe toûjours ſur la directrice BC, & que la continuelle interſection D marque une courbe DAD; 2° le rapport de chaque point D de la courbe à chaque point F de la droite BC s'exprime exactement par une équation, qui eſt la même en tous les points de la courbe. 3° La Conchoïde DAD a auſſi les conditions des lignes Geometriques marquées Art. 2. n. 4. Les abſciſſes x commencent en B, & ſe prennent ſur BC, en allant de B vers K; & les abſciſſes $-x$ de l'autre côté en allant vers c; les appliquées FD ſont toutes paralleles à BA. La directrice BC eſt l'axe; & B ſon ſommet.

L'on aura l'équation de la Conchoïde inferieure dad, ſi du point quelconque d l'on abaiſſe dg perpendiculaire ſur PA, & df perpendiculaire ſur BC, $Bg = df$, $dg = Bf$. Nommons $Cd = AB$, a; Bf, $x = dg$; df, $y = Bg$. $Pg = PB - Bg$, $b - y$.

A cauſe des triangles Pgd, dfC équiangles, Pg, $b - y : gd, x :: df, y : fC, \frac{xy}{b-y}$. Et dans le triangle rectangle dfC, $\overline{Cd}^2 = \overline{df}^2 + \overline{Cf}^2$, $aa = yy + \frac{xxyy}{bb - 2by + yy}$; $aabb - 2aaby + aayy = bbyy - 2by^3 + y^4 + xxyy$; $y^4 - 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy + 2aaby - aabb = 0$, équation de la Conchoïde inferieure, qui eſt une ligne Geometrique par les mêmes raiſons, qui prouvent, que la ſuperieure eſt Geometrique, puiſque l'interſection d du cercle avec la ligne PC décrit la courbe dad.

2. De la Ciſſoïde Fig. 44. le demi-cercle AFB étant donné avec la tangente infinie BG; du point A vous tirerez une infinité de lignes AG, Ag juſques à la tangente, qui couperont toutes la circonference du demi-cercle; coupez par tout $AD = FG$ priſe depuis la circonference juſqu'à la tangente, $Ad = fg$; joignez tous les points D, d par la courbe ADd; elle s'appelle Ciſſoïde, dont Diocles eſt l'inventeur. Si l'on donnoit l'autre demi-cercle, l'on décriroit l'autre partie AK. Fig. 44.

Pour avoir l'équation de la Ciſſoïde à un point quelconque D, du point D, tirez la perpendiculaire DC ſur AB, & du point F, où la ligne ADG coupe la circonference du cercle, la perpendiculaire FE auſſi ſur AB. Il

FIG. 44. faut d'abord démontrer que $CA = EB$, par la Prop. 10. 6. Eucl. la ligne AB est coupée comme AG: mais AG est tellement coupée que $AD = FG$: donc $AC = EB$.

Maintenant le diametre AB est l'axe de la Cissoïde, A son sommet, les abscisses AC, AE se prennent sur l'axe, les ordonnées CD, Ed sont paralleles. Nommons l'axe AB, a; l'abscisse AC, $x = EB$; l'appliquée CD, y; $AE = AB - EB$, $a - x$. EF est moyenne proportionelle entre AE, $a - x$ & EB, x: donc $\overline{EF}^2 = AE \times EB$, $ax - xx$, & $EF = \sqrt{ax - xx}$.

Dans les triangles équiangles ACD, AEF, AC, $x : CD$, $y :: AE$, $a - x : EF$, $\sqrt{ax - xx}$; $x\sqrt{ax - xx} = ay - xy$; & quarrant les deux membres; $ax^3 - x^4 = aayy - 2axyy + xxyy$. Divisons tout par $a - x$, nous ferons $x^3 = ayy - xyy$, équation à la Cissoïde. L'on trouvera la même équation à chaque d pris hors du cercle.

La Cissoïde passe par le point H milieu de la demi-circonference, car ayant tiré du centre c la ligne cH, qui est parallele à la base Bl du triangle ABl, parceque les angles en c & en B sont droits: Nous aurons 2. 6. Eucl. $Ac : cB :: AH : Hl$. Mais $Ac = cB$: donc $AH = Hl$. Et le point H est à la Cissoïde.

La Cissoïde est une ligne Geometrique par les mêmes raisons que l'on a dit pour la Conchoïde. En particulier, on peut concevoir qu'elle est produite, ainsi que Mr DESCARTES le demande, par des mouvemens, qui s'entresuivent, & qui dépendent les uns des autres. Le demi-cercle AFB est arrêté sur un plan; cH est une regle immobile arrêtée au centre c, & perpendiculaire au diametre AB; les regles AF, Bf roulent librement autour des Poles A, B extrêmitez du diametre; toutes ces Pieces ont une rainure ouverte. Un poinçon L passe dans les fentes des trois regles AF, Bf, cH. Cf est encore une regle ouverte comme le reste, qui glisse sur la regle AB, sur laquelle elle est toûjours perpendiculaire, un autre poinçon f entre dans la regle CD, la regle Bf & la circonference AfB: ainsi le poinçon L coule toûjours dans la regle cH, & le poinçon f dans la circonference du demi-cercle. Maintenant poussez Cf de A vers B, elle fera avancer le poinçon f dans la circonference AfB, & ce poinçon élevera la regle Bf; laquelle fera mouvoir le poinçon L dans la regle cH, & ce poinçon L menera avec soi & élevera la regle AF. L'intersection continuelle des regles Cf, AF décrira la courbe ADd, qui est la Cissoïde.

Dém. Au point quelconque D. Du point F abaissez la perpendiculaire FE sur le diametre AB. Les triangles AcL, BcL sont égaux, 4. 1. Eucl. Donc les angles $cAL = BAF$, & $cBL = ABf$ sont égaux; comme aussi 26. 3. Eucl. les arcs Af, BF: donc les abscisses AC, BE seront encore égales. Nommez le diametre AB, a; AC, $x = EB$; CD, y; AE, $= AB - BE$, $a - x$; & 13. 6. Eucl. $\overline{EF}^2 = AE \times EB = ax - xx$, & $EF = \sqrt{ax - xx}$.

Ensuite les perpendiculaires CD, EF sont paralleles, & les triangles équiangles ACD, AEF donnent cette Analogie, AC, $x : CD$, $y ::$ AE, $a - x : EF$, $\sqrt{ax - xx}$: d'où l'on tirera comme un peu auparavant $x^3 = ayy - xyy$ équation à la Cissoïde. Ce qu'il falloit démontrer.

3. De la spirale. Après avoir divisé le cercle $ABCD$ Fig. 45. & son rayon aA en autant de parties égales, comme ici en douze; si l'on suppose que pendant que le rayon aA parcourt des parties égales de la circonference en tems égaux, allant de A par B en C, D, A; le point a du centre parcourt aussi en tems égaux des parties égales du rayon allant de a vers A: de sorte que quand le point A du rayon sera revenu en A d'où il est parti, le point a du rayon se trouve aussi en A. Dans ce double mouvement le point a décrira la spirale $abcdA$, qui s'appelle la premiere spirale d'Archimede. La seconde spirale $AghiF$ sera décrite, si l'on suppose de même, que le point a après être arrivé en A continuë de parcourir la partie $AF = aA$ du rayon prolongé, tandis que le nouveau rayon aF parcourt la circonference concentrique du second cercle $FGHI$, toûjours parties égales en tems égaux. Et comme le rayon aF peut être prolongé à l'infini, l'on pourra décrire une infinité de spirales, que l'on considerera comme une seule continuée. Fig. 45.

On aura l'équation de la premiere spirale au point quelconque c, si l'on nomme la circonference du premier cercle donné $ABCDA$, a; & le rayon donné aA, b; & que l'on prenne l'axe indeterminé ABC, x pour une abscisse; & la droite correspondante ac, y pour une ordonnée $= a6$, parceque le rayon aA étant arrivé en aC, le point 6 tombe sur le point c. Maintenant il est évident, que comme toute la circonference a du cercle parcouruë en une minute par exemple, est à l'arc ABC, x parcouru en une demie-minute: de même le rayon b aussi parcouru en une minute est à la partie $a6 = ac$, y parcouruë en une demie-minute. Donc $ay = bx$; $y = \frac{bx}{a}$. L'on trouvera la même équation pour toute autre spirale $Aghi$, en nommant la circonference de son cercle $FGHI$, a; la droite AF, b; un arc quelconque FG du cercle, x; & la portion correspondante An du rayon $= Bg$, y.

La spirale est une ligne méchanique, parceque ses abscisses x sont des arcs de cercle; ses ordonnées ab, ac, ad partent toutes d'un seul point, & ne sont pas par consequent paralleles; les coordonnées ABC, ac ne se coupent point, & ne font pas un angle. Afin que le rapport des abscisses & des appliquées fût connu geometriquement, il faudroit connoître exactement le rapport des arcs de cercle à des lignes droites, de la circonference au rayon; c'est-à-dire, qu'il faudroit avoir trouvé la rectification de la circonference. Si l'on considere les spirales, que l'on peut faire à l'infini, en prolongeant aF, comme une seule spirale, la même ligne aAF, qui est comme l'axe, la rencontrera en une infinité de points.

FIG. 46. 4. De la Quadratrice. Etant donné le quart de cercle *ABCD* Fig. 46. avec la tangente *AH*. L'on fait tourner le rayon *AB* autour du centre *B*, & il parcourt en tems égaux parties égales de la circonference *ADC*; tandis que la droite *AH* deſcend le long du rayon *AB*, toûjours parallele à elle-même, & parcourant auſſi en tems égaux parties égales du rayon : de ſorte que le quart du rayon & le quart de l'arc *ADC* ſoient parcourus en même tems, la moitié du rayon & la moitié de l'arc *ADC* auſſi en même tems, &c. & que le rayon *AB* & la droite *AH* tombent en même tems ſur *BC*. L'interſection continuelle *E*, *e* de la ligne *AH* avec le rayon décrira la courbe *AEF*, dont l'inventeur eſt Diocles, & qu'on a nommé Quadratrice, parcequ'on s'en eſt ſervi pour la quadrature du cercle.

Nous aurons l'équation de la quadratrice, en nommant le quart *ADC* de la circonference du cercle, a; le rayon *AB*, b; car ces deux quantitez ſont données; les abſciſſes *AG*, *Ag*, x; les arcs correſpondans du quart de cercle *AD*, *Ad*, y. Et l'on aura cette Analogie, comme la circonference *ADC*, a parcouruë en une minute, au rayon *AB*, b auſſi parcouru en une minute : de même l'arc *AD*, y parcouru en un quart de minute eſt à la ligne *AG*, x auſſi parcouruë en un quart de minute; $by = ax$, $y = \frac{ax}{b}$.

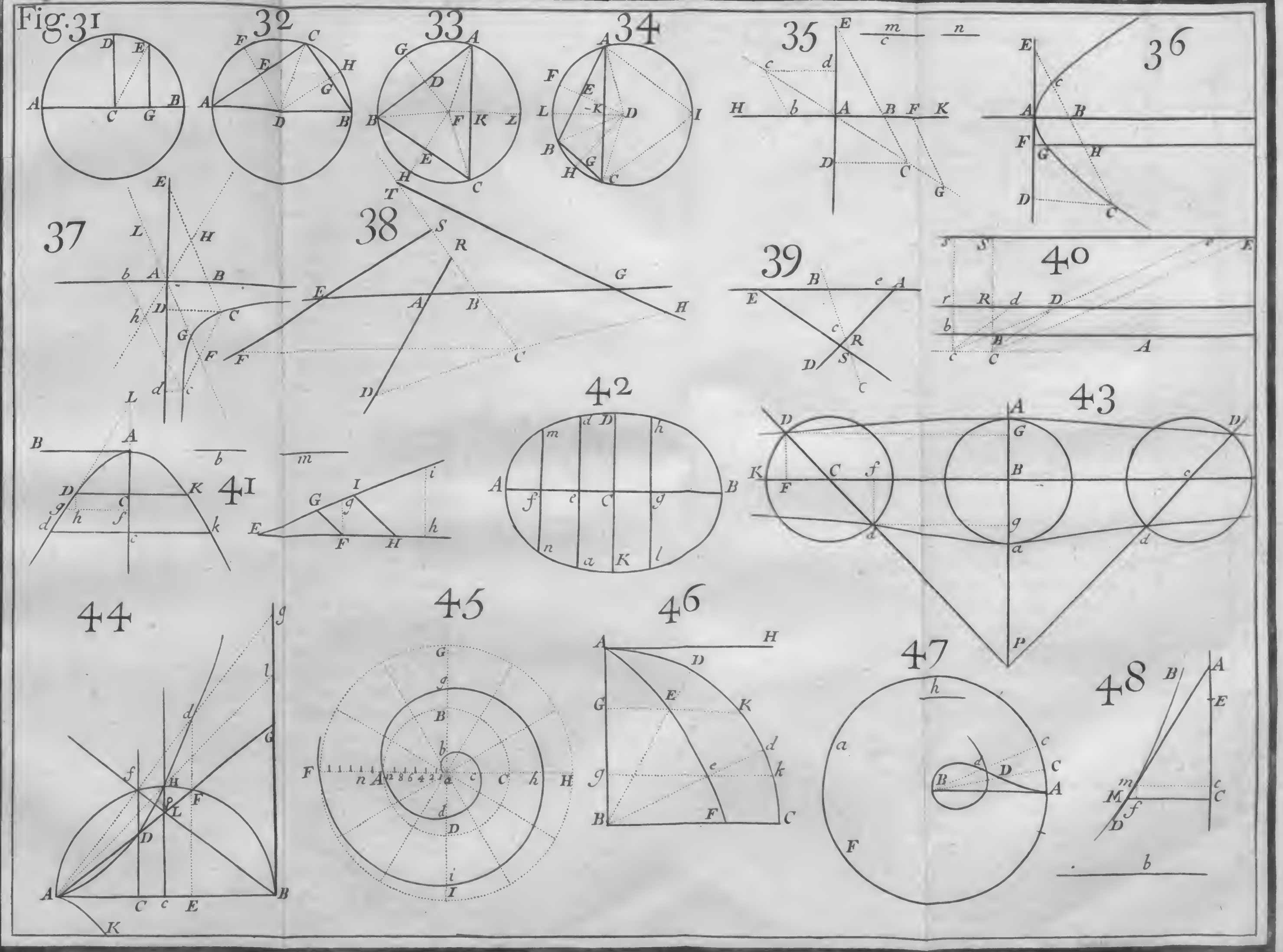
La Quadratrice eſt une ligne méchanique; parceque les arcs *AD*, *Ad* tiennent lieu d'appliquées; que les abſciſſes & les appliquées ne ſe rencontrent qu'au point *A*; & que pour avoir le rapport exact des x & des y, il faudroit connoître exactement le rapport des arcs de cercle avec des lignes droites.

L'on pourroit prendre les *AG*, *Ag*, x pour abſciſſes; les *GE*, *Ge*, z pour appliquées; & nommer les *EK*, *ek*, v; puiſque le rayon *AB* eſt b, tout le diametre du cercle eſt $2b$; ainſi comme on l'a dit ſouvent en parlant du cercle $\overline{GK}^2$, $\overline{gk}^2$ eſt 13. 6. Eucl. $2bx - xx$, & *GE*, $z = GK - EK$, $\sqrt{2bx - xx} - v$; l'on a donc à chaque point *E* de la quadratrice l'équation $z = -v + \sqrt{2bx - xx}$, mais il y a trois inconnuës, & deux arbitraires, avec leſquelles je ne puis pas certainement décrire la quadratrice; car ayant déterminé *AG*, x; il ne m'eſt plus permis de faire *EH*, v de la grandeur qu'il me plaît, mais elle doit être d'une certaine grandeur, comme on le voit par la deſcription de la quadratrice.

FIG. 47. 5. La courbe *ADd* Fig. 47. ſe décrit de cette maniere. Du point *B* comme centre l'on décrit un cercle *ACaF*, ſur lequel on prend un point fixe *A*; l'on tire les rayons *BC*, *Bc*; l'on fait les *CD*, *cd* moyennes proportionelles entre les arcs *AC*, *Ac* correſpondans, & une droite donnée b; l'on joint les points *D*, *d*, *d*, & la courbe *ADd* eſt décrite.

L'on aura ſon équation, en nommant les rayons *BC*, *Bc*, a; les arcs *AC*, *Ac*, x; qui ſeront les abſciſſes; les appliquées *BD*, *Bd*, y; les

DC,


Fig.31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48

DC, dc seront $BC - BD$, $Bc - Bd$, $a - y$. Maintenant par la construction, $\overline{DC}^2 = AC \times h$, $aa - 2ay + yy = hx$, $a - y = \sqrt{hx}$, $y = a - \sqrt{hx}$.

De plus parceque après que les AC, Ac ont une fois parcouru toute la circonference, l'on peut continuer à les prendre, en regardant le point A comme leur origine, de sorte que les abscisses soient toute la circonference $+ AC$, & ensuite deux fois toute la circonference $+ AC$, & ainsi à l'infini, il suit que la courbe ADd fait plusieurs tours & se coupe en differens points.

Cette courbe est méchanique, parceque ses abscisses sont des arcs, ses ordonnées partent d'un même point B, & ne sont point paralleles entr'elles, & ne font aucun angle avec les abscisses correspondantes, qu'elles ne rencontrent pas. Elle coupe aussi son axe AB en plusieurs points.

6. BMm Fig. 48. est une courbe, dont AC est l'axe, CM une appliquée, AD la tangente, AC la soûtangente. L'on appelle soûtangente d'une courbe la partie AC du diametre prise depuis le point C, où l'ordonnée CM, qui vient du Contact M, coupe le diametre, jusqu'au point A, où la tangente MA, qui touche au point M, coupe le même diametre. Une proprieté de cette courbe; c'est que la soûtangente est toûjours égale à une ligne donnée b. Menez cm infiniment proche & parallele à CM, & mf parallele & égale à Cc. Les droites $Cc = mf$, Mf, & l'arc Mm sont infiniment petits. Fig. 48.

L'on nomme CM, y; Mf, dy, c'est-à-dire difference de y, parceque c'est la difference infiniment petite, dont CM, y differe de cm, y. Et prenant E pour l'origine des x; on aura Ec, x; Cc, dx, c'est à dire difference de x, parceque c'est la difference infiniment petite dont EC, x differe de Ec, x.

L'arc Mm, parcequ'il est infiniment petit, peut passer pour une ligne droite: ainsi dans les triangles équiangles ACM, Mfm, AC, $b : CM$, $y ::$ mf, $dx : fM$, dy; $y = \frac{bdy}{dx}$ équation differentielle de la courbe BM, laquelle se nomme la Logarithmique. Elle est méchanique, parceque le rapport d'un de ses points quelconque M avec le point C correspondant de l'axe ne peut s'exprimer, que par une équation, où il entre des termes tirez du calcul differentiel.



SECTION III.

De l'instrument inventé pour trouver plusieurs moyennes proportionelles.

Et des courbes qui se décrivent avec cet instrument.

M. DESCARTES.

VOyez Fig. 49. les lignes *AB*, *AD*, *AF* & semblables que je suppose avoir été décrites par l'aide de l'instrument *XYZ*, qui est composé de plusieurs regles tellement jointes, que celle, qui est marquée *YZ* étant arrêtée sur la ligne *AN*, on peut ouvrir & fermer l'angle *XYZ*; & que lorsqu'il est tout fermé, les points *B*, *C*, *D*, *F*, *G*, *H* sont tous assemblez au point *A*; mais qu'à mesure qu'on l'ouvre, la regle qui est jointe à angles droits avec *XY* au point *B* pousse vers *Z* la regle *CD*, qui coule sur *YZ* en faisant toûjours des angles droits avec elle, & *CD* pousse *DE*, qui coule tout de même sur *YX* en demeurant parallele à *BC*, *DE* pousse *EF*, *EF* pousse *FG*, celle-ci pousse *GH*. Et on en peut concevoir une infinité d'autres, qui se poussent consecutivement en même façon, & dont les unes fassent toûjours les mêmes angles avec *YX*, & les autres avec *YZ*. Or pendant qu'on ouvre ainsi l'angle *XYZ*, le point *B* décrit la ligne *AB*, qui est un cercle, & les autres points *D*, *F*, *H*, où se font les intersections des autres Regles décrivent d'autres lignes courbes *AD*, *AF*, *AH*, dont les dernieres sont par ordre plus composées que la premiere, & celle-ci plus que le cercle. Mais je ne vois pas, ce qui peut empêcher, qu'on ne conçoive aussi nettement, & aussi distinctement la description de cette premiere que du cercle, ou du moins que des Sections coniques; ni ce qui peut empêcher, qu'on ne conçoive la seconde, & la troisiéme & toutes les autres, qu'on peut décrire, aussi-bien que la premiere, ni par consequent qu'on ne les reçoive toutes en même façon pour servir aux speculations de Geometrie.

Fig. 49.

La construction de cet instrument est aisée à comprendre, comme aussi le mouvement de toutes ces regles, si l'on fait reflexion, que la premiere

BC est arrêtée ferme au point B, que l'on prend tel, que nous dirons, L. 3. Part. 1. Sect. 1. où nous parlerons encore de la construction & de l'usage de cet instrument. Nous nous contenterons de prouver ici, que les courbes AD, AF, AH, &c. que l'on conçoit décrites par des poinçons appliquez, tandis que les regles se meuvent, aux points D, F, H, où la regle YX est successivement coupée par les regles CD, EF, GH; que ces courbes, dis-je, sont Geometriques, & que les dernieres sont plus composées, que les precedentes, c'est-à-dire, qu'une des inconnuës monte à un degré plus élevé. Les Figures 49. 50. 51. 52. serviront au Livre 3. Ici ce sera la Figure 51. qui n'est composée que de simples lignes, qu'il faut considerer.

1. L'équation de la courbe AD se trouvera ainsi. Nommons la donnée $YA = YB$, a; les inconnuës YC, x; CD, y; YD, z. Les triangles YCD, YBC 8. 6. Eucl. sont semblables : donc YD, z : YC, x :: YC, x : YB, a. $z = \frac{xx}{a} = YD$. Et dans le triangle rectangle YCD, $\overline{YD}^2 = \overline{YC}^2 + \overline{CD}^2$, $\frac{x^4}{aa} = xx + yy$; $x^4 = aaxx + aayy$. FIG. 51.

2. L'équation de la courbe AF se trouvera de cette façon. Nommons $YA = YB$, a; YE, x; EF, y; YF, z. Par la 8. 6. Eucl. les triangles YBC, YCD sont semblables, comme aussi les triangles YCD, YDE; & les triangles YDE, YEF. Donc YF, z : YE, x :: YE, x : YD, $\frac{xx}{z}$ dans les triangles YEF, YDE. & YE, x : YD, $\frac{xx}{z}$ :: YD $\frac{xx}{z}$: YC, $\frac{x^3}{zz}$ dans les triangles YED, YCD. & YD, $\frac{xx}{z}$: YC, $\frac{x^3}{zz}$ :: YC, $\frac{x^3}{zz}$: YB, a, dans les triangles YCD, YBC. Donc $\frac{axx}{z} = \frac{x^6}{z^4}$. $z = \sqrt[3]{\frac{x^4}{a}} = YF$. Maintenant dans le triangle rectangle YEF, $\overline{YF}^2 = \overline{YE}^2 + \overline{EF}^2$, $\sqrt[3]{\frac{x^8}{aa}} = xx + yy$, & après avoir cubé les deux membres de l'équation, on trouvera $x^8 = aax^6 + 3aax^4yy + 3aaxxy^4 + aay^6$.

3. L'équation de la courbe AH se trouvera d'une semblable maniere. Car les triangles YGH, YFG sont semblables, comme aussi les triangles YFG, YEF, & ainsi des autres, comme n. 2. Donc nommant $YA = YB$, a; YG, x; GH, y; YH, z; tous ces triangles semblables donneront ces Analogies. YH, z : YG, x :: YG, x : YF, $\frac{xx}{z}$ dans les triangles YGH, YFG; & YG, x : YF, $\frac{xx}{z}$ :: YF, $\frac{xx}{z}$: YE, $\frac{x^3}{zz}$ dans les triangles YFG, YEF; & YF, $\frac{xx}{z}$: YE, $\frac{x^3}{zz}$ :: YE, $\frac{x^3}{zz}$: YD, $\frac{x^4}{z^3}$ dans les triangles YEF, YED; & YE, $\frac{x^3}{zz}$: YD, $\frac{x^4}{z^3}$ :: YD, $\frac{x^4}{z^3}$: YC, $\frac{x^5}{z^4}$ dans les triangles YED; YDC; & YD, $\frac{x^4}{z^3}$: YC, $\frac{x^5}{z^4}$ :: YC, $\frac{x^5}{z^4}$: YB, a, dans les triangles YCD; YBC. Ce qui donne $z = \sqrt[5]{\frac{x^6}{a}} = YH$. Maintenant dans le triangle rectangle YGH, $\overline{YH}^2 = \overline{YG}^2 + \overline{GH}^2$, $zz = \sqrt[5]{\frac{x^{12}}{aa}} = xx + yy$, & après avoir élevé les deux membres à la cinquiéme puissance, on trouvera $x^{12} - aax^{10} - 5aayyx^8 - 10aay^4x^6 - 10aay^6x^4 - 5aay^8xx - aay^{10} = 0$.

FIG. 51. Les courbes *AK*, *AM*, &c. croiſſent de quatre en quatre degrez, & ſont plus composées les unes que les autres ; elles ſont toutes geometriques, parce qu'on peut les concevoir décrites par des mouvemens, qui dépendent les uns des autres ; parceque chacun de leurs points a un rapport à la droite *YZ*, & que ce rapport peut s'exprimer exactement par une équation, qui eſt la même en chacun de ces points, parceque leurs coordonnées ſont des lignes droites finies, qui font un angle, & dont l'une a un point fixe pour origine & s'étend ſur une ligne droite, l'autre eſt toûjours parallele à elle-même ; parcequ'enfin leur équation ne renferme que deux inconnuës, & que des expreſſions du calcul Algebrique.

Toutes ces courbes n'ont pas ſeulement la portion *AD*, *AF*, *AH*, &c. qui ſont décrites Fig. 49. 50. 51. 52. mais elles en ont encore une autre toute ſemblable de l'autre côté, comme *Ad* Fig. 51. Et cette ſeconde portion ſe décrira de la même maniere que la premiere, ſi l'on renverſe l'inſtrument, de ſorte que la regle *YZ* demeurant ferme ſur la ligne *AN*, la regle *YB* ſoit en *Yb*, qu'au point *b* on arrête ferme la regle *BC*, que les regles ſe chaſſent les unes les autres, tandis que l'on ouvre l'inſtrument, & que des poinçons s'appliquent aux points *D*, *F*, *H*, &c.

SECTION IV.

De la diviſion des lignes courbes en certains genres, de leur ſimplicité, & de leur deſcription.

M. DESCARTES.

La façon de diſtinguer les lignes courbes en certains genres, & de connoître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites.

JE pourrois ici mettre pluſieurs autres moyens pour tracer & concevoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus compoſées par degrez à l'infini. Mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres, je ne ſçache rien de meilleur, que de dire, que tous les points de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt-à-dire, qui tombent ſous quelque meſure préciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même.

Et que lorſque cette équation ne monte que juſques au rectangle de deux quantitez indeterminées, ou bien au quarré d'une même, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il

n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipse, qui soient comprises. Mais que lorsque l'équation monte jusqu'à la trois ou quatriéme dimension des deux, ou de l'une des deux quantitez indeterminées, car il en faut deux, pour expliquer ici le rapport d'un point à un autre, elle est du second: & que lorsque l'équation monte jusques à la cinq ou sixiéme dimension, elle est du troisiéme; & ainsi des autres à l'infini.

Comme si je veux savoir de quel genre est la ligne *EC* Fig. 53. que j'imagine être décrite par l'intersection de la regle *GL*, & du plan rectiligne *CNKL*, dont le côté *KN* est indefiniment prolongé vers *C*, & qui étant mû sur le plan de dessous en ligne droite, c'est-à-dire en telle sorte que son diametre *KL* se trouve toûjours appliqué sur quelque endroit de la ligne *BA* prolongée de part & d'autre, fait mouvoir circulairement cette regle *GL* autour du point *G*, à cause qu'elle lui est tellement jointe qu'elle passe toûjours par le point *L*. Je choisis une ligne droite comme *AB*, pour rapporter à ses divers points tous ceux de cette ligne courbe *EC*; & en cette ligne *AB* je choisis un point, comme *A*, pour commencer par lui le calcul. Je dis que je choisis & l'un & l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut. Car encore qu'il y ait beaucoup de choix, pour rendre l'équation plus courte & plus aisée; toutesfois en quelle façon qu'on les prenne, on peut toûjours faire, que la ligne paroisse de même genre, ainsi qu'il est aisé à démontrer. Fig. 53.

Après cela prenant un point à discretion dans la courbe, comme *C*, sur lequel je suppose, que l'instrument, qui sert à la décrire, est appliqué, je tire de ce point *C* la ligne *CB* parallele à *GA*, & pourceque *CB* & *AB* sont deux quantitez indeterminées & inconnuës, je les nomme l'une y, l'autre x. Mais afin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je considere aussi les quantitez connuës, qui déterminent la description de cette ligne courbe, comme *GA*, que je nomme a, *KL* que je nomme b, & *NL* parallele à *GA* que je nomme c. Puis je dis comme *NL* est à *LK*, ou c à b, ainsi *CB*, ou y, est à *BK*, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & *BL* est $\frac{b}{c}y - b$, & *AL*

eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus comme CB eſt à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$. ainſi a ou GA eſt à LA ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De façon que multipliant la ſeconde par la troiſiéme, on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere ; & ainſi l'équation qu'il falloit trouver eſt $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$. De laquelle on connoît, que la ligne EC eſt du premier genre, comme en effet elle n'eſt qu'une Hyperbole.

Que ſi en l'inſtrument qui ſert à la décrire on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK, ce ſoit cette Hyperbole, ou quelqu'autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan $CNKL$; l'interſection de cette ligne & de la regle GL décrira au lieu de l'hyperbole EC, une autre ligne courbe, qui ſera du ſecond genre. Comme ſi CNK eſt un cercle, dont L ſoit le centre, on décrira la premiere Conchoïde des Anciens ; & ſi c'eſt une Parabole, dont le diametre ſoit KB, on décrira la ligne courbe, que j'ai * tantôt dit être la premiere, & la plus ſimple pour la queſtion de Pappus, lorſqu'il n'y a que cinq lignes droites données par poſition. Mais ſi au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en eſt une du ſecond, qui termine le plan $CNKL$, on en décrira par ſon moyen une du troiſiéme, ou ſi c'en eſt une du troiſiéme, on en décrira une du quatriéme, & ainſi à l'infini, comme il eſt fort aiſé à connoître par le calcul. Et en quelqu'autre façon qu'on imagine la deſcription d'une ligne courbe, pourveu qu'elle ſoit du nombre de celles, que je nomme Geometriques, on pourra toûjours trouver une équation pour déterminer tous ſes points en cette ſorte.

* Liv. 1. Part. 3. Sect. 2.

Au reſte je mets les lignes courbes, qui font monter cette équation juſqu'au quarré de quarré, au même genre que celles, qui ne la font monter que juſques au cube ; & celles dont l'équation monte au quarré de cube, au même genre que celles dont elle ne monte qu'au ſurſolide & ainſi des autres. Dont la raiſon eſt, qu'il y a regle generale pour reduire au cube toutes les difficultez], qui vont au quarré de quarré, & au ſurſolide toutes celles qui vont au quarré de cube, de façon qu'on ne les doit point eſtimer plus compoſées.

Mais il eſt à remarquer qu'entre les lignes de chaque genre,

encore que la plûpart ſoient également compoſées, en ſorte qu'elles peuvent ſervir à déterminer les mêmes points, & conſtruire les mêmes Problêmes, il y. en a toutesfois auſſi quelques-unes, qui ſont plus ſimples, & qui n'ont pas tant d'étenduë en leur puiſſance. Comme entre celles du premier genre, outre l'Ellipſe, l'Hyperbole & la Parabole, qui ſont également compoſées, le cercle y eſt auſſi compris, qui manifeſtement eſt plus ſimple. Et entre celles du ſecond genre, il y a la Conchoïde vulgaire, qui a ſon origine du cercle, & il y en a encore quelques autres, qui bien qu'elles n'ayent pas tant d'étenduë que la plûpart de celles du même genre, ne peuvent toutesfois être miſes dans le premier.

Cette Section demande que l'on traite 1. de la diviſion des lignes courbes en certains genres. 2. De la ſimplicité plus ou moins grande des courbes. 3. Des differentes manieres de les décrire.

ARTICLE I.

De la Diviſion des lignes courbes en certains genres.

1. VOus trouvez ici deux manieres de diſtinguer les differens genres des lignes courbes.

La premiere par les dimenſions que les inconnuës ont dans l'équation de la courbe. Lorſque l'équation d'une courbe ne monte que juſques au rectangle xy des deux inconnuës, ou juſqu'au quarré xx, yy, de l'une de ces inconnuës ou de toutes les deux, ou bien lorſque l'équation contient ce rectangle & ces quarrez; la courbe eſt du premier & du plus ſimple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la Parabole, l'Ellipſe & l'Hyperbole qui ſoient compriſes. Lorſque l'équation monte à la troiſieme, ou quatriéme dimenſion des deux inconnuës jointes enſemble xyy, xxy; x^3y, $xxyy$, xy^3; ou ſeparées x^3, y^3; x^4, y^4; quand même il ne s'y trouveroit qu'une ſeule de ces expreſſions: la courbe eſt du ſecond genre. Lorſque l'équation monte à la cinquiéme ou ſixiéme dimenſion des deux inconnuës jointes enſemble xy^4, xxy^3, x^3yy, x^4y; xy^5, xxy^4, x^3y^3, x^4yy, x^5y; ou ſeparées x^5, y^5; x^6, y^6; quand même il ne s'y trouveroit qu'une ſeule de ces expreſſions, la courbe eſt du troiſiéme genre.

Et ainſi à l'infini en prenant deux dimenſions, qui ſe ſuivent, pour chaque genre.

Deux courbes ſeront de differens genres, ſi les inconnuës de leur équation ne montent ni à la ſeconde dimenſion, ni à la troiſiéme ou quatriéme, ni à la cinquiéme ou ſixiéme, &c. dans chacune des deux équations.

La ſeconde maniere de diſtinguer les differens genres des courbes, que M. DESCARTES apporte pour raiſon de la premiere maniere eſt tirée de la reſolution des équations de ces courbes. Lorſqu'il y a regle generale pour reduire à un degré toutes les difficultez des équations d'un autre degré, les courbes, dont les équations montent à un de ces degrez, ſont de même genre. M. DESCARTES dans ſon troiſiéme Livre donne une methode, * pour reduire les équations du quatriéme degré à une équation du troiſiéme, ** les équations du cinquiéme à une équation du ſixiéme, *** & il aſſure que l'on n'a qu'à ſuivre la même voye pour reſoudre tous les Problêmes à l'infini. Les courbes dont les équations ſont du troiſiéme & quatriéme degré, ſont donc renfermées dans un ſeul degré, qui eſt le premier. Celles dont les équations ſont du cinquiéme & du ſixiéme, dans un ſeul, qui eſt le ſecond; & ainſi de ſuite en comprenant deux dimenſions, ou deux degrez d'équations, pour chaque degré de courbes.

* Liv. 3. Part. 4. Sect. 3. §. 9.
** L. 3. Part. 5. Sect. 1.
*** L. 3. Part. 5. Sect. 5.

Deux courbes ſeront de different genre, lorſqu'il n'y aura pas regle generale, lorſque leurs équations montant chacune à different degré, il n'y aura pas une methode pour reduire les difficultez d'un degré à l'autre.

2. L'on peut encore diviſer les lignes par rapport aux degrez & dimenſions, où les inconnuës de leur équation montent. Les lignes dans l'équation deſquelles les inconnuës n'ont qu'une dimenſion, & ne ſe multiplient point, ſont des lignes du premier degré, dans lequel il n'y a que la ligne droite, dont l'équation eſt $y=\frac{bx}{a}$, ou $y=a$. Les lignes dans l'équation deſquelles les inconnuës, ou l'une des inconnuës montent à la ſeconde dimenſion, yy, xx, xy, ſont des lignes du ſecond degré, qui comprend la parabole, le cercle, l'ellipſe, & l'hyperbole. Les lignes dans l'équation deſquelles une des inconnuës, ou toutes les deux ont trois dimenſions y^3, yyx, yxx, x^3, ſont des lignes du troiſiéme degré. Et ainſi de ſuite à l'infini.

3. Il faut donc mettre bien de la difference entre les degrez & les genres des lignes. La ligne droite eſt du premier degré, & n'eſt dans aucun genre: les lignes courbes du ſecond degré ſont du premier genre; les courbes du troiſiéme & du quatriéme degré ſont du ſecond genre; les lignes courbes du cinquiéme & du ſixiéme degré ſont du troiſiéme genre; & ainſi de ſuite en mettant deux degrez pour chaque genre.

ARTICLE II.

Quelles Lignes ſont les plus ſimples.

1. OUtre ce que M. DESCARTES a mis ſur la fin de cette Section touchant les lignes courbes les plus ſimples, il en parle encore, Liv. 3. Part. 1. *Et même il eſt à remarquer*, dit-il, *que par les plus ſimples lignes on ne doit pas ſeulement entendre celles, qui peuvent être le plus aiſément décrites, ni*

ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du Problême plus facile ; mais principalement celles, qui sont du plus simple genre, qui puisse servir à déterminer la quantité, qui est cherchée.

2. Il seroit naturel de croire, qu'une ligne est plus simple qu'une autre ; lorsqu'elle se décrit d'une maniere plus simple qu'elle : parceque la plus simple des lignes, qui est la droite, se décrit aussi de la façon la plus simple le long d'une regle ; & qu'après la ligne droite, la circulaire, qu'on décrit si simplement avec le compas, passe pour la plus simple.

M. DESCARTES veut bien qu'on appelle ligne plus simple, celle qui se décrit le plus aisément ; il veut bien aussi qu'on appelle ligne plus simple, celle qui fournit une construction & une démonstration plus facile d'un Problême : mais il veut qu'on appelle principalement ligne plus simple, celle qui est du plus simple genre. Excepté le cercle, qui à cause de sa description très simple passe pour la plus simple des quatre courbes du premier genre : les Geometres ne croyent pas aujourdhui, qu'une ligne courbe qui se décrit plus aisément, ou qui donne une construction & une démonstration plus facile, doive pour ces raisons être regardée comme plus simple, le cercle étant toûjours excepté.

3. Où l'on compare ensemble des courbes de differens genres, ou l'on compare des courbes du même genre. S'il s'agit de courbes de differens genres, soit qu'on les considere sans aucun rapport au même Problême qu'elles peuvent resoudre, soit qu'on les considere par rapport à ce même Problême ; la ligne la plus simple est celle, qui est d'un genre plus simple : ainsi les courbes du premier genre sont plus simples que celles du second, celles du second plus simples que celles du troisiéme, & ainsi de suite. Nicomedes a resolu le fameux Problême, par lequel on cherche deux moyennes proportionelles entre deux lignes données, en se servant de la Conchoïde, qui est du quatriéme degré & du second genre, comme on a dit Sect. 2. Art. 3. n. 1. M. DESCARTES a donné la solution du même Problême, L. 3. Part. 4. Sect. 2. Art. 2. en se servant du cercle & de la parabole, qui sont du premier genre. Par rapport à ce Problême la parabole est plus simple que la conchoïde : & c'est dans ce sens que M. DESCARTES veut que les lignes les plus simples soient principalement celles, qui sont du plus simple genre, qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée, & cette quantité est ici les deux moyennes proportionelles. C'est pourquoi quand même la description de la conchoïde seroit plus aisée, que celle de la parabole, & que la construction & la démonstration, que donne la conchoïde, seroient plus faciles, que celles qui viennent de la parabole ; la parabole devroit pourtant passer pour une ligne plus simple que la conchoïde.

4. Parmi les courbes du même genre M. DESCARTES appelle les plus simples celles, qui n'ont pas tant d'étenduë en leur puissance. Dans

le ſecond genre il y a des courbes, dont les inconnuës ont trois dimenſions ; d'autres dont les inconnuës montent à la quatriéme dimenſion ; les premieres ſont les plus ſimples, parceque leurs puiſſances ont moins d'étenduë. Il ſemble auſſi qu'une courbe, dont les deux inconnuës auroient quatre dimenſions, ſeroit moins ſimple qu'une autre courbe, dont une ſeule des inconnuës ſeroit du quatriéme degré. Suivant ce principe M. DESCARTES auroit raiſon de dire, que la conchoïde, dans l'équation de laquelle une ſeule inconnuë eſt du quatriéme degré, n'a pas tant d'étenduë, que la plûpart de celles du même genre, dans l'équation deſquelles les deux inconnuës montent à la quatriéme puiſſance. Mais ſuivant le même principe il n'auroit pas raiſon de dire au même endroit, ni que l'ellipſe, l'hyperbole, la parabole ſont également compoſées, ni que le cercle eſt manifeſtement plus ſimple que ces trois Sections : puiſque dans l'équation $yy = px$, il n'y a qu'une des inconnuës, qui ſoit du ſecond degré, & que dans l'équation au cercle les deux inconnuës ſont élevées à la ſeconde puiſſance, de ſorte que cette équation $yy = 2ax - xx$ eſt évidemment auſſi compoſée, que les équations de l'ellipſe & de l'hyperbole $\frac{2ayy}{p} = 2ax \mp xx$. Enfin * *les Geometres ſont convenus entr'eux, que la plus ſimple des Sections coniques eſt le cercle ; après le cercle, la parabole eſt la plus ſimple ; l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes eſt la moins ſimple.* Ainſi le rectangle xy eſt jugé moins ſimple, non ſeulement qu'un quarré yy ; mais encore que les deux quarrez yy, xx, & le rectangle $2ax$ pris enſemble.

* Hiſt. de l'Academie Royale des Sciences 1705.

Au reſte il ne faut pas être ſurpris, que l'on diſtingue avec tant de ſoin les lignes les plus ſimples de celles qui le ſont moins : puiſque c'eſt un principe reçu ordinairement de tous les Geometres, qu'il faut employer pour la conſtruction d'un Problême, les lignes les plus ſimples que l'on puiſſe. Voyez Liv. 3. Part. 1. Sect. 2.

ARTICLE III.

Differentes manieres de décrire les lignes courbes.

FIG 53. IL nous faudra d'abord expliquer ce qui regarde l'hyperbole de la Figure 53. faire voir enſuite que le même inſtrument, avec lequel l'on a décrit cette hyperbole, peut ſervir à décrire des lignes de differens genres. Par là il conſtera de ce que M. DESCARTES aſſure dès le commencement de cette Section, qu'il pourroit donner pluſieurs moyens pour tracer des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus compoſées par degrez à l'infini. Enfin l'on apportera quelques autres methodes, pour décrire les lignes courbes ſur un plan ; dont la premiere ſera celle, qui cherche pluſieurs points, que l'on joint par une courbe ; l'on a déja ébauché cette methode, Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2.

L'inſtrument conſiſte en trois choſes, Fig. 53. la premiere eſt la ligne

ou regle indefinie AK arrêtée ferme sur un plan ; la seconde est la regle indefinie GL qui tourne autour du point ou pole G donné hors de la ligne AK. La troisiéme est une figure rectiligne, ou curviligne BKC, dont le diametre KB glisse toûjours sur la regle AK, & qui est muë par la regle GL, laquelle en tournant passe toûjours par un point donné L de la Figure BKC, dont le côté KC est indefini.

On peut supposer que l'ouverture L est dans le plan seul CKL ; & dans ce cas on doit supposer la regle GL indefinie du côté de F, & que son point G ne sort pas du point G du plan. On peut aussi concevoir que l'ouverture L est commune au plan CKL & à la regle GL, & la Figure semble l'indiquer ; & dans ce cas il faut supposer la regle indefinie du côté de G, & au point G un anneau, dans lequel la regle s'éleve & s'abaisse librement, suivant que le plan CKL s'éleve ou s'abaisse le long de la ligne AB.

§. I.

La courbe décrite Figure 53. est une Hyperbole.

1. Lorsque la Figure BKC est un angle rectiligne, dont le côté KC est indefiniment prolongé vers C, l'intersection continuelle de la ligne KC avec la regle GL décrit la courbe GCE, dont l'équation est $\frac{ab}{c}y - ab = xy + \frac{b}{c}yy - by$, & multipliant tout par c, & divisant tout par b, $yy = ay + cy - \frac{cx}{b}y - ac$. équation à l'hyperbole, car comme on l'enseigne dans les lieux Geometriques, lorsqu'une équation contient le quarré yy d'une seule des inconnuës, avec le plan xy des deux, le lieu est à l'hyperbole & par rapport à ses diametres, & par rapport à ses asymptotes. Nous le construirons ici des deux manieres.

2. Commençons par la construction qui regarde les asymptotes. L'on peut ainsi ordonner les termes $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy = ac$; multiplier tout par b, & diviser par c, pour avoir $\frac{ab}{c}y + by - xy - \frac{b}{c}yy = ab$. Faites $\frac{ab}{c} + b - x - \frac{b}{c}y = v$, la reduite sera $vy = ab$. Fig. 54.

Quand la regle GL sera venuë sur GA, le point L tombera sur le point A, le point C sur le point N, & le point N sur le point E, donc $EA = NL$, c. Prolongez AG en D, & que GD soit égale à EA, c. Par le point D menez DF parallele à KC, jusques à ce qu'elle coupe AK prolongée. La toute $DA = AG + GD$, est $a + c$.

Les triangles DAF, NLK sont équiangles, donc $NL, c : LK, b :: DA, a + c : AF, \frac{ab}{c} + b$; & $FK = AF - AB - BK = \frac{ab}{c} + b - x - \frac{by}{c} = v$. Et FK est l'abscisse, dont CB, y ne peut être l'appliquée correspondante, soit parceque CB n'est pas parallele à FD qui sera asymptote, soit parceque CB ne touche pas l'abscisse FK, suivant Liv. 1. Sect. 4. Regle 10. L'appliquée doit donc être KC, qui a ces deux conditions.

C'est pourquoi il faut changer l'équation $vy = ab$, & à la place de CB,

y, mettre KC. Or puiſque le triangle NLK eſt donné, ſoit la raiſon du côté LK au côté KN, comme b à g. Deſlors, $b : g :: BK\ \frac{by}{c} : KC, \frac{gy}{c} = z$, & pour vy, vous aurez vz, & afin que l'égalité ſubſiſte dans l'équation $vy = ab$, il faut multiplier le ſecond membre ab par $\frac{g}{c}$, par laquelle le premier vy a été multiplié, & la derniere reduite eſt $vz = \frac{abg}{c}$.

Regardez les lignes FA, FD, comme les deux aſymptotes de l'hyperbole qu'il faut décrire, ſur FD prenez $FS = \frac{ag}{c}$, & menez $ST = b$ parallele à FA; & décrivez, comme on l'apprend dans les Sections coniques l'hyperbole GTE, en la faiſant paſſer par le point donné T, & dont FA, FD ſoient les aſymptotes. Elle paſſera par le point C & ſera l'hyperbole cherchée.

Dém. Par la nature de l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes, $FK \times KC = FS \times ST$, & en termes analytiques $vz = \frac{abg}{c}$. Mettez pour z ſa valeur; $\frac{gvy}{c} = \frac{abg}{c}$, $vy = ab$; & pour v ſa valeur $\frac{ab}{c} + b - x - \frac{b}{c}y$; vous aurez $\frac{ab}{c}y + by - xy - \frac{b}{c}yy = ab$; multipliez tout par c, diviſez par b, vous ferez $yy = ay + cy - \frac{cx}{b}y - ac$, équation à conſtruire.

Fig. 54. 3. Vous conſtruirez de cette ſorte la même équation à l'hyperbole par rapport à ſes diametres Fig. 54. Rangez ainſi les termes, $yy - ay - cy + \frac{cx}{b}y = -ac$, ou faiſant $a + c = 2d$, $yy - 2dy + \frac{cx}{b}y = -ac$. Prenez $y - d + \frac{cx}{2b} = v$, ou $-y + d - \frac{cx}{2b} = v$, $\pm v + d - \frac{cx}{2b} = y$. Mettez cette valeur de y à ſa place dans les termes $-2dy + \frac{cx}{b}y$, & pour yy ſa valeur $vv + 2dv - \frac{cxv}{b} + dd - \frac{cdx}{b} + \frac{ccxx}{4bb}$; vous trouverez la reduite $vv - dd + \frac{cdx}{b} - \frac{ccxx}{4bb} = -ac$; $\frac{ccxx}{4bb} - \frac{cdx}{b} = vv - dd + ac$; multipliez par $4bb$, diviſez par cc; ce ſera $xx - \frac{4bdx}{c} = \frac{4bbvv - 4bbdd + 4abbc}{cc}$. Faites encore $x - \frac{2bd}{c} = z$, ou $\frac{2bd}{c} - x = z$, $\pm z + \frac{2bd}{c} = x$, & ſubſtituez pour x, & xx leur valeur, la ſeconde reduite ſe trouve $zz = \frac{4bbvv}{cc} + \frac{4abb}{c}$; $\frac{4bbvv}{cc} = zz - \frac{4abb}{c}$, où le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{4abb}{c}} = 2b\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Faites comme n. 2. $AF = \frac{2bd}{c} = \frac{ab}{c} + b$, en mettant $a + c$ pour $2d$, FB eſt $FA - AB$, $\frac{2bd}{c} - x = z$. Soit AD, $a + c$ comme n. 2. du point M milieu de AD tirez MF, AM ſera $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = d$. Par le point M menez l'infinie MH parallele à FA; prolongez BC en H. $MH = AB$. x; $BH = AM$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = d$. Les triangles FAM, MHR équiangles donneront cette analogie FA, $\frac{ab}{c} + b : AM$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c :: MH$, $x : HR$, $\frac{acx + ccx}{2ab + 2bc} = \frac{cx}{2b}$ en diviſant le numerateur & le denominateur par $a + c$. Vous aurez donc $CR = BH - BC - HR$, $d - y - \frac{cx}{2b} = v$. Or v eſt l'appliquée de la reduite $\frac{4bbvv}{cc} = zz - \frac{4abb}{c}$, donc la ligne FR en eſt l'abſciſſe & FM le diametre, ſur lequel l'abſciſſe $z = FB$, n'eſt pas. Il faut donc tranſporter FB en FR, Liv. 1. Sect. 4. Regle 10.

Les trois points A, F, M étant donnez, les trois côtez du triangle

AFM sont connus, aussi bien que la raison du côté *AF* au côté *FM*; que ce soit comme b à f; les triangles *FAM*, *FBR* étant semblables, la raison du côté *FB*, au côté *FR* sera aussi comme b à f. Faites donc $b : f :: FB, z : FR$, $\frac{fz}{b} = s$; $ss = \frac{ffzz}{bb}$; mettez ss pour zz dans l'équation $\frac{4bbvv}{cc} = zz - \frac{4abb}{c}$; & afin que l'égalité demeure, multipliez aussi les autres termes par $\frac{ff}{bb}$ & la derniere reduite sera $\frac{4ff}{cc}vv = ss - \frac{4aff}{c}$. Coupez $FI = 2f\sqrt{\frac{a}{c}}$; prolongez *IF*, jusqu'à ce que *FQ* soit égal à *FI*; *IQ* sera $4f\sqrt{\frac{a}{c}}$ le diametre, *I* le sommet. Et parceque $\frac{4ff}{cc}$ marque la raison du diametre au parametre : faites comme $4ff$ est à cc : de même le diametre $4f\sqrt{\frac{a}{c}}$ est au parametre $\frac{cc}{f}\sqrt{\frac{a}{c}}$. Ayant le diametre, le parametre, le sommet, l'angle *IRC* des appliquées, l'on peut décrire l'hyperbole *GIE*; elle passera par le point *C*.

Dém. $QR = QF + FR$, $2f\sqrt{\frac{a}{c}} + s$; $IR = FR - FI$, $s - 2f\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Par la nature de l'hyperbole prise par rapport à ses diametres, comme le diametre est au parametre, c'est-à-dire, $4f\sqrt{\frac{a}{c}} : \frac{cc}{f}\sqrt{\frac{a}{c}} :: QR \times IR$, $ss - \frac{4aff}{c} : \overline{CR}^2$, vv. $4fvv\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{cc}{f}ss\sqrt{\frac{a}{c}} - 4acf\sqrt{\frac{a}{c}}$. Divisez par $\sqrt{\frac{a}{c}}$, l'équation sera $4fvv = \frac{cc}{f}ss - 4acf$. Multipliez par f, & divisez par cc, elle sera $\frac{4ff}{cc}vv = ss - \frac{4aff}{c}$ la derniere reduite. Pour ss substituez sa valeur $\frac{ffzz}{bb}$, vous aurez $\frac{4ffvv}{cc} = \frac{ffzz}{bb} - \frac{4aff}{c}$. Multipliez encore par bb & & divisez par ff, vous trouverez $\frac{4bb}{cc}vv = zz - \frac{4abb}{c}$, premiere reduite. Mettez enfin pour vv, le quarré de $v = -y + d - \frac{cx}{2b}$, & pour zz le quarré de $z = -x + \frac{2bd}{c}$ pour avoir l'équation $\frac{4bbyy}{cc} - \frac{8bbdy}{cc} + \frac{4bxy}{c} + \frac{4bbdd}{cc} - \frac{4bdx}{c} + xx = xx - \frac{4bdx}{c} + \frac{4bbdd}{cc} - \frac{4abb}{c}$; ôtez ce qui s'efface, multipliez par cc, divisez par $4bb$ & à $2d$ substituez sa valeur $a + c$, vous aurez $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$, équation qu'il falloit construire.

4. M. DESCARTES ajoûte que quoiqu'on choisisse une autre ligne que *AB*, & un autre point que *A*, l'on peut toûjours faire, que la ligne paroisse du même genre. En effet Fig. 53. prenons la ligne *GA* pour celle aux points de laquelle l'on rapporte les points de la courbe *GCE*, & dans *GA* prenons le point *G*, pour commencer par lui le calcul. Menons *CH* parallele à *AB*, & *CB* parallele à *GA*, de même qu'à *NL*; $CB = HA$, $CH = AB$. Nommons les données *GA*, a; *KL*, b; *NL*, c; les inconnuës $CH = AB$, x; *GH*, y; & $HA = CB = AG - GH$, $a - y$. Maintenant à cause des triangles équiangles *GHC*, *GAL*; comme aussi des triangles *CBK*, *NLK*; $GH, y : HC, x :: GA, a : AL, \frac{ax}{y}$; & $BL = AL - BA$, $\frac{ax}{y} - x$; & $BK = BL + KL$, $\frac{ax}{y} - x + b$. L'on a encore $NL, c : LK, b :: CB, a - y : BK, \frac{ax}{y} - x + b$; $\frac{acx}{y} - cx + bc = ab - by$. Multiplions tout par y, nous aurons $bcy - aby + acx - cxy + byy = 0$. Equation à l'Hyperbole, comme la preceden- FIG. 53.

FIG. 53. te. Nous la construirons seulement par rapport à ses asymptotes sous cette forme $by - \frac{aby}{c} + ax - xy + \frac{byy}{c} = o$.

Prenons d'abord $a - y = v$, $y = a - v$. Mettons v pour $a - y$ dans $ax - xy$, l'équation se changera en $by - \frac{aby}{c} + xv + \frac{byy}{c} = o$. Ensuite pour y, yy substituons leur valeur $a - v$, $aa - 2av + vv$, l'équation sera $ab - bv - \frac{aab}{c} + \frac{abv}{c} + xv + \frac{aab}{c} - \frac{2abv}{c} + \frac{bvv}{c} = o$, $ab - bv + xv - \frac{abv}{c} + \frac{bvv}{c} = o$, $ab - bv + xv - \frac{abv}{c} + \frac{bvv}{c} = o$, $bv + \frac{abv}{c} - \frac{bvv}{c} - xv = ab$. Faisons enfin $b + \frac{ab}{c} - \frac{bv}{c} - x = z$; la reduite sera $vz = ab$.

FIG. 55. Pour la construire Fig. 55. je regarde la quantité c comme l'unité.

Il nous faut prolonger AG en D, & faire $GD = AE = NL$, c, par la raison qui est rapportée n. 2. Par le point D menons DF parallele à KC jusqu'à ce qu'elle rencontre AK prolongée en F; $CB = HA$; & $AD = AG + GD$, $a + c$.

Comme n. 2. l'on trouvera $AF = \frac{ab}{c} + b$; $u = a - y = AH = CB$. Dans les triangles semblables CBK, NLK, NL, $c : LK$, $b :: CB$, $v : BK$, $\frac{bv}{c}$. Ainsi $FK = FA - AB - BK$, $\frac{ab}{c} + b - x - \frac{bv}{c} = z$. C'est pourquoi comme n. 2. FK, z étant l'abscisse ; CB, v ne peut être l'appliquée, mais ce doit être KC ; dont on saura la valeur, en supposant la raison de LK à KN, comme b à g. Car $LK : KN$, ou $b : g :: BK$, $\frac{bv}{c} : KC$, $\frac{gv}{c} = f$. C'est pourquoi afin que l'égalité $vz = ab$ subsiste, à la place de v nous mettrons f, & nous multiplierons ab par $\frac{g}{c}$, & la derniere reduite sera $fz = \frac{abg}{c}$. Coupons donc $FS = \frac{ag}{c}$, & menons $ST = b$ parallele à AF, nous décrirons l'hyperbole $GTCE$ par le point donné T, & entre les asymptotes FA, FD : elle passera par le point C, & sera la même $GTCE$ Fig. 54.

Dém. Par la nature de l'hyperbole prise par rapport à ses asymptotes, $FK \times KC = FS \times ST$, $fz = \frac{abg}{c}$ substituez à f, à z, à v leurs valeurs, multipliez par C, divisez par y, vous aurez $\frac{acx}{y} - cx + bc = ab - by$ équation à construire.

Les hyperboles $GTCE$ Fig. 54. 55. sont les mêmes : parceque 1° dans les deux figures par la construction $AD = AD$, l'angle $A =$ l'angle A, l'angle D est aussi égal à l'angle D, puisque DF est parallele à CK, & que par consequent l'angle D est égal à l'angle KCB ; donc les triangles AFD sont égaux, & l'angle F des asymptotes est le même. 2° Dans les deux Figures FS est $\frac{ag}{c}$, ST est b.



§ II.

Le même instrument sert à décrire des courbes de differens genres.

COmme M. DESCARTES assure dans cette Section, que quelque courbe qui soit appliquée à l'instrument de la Figure 53. & qui termine le plan *CNKL*, l'on décrira une ligne courbe d'un genre plus composée d'un degré, que n'est la courbe appliquée. L'on cherchera n. 1. une formule generale, par le moyen de laquelle on connoîtra quelle courbe est produite par une Figure quelconque *CNKL* appliquée à l'instrument de la Figure 53. pourveu que l'on sache la nature ou l'équation de la Figure appliquée *CNKL*. L'on supposera n. 2. 3. que *CNKL* est un angle; n. 4. que cette Figure est un cercle; n. 5. que c'est une ellipse; n. 6. que c'est une parabole; n. 7. que c'est une hyperbole.

Ensuite n. 8. 9. — — — L'on appliquera des courbes du second genre, avec lesquelles on décrira des courbes du troisiéme, l'on apportera enfin n. 10. 11. 12. des exemples, où les Figures appliquées ne donnent pas des courbes d'un genre different, ou bien elles en donnent d'un genre plus élevé, que le suivant.

I.

On peut tellement appliquer la Figure rectiligne ou curviligne *CKc* Fig. 54. sur la ligne *AK*, qu'une partie *KC* soit d'un côté de la ligne FIG. 54. *AK*, & l'autre partie *Kc* de l'autre côté. La regle *GL* coupera la figure *CKc* en deux points *C*, *c*, & décrira en même tems deux courbes *GCE*, *gce*. Il faut trouver une formule pour chacune de ces courbes.

Par les points *C*, *c*, quelconques de ces courbes menez *CB*, *cb* paralleles à *GA* & appliquées à *AF* les triangles *GAL*, *CBL*, qui sont semblables, donneront la formule de la courbe *GCE*, & les triangles *GAL*, *cbL* la formule de la courbe *gce*.

Pour la courbe *GCE* nommez les données *GA*, a; *KL*, b; les inconnuës *AB*, x; *CB*, y; *KB*, z; on aura $LB = KB - KL$, $z - b$; $AL = AB + BL$, $x + z - b$. Maintenant *GA*, a : *AL*, $x + z - b$ :: *CB*, y : *BL*, $z - b$; $az - yz = xy - by + ab$, qui sera la formule pour la courbe *GCE*, d'où l'on tire $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$.

Pour la courbe *gce* nommez *Ab*, x; *Kb*, z; *Lb* sera $KL - Kb$, $b - z$; $AL = Ab - bL$, $x - b + z$; pour *cb*, on peut la nommer $-y$, en considerant que la droite *AK* est l'axe des y, dont les $+y$ vont du côté de *G*, les $-y$ du côté de *g*. Ou bien on peut la nommer $+y$ en considerant la courbe *gce* indépendamment de la premiere courbe *GCE*.

Si l'on nomme *cb*, $-y$; *GA*, a : *AL*, $x - b + z$ :: *cb*, $-y$: *bL*,

FIG. 54. $b - z$; $az - yz = xy - by + ab$, même formule que pour la courbe GCE, d'où l'on tire $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$.

Si l'on nomme cb, $+ y$; l'on aura $az + yz = - xy + by + ab$, autre formule pour la courbe gce, d'où l'on tire $z = \frac{- xy + by + ab}{a + y}$.

L'on cherche ensuite une autre valeur de KB, ou de Kb, z dans l'équation, qui exprime la nature de la figure CKc appliquée à l'instrument; l'équation, que ces deux valeurs de z comparées ensemble donnent, est l'équation de la courbe, qui a été décrite par l'intersection de la regle GL avec la ligne droite ou courbe KC, ou Kc.

Les formules sont generales, parcequ'elles sont tirées des triangles GAL, CBL, cbL, que l'on aura toûjours, lorsque le diametre de la figure CNc glissera sur la ligne AK, qui s'appelle la directrice, & que la regle GL, qui tourne autour du Pole G, passera par un point L du diametre, & fera mouvoir la Figure CKc, qui s'appelle la Figure generatrice. Nous supposerons donc dans la suite, que les formules sont déja trouvées.

I I.

L'angle GAF est droit, CKc est un angle divisé en deux également par son axe KA, les points C, c étant les intersections de la regle GL & des droites KC, Kc; les ordonnées CB, cb, qui doivent être paralleles à GA, sont perpendiculaires à leur axe. Par le point donné L menez NLn parallele à ces ordonnées. Dans les triangles NLK, nLK, $LN = Ln$, lesquelles sont connuës à cause du point donné L; Nommons les c & à cause des paralleles CB, $NL : NL, c : LK, b :: CB, y : BK, z$; $z = \frac{by}{c}$, lieu à la ligne droite.

Prenons la formule, qui sert à la courbe GCE, & la valeur de z, qui en a été tirée, pour la comparer avec la valeur de z que l'on vient de trouver; l'on aura $z = \frac{xy - by + ab}{a - y} = \frac{by}{c}$, multiplions tout par c, & par $a - y$, divisons par b nous trouverons $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$. La même équation que l'on a trouvé dans la Geometrie de M. DESCARTES pour l'Hyperbole GCE.

Les triangles nLK, cbK équiangles donnent, en supposant $cb = - y$, l'analogie suivante, $nL, c : LK, b :: cb, - y : bK, z$; $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; d'où l'on tirera pour la courbe gce l'équation $yy = ay - cy + \frac{cxy}{b} + ac$. Ainsi la courbe gce est aussi une hyperbole.

Mais en supposant $cb = + y$, l'on aura $nL, c : LK, b :: cb, + y : bK, z$; $cz = + by$, $z = \frac{+ by}{c} = \frac{- xy + by + ab}{a + y}$ qui est la valeur de z trouvée n. 1. lorsque $cb = + y$, multiplions tout par c & par $a + y$; divisons par b; & nous trouverons $yy = - ay + cy - \frac{cxy}{b} + ac$; équation de la courbe gce, qui est encore un lieu à l'hyperbole.

L'hyperbole

L'hyperbole gce a pour aſymptotes la ligne fAK, & la ligne dfr menée parallele à Kc; leur ſommet eſt le point f. On conſtruira l'équation $yy = -ay + cy - \frac{cxy}{b} + ac$, qui ſuppoſe $cb = +y$, en ſuivant ce qui s'eſt fait §. 1. n. 2.

L'on ordonne ainſi les termes $ay - cy + \frac{cxy}{b} + yy = ac$, l'on diviſe par c, & l'on multiplie par b, & l'on fait $\frac{aby}{c} - by + xy + \frac{byy}{c} = ab$. Soit $\frac{ab}{c} - b + x + \frac{b}{c}y = v$, donc $vy = ab$.

On coupe $Gd = EA$, c; & $Ad = AG - Gd$, $a - c$, & ayant mené dfr parallele à Kc, & prolongé FA vers f; les triangles KLn, dAf équiangles, à cauſe des paralleles Kn & df, donnent cette Analogie, nL, $c : LK$, $b :: dA$, $a - c : Af$, $\frac{ab}{c} - b$. L'on aura donc $fK = fA + Ab + bK$, $\frac{ab}{c} - b + x + \frac{by}{c} = v$; qui doit être l'abſciſſe, & Kc l'appliquée.

L'on trouvera auſſi $Kc = \frac{gy}{c} = s$, en ſuppoſant la raiſon du côté LK au côté Kn, comme b à g: & l'équation $vy = ab$ ſe reduira à $vs = \frac{abg}{c}$. Coupez $fs = \frac{ag}{c}$, & tirez $st = b$; décrivez l'hyperbole gte par le point donné t, & entre les aſymptotes fA, fr: elle paſſera par le point c.

Dém. Par la nature de l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, $fK \times Kc = fs \times st$, & en termes analytiques $vs = \frac{agb}{c}$. Subſtituez à s, à v, leurs valeurs, multipliez par c, diviſez par b, vous aurez $yy = -ay + cy - \frac{cxy}{b} + ac$; équation à conſtruire.

L'on trouveroit auſſi que l'équation $yy = ay - cy + \frac{cxy}{b} - ac$ convient à l'hyperbole gce, en ſuppoſant $cb = -y$. Car l'on aura $fK = fA + Ab + bK = \frac{ab}{c} - b + x - \frac{by}{c} = v$, car bK eſt $-\frac{by}{c}$. Le reſte n'eſt pas fort different. D'où il ſuit qu'il eſt indifferent de nommer cb, $+y$, ou $-y$, puiſque ces deux valeurs donnent la même courbe gce, & qu'elles ne ſont chacune differentes, que par le changement de quelques ſignes, de l'équation de la courbe GCE.

III.

Lorſque la figure NKn eſt une ſeule ligne NK parallele à GA Fig. 56. l'on décrit deux hyperboles oppoſées égales GCE, gce.

Nommons GA, a; BL, $b = bl$; Ab, x; AB, $-x$; CB, y; cb, $-y$. $AL = AB + BL$, $-x + b$; $Al = Ab - bl$, $x - b$.

Pour l'hyperbole GCE, les triangles équiangles GAL, CBL donnent cette Analogie GA, $a : AL$, $-x + b :: CB$, $y : BL$, b; $-xy + by = ab$; à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. L'on auroit pu tirer cette équation de la formule de n. 1. pour la courbe GCE, $az - yz = xy - by + ab$. Car puiſque Fig. 56. la ligne KB, z eſt nulle, le point B tombant ſur le point K: il n'y a qu'à effacer dans la formule les termes, où z

ſe trouve, ſuivant la regle 11. de L. 1. Sect. 4. il reſte $xy - by + ab = o$; $-xy + by = ab$.

Pour l'hyperbole *gce*, en ſuppoſant cb, $-y$, comme l'on fait dans les lieux Geometriques; les triangles *GAl*, *cbl* équiangles donnent, GA, $a : Al$, $x - b :: cb$, $-y : bl$, b; $-xy + by = ab$. Equation qui ſe tireroit auſſi de la formule de n. 1. pour la courbe *gce*, lorſque $cb = -y$, $az - yz = xy - by + ab$.

Les deux hyperboles *GCE*, *gce*, qui ont une même équation ſont égales, coupez $AF = b$, par le point *F* menez *FS* parallele à *GA*; les lignes *FS*, *FB* ſont les aſymptotes, & leur ſommet eſt *F*. Car ayant tiré $FS = a$, $SG = b$, & parallele à *AB*, ſi vous décrivez l'hyperbole *GCE* par le point donné *G* & entre les aſymptotes *FS*, *FB*, elle paſſera par le point *C*; & ſi vous décrivez ſon oppoſée égale *gce*, elle paſſera par le point *c*. L'on a $FB = FA + AB$, $b - x$; $Fb = Ab - AF$, $x - b$.

Dém. Par la nature de l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes, $FB \times BC = FS \times SG$, $by - xy = ab$. $Fb \times bc = FS \times SG$, $-xy + by = ab$; qui eſt l'équation des hyperboles *GCE*, *gce*.

Si l'on avoit ſuppoſé $cb = +y$, l'équation auroit été $xy - by = ab$, qui conviendroit parfaitement à l'hyperbole *gce*: mais cette équation n'étant pas la même que celle de l'hyperbole *GCE*, l'on n'auroit pas pû connoître, que les deux hyperboles ſont égales. D'où il ſuit, qu'il vaut mieux faire $cb = -y$, que $= +y$, lorſqu'il s'agit de conſtruire un lieu geometrique, dans lequel les deux courbes doivent donner une même équation.

IV.

FIG. 43. 53. Appliquez à l'inſtrument Fig. 43. le cercle *Aa*, l'interſection de la regle *PA*, qui tourne autour du Pole *P*, avec la circonference du cercle dont le centre eſt toûjours ſur la directrice *BC*, & par lequel centre la regle *PA* paſſe toûjours; cette interſection, dis-je, de la regle & de la circonference décrira la Conchoïde ſuperieure *DAD*, & l'inferieure *dad*.

Le point *P* de Fig. 43. eſt le même que le point *G* de Fig. 53. le point *B* de Fig. 43. le même que le point *A* de Fig. 53. le point *C* de Fig. 43. le même que le point *L* de Fig. 53. le point *K* eſt le même dans les deux Figures; la ligne *PB* de Fig. 43. eſt la même que la ligne *GA* de Fig. 53. la ligne *BK* de Fig. 43. eſt la même que la ligne *AK* de Fig. 53.

Or ſoit que l'on décrive les deux Conchoïdes par l'interſection de la regle *PC* & de la circonference du cercle *Aa*, comme on le fait ici; ſoit qu'on les ſuppoſe décrites, comme Sect. 2. Art. 3. n. 1. en prenant partout *CD*, *cd* égales à *BA*, *Ba*; il eſt évident que les équations de ces deux courbes ſeront les mêmes, que l'on a trouvé Sect. 2. Art. 3. n. 1. puiſque l'on forme encore ici les mêmes triangles, qui ont ſervi en cet endroit, où l'on a fait les appliquées *DF*, *df*, $+y$; *PB*, b; *AB*, ou *KC*, a; *KF*, ou *Kf*, z.

Fig. 49.

51.

54.

55.

53

50.

52.

Gravé par Daudet

C'est pourquoi pour former l'équation de la Conchoïde inferieure dad, en se servant de la formule $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$, n. 1. qui est pour la courbe CEG Fig. 54. il faut la supposer $z = \frac{xy - ay + ab}{b - y}$ en mettant b pour a, & a pour b. Ensuite l'on cherchera la valeur de z dans l'équation au cercle DKd, dans le triangle rectangle dfC, dont le côté $df = y$; Cd, a; $Cf = Kf - KC$, $z - a$; $\overline{Cd}^2 = \overline{df}^2 + \overline{Cf}^2$, $aa = yy + zz - 2az + aa$; d'où l'on tire $z = a + \sqrt{aa - yy} = \frac{xy - ay + ab}{b - y}$. $\sqrt{aa - yy} = - a + \frac{xy - ay + ab}{b - y} = \frac{-ab + ay + xy - ay + ab}{b - y} = \frac{xy}{b - y}$. L'on quarrera $\sqrt{aa - yy} = \frac{xy}{b - y}$, ce qui donnera $aa - yy = \frac{xxyy}{bb - 2by + yy}$; $aabb - 2aaby + aayy - bbyy + 2by^3 - y^4 = xxyy$; $y^4 - 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy + 2aaby - aabb = 0$. Equation cherchée de la Conchoïde dad, qui est du quatriéme degré & du second genre, telle qu'on l'a trouvée, Sect. 2. Art. 3. n. 1.

Venons à la Conchoïde superieure DAD, pour laquelle on se servira de la formule $\frac{-xy + ay + ab}{b + y}$ n. 1. en supposant $DF = + y$; $CF = KC - KF$, $a - z$; la valeur de z tirée du cercle, ou du triangle rectangle CFD sera encore $z = a + \sqrt{aa - yy} = \frac{-xy + ay + ab}{b + y}$, ce qui donnera $\sqrt{aa - yy} = \frac{-xy}{b + y}$; $aa - yy = \frac{xxyy}{bb + 2by + yy}$ & enfin $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = 0$. Equation de la Conchoïde DAD differente en quelques signes de l'équation de la Conchoïde dad.

Mais les équations des deux Conchoïdes seroient entierement les mêmes, si l'on supposoit $DF = - y$. D'où il suit que lorsque l'on souhaite de distinguer ces deux courbes par leurs équations; il faut nommer $+ y$ les appliquées des deux, qui se terminent à l'axe commun BK.

V.

Au lieu du cercle Figure 43. appliquez une Ellipse, dont un diametre soit toûjours sur la directrice BK, & par le centre de laquelle la regle PC passe toûjours la double intersection de la regle PC & de la circonference de l'Ellipse, décrira une double Conchoïde Elliptique dont l'équation commune en supposant DF, df, $- y$, se trouvera de cette sorte. Fig. 43.

Nommons le diametre de l'Ellipse $2a = d$; les abscisses KF, Kf, z; l'équation à l'Ellipse $\frac{d}{p}yy = 2az - zz$, d'où l'on conclurra que $z = a + \sqrt{aa - \frac{d}{p}yy} = \frac{xy - ay + ab}{b - y}$, & après avoir operé comme n. 4. pour le cercle, multipliez tout par p, divisez par d, mettez pour d sa valeur vous aurez $y^4 - 2by^3 - \frac{1}{2}apyy + bbyy + \frac{p}{2a}xxyy + abpy - \frac{1}{2}abbp = 0$.

De même, étant DF, $+y$; l'on trouvera que l'équation de la Conchoïde

Elliptique ſuperieure DAD eſt $y^4 + 2by^3 - \frac{1}{2}apyy + bbyy + \frac{p}{2a}xxyy - abpy - \frac{1}{2}abbp = o$. Toutes ces équations marquent que les Conchoïdes Elliptiques ſont du quatriéme degré & du ſecond genre.

V I.

Lorſqu'on appliquera Fig. 57. une Parabole CKO, de ſorte que le dia-
I. 57 metre KB coule ſur la directrice AK, & que la regle GL paſſe toûjours par le point L de ce diametre ; la double interſection de la regle GL & de la ligne parabolique aux points C, O, décrira deux courbes GCE, OIN.

L'on voit que, lorſque la parabole eſt priſe au deſſus de GA, l'on a pour la courbe GCE les triangles ſemblables GMC, GAL ; & pour la courbe OIN les triangles GAL, LbO: & lorſque la parabole eſt priſe au deſſous de GA, l'on a les triangles Gmc, GAl pour la courbe GCE, & les triangles GAl, bln pour la courbe OIn. Ainſi l'on peut ſe ſervir des formules de n. 1.

Nommons KL, b ; les coupées KB, kb, z ; le parametre de la parabole p ; nous aurons par la nature de la parabole $pz = yy$ pour ſon équation au point C ; $z = \frac{yy}{p} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; $ayy - y^3 = pxy - bpy + abp$; $y^3 - ayy - bpy + pxy + abp = o$. équation de la Conchoïde parabolique GCE, au point C. L'on trouvera la même au point c.

Ce ſera encore la même équation pour la Conchoïde parabolique OIn en ſuppoſant $bO = -y$; mais en la poſant $+y$; l'on aura $z = \frac{yy}{p} = \frac{-xy + by + ab}{a + y}$; $y^3 + ayy - bpy + pxy - abp = o$. pour les points O, n. Ainſi les deux Conchoïdes paraboliques GCE, OIn ſont du troiſiéme degré & du ſecond genre.

V I I.

Si l'on applique une hyperbole, dont le diametre KB gliſſe ſur la directrice AK, l'on décrira deux Conchoïdes hyperboliques, qui ſeront aſſez ſemblables aux paraboliques. Mettons le diametre déterminé de l'Hyperbole $2a$, ſon équation, comme on a vû dans les lieux Geometriques eſt $\frac{d}{p}yy = 2az + zz$, lorſque les z commencent au ſommet K.

D'où l'on tire $z = -a + \sqrt{aa + \frac{d}{p}yy} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$ n. 1. pour la courbe GCE ; $\sqrt{aa + \frac{d}{p}yy} = \frac{aa - ay + xy - by + ab}{a - y}$. Quarrons les deux membres, & après avoir ôté les termes qui s'effacent, l'on a $\frac{d}{p}y^4 - \frac{2ad}{p}y^3 + \frac{aad}{p}yy - 2abyy - bbyy + 2axyy + 2bxyy - xxyy + 4aaby + 2abby - 2aaxy - 2abxy - 2a^3b - aabb = o$. L'on trouvera la même équation pour la Conchoïde Hyperbolique OIn, en poſant $Ob = -y$. Ainſi ces deux Conchoïdes ſont du quatriéme degré & du ſecond genre.

VIII.

L'équation de la seconde parabole cubique Fig. 58. est $y^3\ pzz$, c'est-à-dire que le cube y^3 de l'ordonnée *CB*, $+y$ est égal au solide parallelepipede pzz sur le parametre *KP*, p, & le quarré de l'abscisse *KB*, z; ou *Kb*, $-z$: ses deux portions *KC*, *Kc* sont du même côté du diametre *KB*. FIG. 58.

Qu'une de ces portions, comme *KC* soit appliquée sur la directrice *AB* comme la portion *KC* de la parabole quarrée *CKO* Fig. 57. y est appliquée; l'on décrira une courbe, qui ressemblera à *GCE*.

Au point *C* de la parabole cubique *KC*, l'on aura l'équation $y^3 = pzz$; $z = \sqrt{\frac{y^3}{p}} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$, n. 1. Quarrez les deux membres, vous ferez $\frac{y^3}{p} = \frac{xxyy - 2bxyy + 2abxy + bbyy - 2abby + aabb}{aa - 2ay + yy}$, d'où l'on tire cette équation de la courbe *GCE*, qui sera du cinquiéme degré & du troisiéme genre $y^5 - 2ay^4 + aay^3 - bbpyy + 2bpxyy - pxxyy + 2abbpy - 2abpxy - aabbp = 0$.

IX.

La ligne *KM* Fig. 59. étant donnée de grandeur, il faut décrire une courbe *CK* telle que le quarré de l'abscisse *KB* + le quarré de *KM* soient au quarré de l'abscisse *KB*: comme la donnée *KM* est à l'ordonnée correspondante *CB*. Nommons *KM*, c; *KB*, z; *BC*, y; l'on aura la proportion $\overline{KB}^2 + \overline{KM}^2, zz + cc : \overline{KB}^2, zz :: KM, c : CB, y$; $ccy + zzy = czz$; $czz - zzy = ccy$; $zz = \frac{ccy}{c-y}$; $z = \sqrt{\frac{ccy}{c-y}}$. FIG. 59. 57.

Appliquons cette courbe, de sorte que son diametre *KB* soit sur la directrice *KA* Fig. 57. & que la regle *GL* passe par le point *L*. On demande l'équation de la courbe, qui se décrira par l'intersection continuelle de la regle *GL*, & de la courbe *KC*.

Comparons les deux valeurs de $z = \sqrt{\frac{ccy}{c-y}} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$. n. 1.

Quarrons les deux membres. $\frac{ccy}{c-y} = \frac{xxyy - 2bxyy\ 2abxy + bbyy - 2abby + aabb}{aa - 2ay + yy}$; $aaccy - 2accyy + ccy^3 = cxxyy - 2bcxyy + 2abcxy + bbcyy - 2abbcy + aabbc - xxy^3 + 2bxy^3 - 2abxyy - bby^3 + 2abbyy - aabbyy$. Equation à la nouvelle courbe décrite, qui sera du troisiéme genre, puisqu'un de ses termes est xxy^3; & la courbe generatrice *KC* étoit du second à cause du terme zzy.

X.

La premiere Parabole cubique *KC* Fig. 60. est telle, que le cube de l'appliquee *CB*, y est égal au solide sous l'abscisse correspondante *KB*, z; & sous le quarré du parametre *KM*, d. Ainsi son équation est $y^3 = ddz$. $z = \frac{y^3}{dd}$. Et cette parabole est du second genre. FIG. 60. 57.

Lorſque cette courbe ſera appliquée, de ſorte que ſon diametre KB ſoit ſur la directrice KA Fig. 57. & que la regle GL paſſe toûjours par le

Fig. 57. point L. On aura l'équation de la courbe décrite en prenant $z = \frac{y^3}{dd} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; qui donne $ay^3 - y^4 = ddxy - bddy + abdd. \; y^4 - ay^3 + ddxy - bddy + abdd = o$. qui fait voir que la courbe nouvellement décrite eſt du ſecond genre, comme la parabole cubique.

La courbe nouvelle ne ſera pas non plus d'un genre plus élevé, que celui de ſa generatrice dans la parabole du cinquiéme degré, dont l'équation eſt $y^5 = d^4 z$; ni dans celle du ſeptiéme, dont l'équation eſt $y^7 = d^6 z$; &c.

X I.

Fig. 61. Appliquons le diametre KA de la parabole ordinaire KC, & que la regle GL paſſe par le ſommet K. La courbe GCE, qui ſera décrite par l'interſection de la regle GL & de la ligne parabolique CK, ſera une parabole; du même genre & du même degré que ſa generatrice.

Soit le parametre de la parabole KC, p; la coupée KB, z; l'équation à cette parabole ſera $yy = pz$, $z = \frac{yy}{p}$. De la formule de n. 1. $\frac{xy - by + ab}{a - y}$ il faut retrancher les termes où b ſe trouve, parceque la ligne KL des autres Figures, eſt ici nulle, la valeur de z ſera donc $\frac{xy}{a - y} = \frac{yy}{p}$; $pxy = ayy - y^3$; $yy - ay = -px$. Equation à la parabole.

X I I.

Fig. 62. La courbe KD, Fig. 62. eſt une parabole quarrée, dont le parametre eſt KP, p; KB une abſciſſe, z; BD, une appliquée, v; ſon équation ſera donc $vv = pz$; $v = \sqrt{pz}$. L'on forme la courbe KCF autour du même diametre KB, en prenant pour chacune de ſes appliquées BC, y, moyenne proportionelle entre la coupée KB & l'ordonnée correſpondante BD, de la parabole KD. Ainſi l'on a cette proportion $KB, z : BC, y :: BC, y : BD, v = \sqrt{pz}$; $yy = z\sqrt{pz}$; $y^4 = pz^3$, parabole du quatriéme degré; & $z = \sqrt[3]{\frac{y^4}{p}}$.

Que le diametre KB de la parabole KCF ſoit appliqué ſur la directrice KA Fig. 57. & que la regle GL paſſe par le point L du diametre KB. L'interſection de la regle & de la courbe KCF décrira une nouvelle courbe, pour laquelle on aura $z = \sqrt[3]{\frac{y^4}{p}} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; cubez les deux membres. Multipliez enſuite par p, & par $a^3 - 3aay + 3ayy - y^3$, L'équation ſera $a^3y^4 - 3aay^5 + 3ay^6 - y^7 = px^3y^3 - 3bpxxy^3 + 3abpxxyy + 3bbpxy^3 - 6abbpxyy + 3aabbpxy - b^3py^3 + 3ab^3pyy - 3aab^3py + a^3b^3p$. La courbe KCF eſt du ſeptiéme degré à cauſe de y^7 & du quatrïéme genre, quoique ſa generatrice KCF ſoit du quatriéme degré & du ſecond genre.

Le même arrivera à une parabole du sixiéme degré $y^6 = pz^5$, à une du 8^e $y^8 = pz^7$, &c.

§. 3.

Methode pour décrire une Courbe en cherchant plusieurs de ses points.

LEs Regles, que l'on donne ici, pour trouver autant que l'on veut de points, qui étant joints ensemble composent la courbe, dont on a l'équation; ne regardent que les équations, dont au moins une des inconnuës ne monte qu'au second degré; & lorsque l'on n'a besoin que de la Geometrie ordinaire, ou de la resolution des Problêmes plans, qui demandent tout au plus l'extraction de la racine quarrée. Mais quand une des inconnuës, ou toutes les deux sont élevées jusqu'au cube, quarré de quarré, & plus haut; il faut resoudre des Problêmes solides, dont il sera parlé dans le troisiéme Livre de cette Geometrie. L'on donnera les regles pour décrire ces sortes de courbes, L. 3. Part. 4. Sect. 2. Art. 5.

Ainsi la methode pour décrire les lignes courbes en cherchant plusieurs de leurs points est generale. Ici nous apporterons quelques exemples pour rendre les regles plus intelligibles.

Il faut observer que cette sorte de description n'est pas Geometrique, car les courbes geometriques doivent se décrire par des mouvemens continus. Et à proprement parler, nous n'avons point les courbes tracées par plusieurs points trouvez : mais nous les supposons décrites exactement, & nous considerons les proprietez, qui conviennent à de telles courbes exactement décrites.

J'ai dit, qu'on n'a pas les courbes, parceque les points, dont on conçoit qu'une courbe est composée, sont infinis; il n'est donc pas possible de les trouver tous.

REGLE I.

IL faut par le moyen de l'équation à une courbe, trouver autant que l'on voudra de differens points, qui étant joints donnent la courbe, à qui cette équation convient. L'équation des lignes geometriques contient deux inconnuës, x & y; dont x represente les abscisses, qui partent toutes d'un même point & s'étendent sur une seule ligne droite; les y sont les ordonnées, qui sont paralleles entr'elles.

L'on détermine d'abord l'angle, que l'on veut, que les inconnuës fassent entr'elles, & l'on tire Fig. 63. les droites AB, AG, qui se coupent au point A, de sorte que l'angle GAB soit celui des inconnuës. FIG. 63.

L'on prend ensuite le point A pour l'origine des x, la ligne AB pour celle, sur laquelle les x seront; la partie AB pour les valeurs positives de x, de sorte que les $+x$ aillent de A vers B; la partie AP par consequent pour les valeurs negatives de x, qui iront de A vers P.

Quoique les ordonnées y doivent être ſeparées, puiſqu'elles ſont paralleles, on commence pourtant par les prendre ſur la ligne AG, en regardant le point A comme leur origine ; & l'on détermine que les valeurs vrayes $+y$ s'étendront de A vers G, & les fauſſes $-y$ de A vers L. Ainſi le point A eſt l'origine commune des x & des y. Mais quand on connoîtra & la grandeur d'une y, & le point de la ligne AB, où elle doit être appliquée, on la menera égale & parallele à la ligne, qui exprime ſa valeur ſur la ligne AG.

REGLE II.

ON cherche une des inconnuës, & l'on détermine l'autre, c'eſt-à-dire, qu'on lui aſſigne une grandeur connuë. Lorſque les inconnuës x, y ſont élevées à differens degrez, comme dans l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$; l'on cherche x qui eſt la moins élevée, & l'on détermine y qui a une plus haute dimenſion ; & l'on fait cette égalité $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, dans laquelle x que l'on cherche eſt ſeule d'un côté, & tous les autres termes ſont de l'autre. Lorſque les inconnuës ſont élevées au même degré, comme dans $yy = 2ax + xx$; l'on peut chercher & déterminer celle que l'on veut. Ici pourtant il vaut mieux chercher y que x, parceque l'équation en ſera plus ſimple, car ſi l'on cherche y, l'équation, où elle ſera ſeule d'un côté, eſt $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$, qui ſe forme de la propoſée $yy = 2ax + xx$, en extrayant la racine quarrée des deux membres, or yy a pour racine quarrée non ſeulement $+y$, mais encore $-y$, au lieu que, ſi c'eſt x que l'on cherche, l'équation ſera $x = -a \pm \sqrt{aa + yy}$, qui ſe forme de la propoſée $xx + 2ax = yy$, ou de $xx + 2ax + aa = aa + yy$, dont la racine poſitive eſt $x + a = \sqrt{aa + yy}$, $x = -a + \sqrt{aa + yy}$; & la negative $-x - a = \sqrt{aa + yy}$, $x = -a - \sqrt{aa + yy}$.

L'inconnuë, que l'on détermine, peut être égalée à une grandeur connuë quelconque. Pour l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ l'on peut faire $y = b$, & l'équation ſe change en celle-ci, $x = \frac{b^3 - 2abb - aab + 2a^3}{ab}$. Mais l'operation devient plus facile, ſi l'on détermine l'inconnuë à être une partie aliquote, ou un multiple de la grandeur connuë de l'équation, lorſque l'équation n'en renferme qu'une de connuë ; ou ſi elle en contient pluſieurs, à celle que l'on voudra, plûtôt cependant à celle, que l'on prend pour l'unité qu'à une autre. Soit $y = 3a$, l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ devient celle-ci $x = \frac{27a^3 - 18a^3 - 3a^3 + 2a^3}{3aa} = \frac{8}{3}a$. Soit $y = \frac{1}{2}a$, l'on fera $x = \frac{\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3 + 2a^3}{\frac{1}{2}aa} = \frac{9}{4}a$.

L'inconnuë que l'on cherche demeure inconnuë, l'inconnuë que l'on détermine

détermine devient connuë. Ainſi le Problême qui étoit indéterminé, devient déterminé dans chaque operation, où l'on aſſigne une nouvelle valeur à une des inconnuës. Chaque operation à cauſe de ces differentes valeurs découvre un point different de la courbe.

REGLE III.

On diviſe la ligne, ſur laquelle l'inconnuë, qu'on détermine, ſe prend, en pluſieurs parties égales les unes à l'unité, les autres à ſes parties, & à ſes multiples, & cela des deux côtez du point qui eſt le commencement des inconnuës; comme Fig. 63. Si c'eſt y que l'on détermine, & qui ſe prenne ſur la ligne AG, l'on prendra $AE = a$ qui eſt l'unité $= EG = GH = AI = IL$; $AM = \frac{1}{2}a = Aa$; $AD = \frac{3}{4}a = Af$, &c. Plus on veut trouver de points de la courbe qu'il faut décrire, plus grand doit être le nombre de ces diviſions, puiſque chacune donne un point de la courbe. Fig. 63.

L'on veut connoître quel point de la courbe l'on trouve en ſuppoſant $y = \frac{1}{2}a$, pour l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, pour y je ſubſtituë ſa valeur $\frac{1}{2}a$, pour yy ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, pour y^3 ſa valeur $\frac{1}{8}aaa$. ainſi l'équation eſt $x = \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \backslash * \frac{1}{2}aa = \frac{9}{8}a^3 \backslash \frac{1}{2}aa = \frac{9}{4}a$. Je coupe donc AF, $x = \frac{9}{4}a$; par le point F je mene FK parallele à AG, & par M je mene MK parallele à AF; le point K, où FK, MK ſe coupent, eſt un point à la courbe cherchée, & $KF = AM$ eſt $y = \frac{1}{2}a$ appliquée au point K de la courbe; AF, $x = \frac{9}{4}a$ eſt l'abſciſſe du diametre AB, qui répond à l'appliquée KF.

* *Le caractere \ ſignifie diviſé.*

On peut faire en même tems $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$ car les termes de ces deux équations ont la même valeur, & ſubſtituer pour $+y$ ſa valeur $-\frac{1}{2}a$, pour yy ſa valeur $+\frac{1}{4}aa$, pour y^3 ſa valeur $-\frac{1}{8}a^3$, & l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ deviendra $x = -\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^3 + 2a^3 \backslash -\frac{1}{2}aa = +\frac{15}{8}a^3 \backslash -\frac{1}{2}aa = -\frac{15}{4}a$. ou $-x = \frac{15}{4}a$.

Sur AP, où ſont les valeurs negatives de x, prenez Ad, $-x = \frac{15}{4}a$, & ſur AI, où ſont les valeurs negatives de y, prenez Aa, $-y = \frac{1}{2}a$; & par le point a menez ab parallele à Ad, par d menez db parallele à AI, le point b où ab, db ſe coupent, eſt un point à la courbe cherchée; & $db = Aa$ eſt $-y = \frac{1}{2}a$ appliquée au point b de la courbe; Ad, $-x = \sqrt{\frac{5}{4}}a$ eſt l'abſciſſe du diametre AB, qui répond à l'appliquée db.

On fait $y = Ah\ \frac{3}{2}a$, & l'on veut connoître quel point de la courbe aura une ordonnée égale à Ah; par la ſubſtitution l'équation de la courbe ſe change en $x = \frac{27}{8}a^3 - \frac{9}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^3 + 2a^3 \backslash \frac{3}{2}aa = -\frac{5}{8}a^3 \backslash \frac{3}{2}aa = -\frac{5}{12}a$, ou $-x = \frac{5}{12}a$. C'eſt pourquoi ſur AP, où ſont les $-x$, il faut prendre Al, $-x = \frac{5}{12}a$; & par le point l tirer lg parallele à AG, par le point h tirer hg parallele à AP; le point g, où lg, gh ſe coupent, eſt à la courbe cherchée; & $gl = Ah$ eſt $y = \frac{3}{2}a$ appliquée au point g

de la courbe ; Al eſt la coupée du diametre AB, qui répond à l'appliquée gl.

Soit AZ, $-y = \frac{3}{2}a$, ou $y = -\frac{3}{2}a$; la ſubſtitution donnera $x = -\frac{27}{8}a^3 - \frac{9}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 + 2a^3 \backslash -\frac{3}{2}aa = -\frac{35}{8}a^3 \backslash -\frac{3}{2}aa = \frac{35}{12}a$. Sur AB, où les $+x$ ſe prennent, je coupe $AY = x = \frac{35}{12}a$; & par le point Y je mene YN parallele à AI, & par le point Z je mene ZN parallele à AB ; le point N, où YN, ZN ſe coupent, eſt un point à la courbe cherchée ; & $YN = AZ$, $-y = \frac{3}{2}a$ eſt l'appliquée au point N de la courbe ; AY, $x = \frac{35}{12}a$ eſt la coupée du diametre AB, qui répond à l'appliquée YN.

On cherchera de la même maniere autant de points, que l'on voudra de la courbe, dont on a l'équation ; & l'on verra que 1. lorſqu'on ſubſtituë une valeur arbitraire de $+y$ dans l'équation, & que la valeur de x, qui en reſulte, eſt poſitive ; le point cherché ſera dans l'angle BAG, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $+x$ & les $+y$. 2. Lorſqu'on ſubſtitue la valeur arbitraire poſitive de y, & que la valeur de x, qui en reſulte, eſt negative ; le point cherché ſera dans l'angle PAG, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $-x$ & les $+y$. 3. Lorſqu'on ſubſtituë la valeur negative arbitraire de y, & que la valeur de x, qui eſt produite, eſt poſitive ; le point cherché ſera dans l'angle BAI, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $+x$ & les $-y$. 4. Lorſqu'on ſubſtituë la valeur negative arbitraire de y, & que la valeur de x, qui eſt produite, eſt negative ; le point cherché ſe trouve dans l'angle PAI, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $-x$ & les $-y$. Il faut pourtant excepter les cas, dans leſquels les points cherchez ſe rencontrent ſur la ligne GA. Ce ſera la même choſe lorſqu'on ſubſtituëra la valeur arbitraire de x, pour trouver la valeur de y.

REGLE IV.

FIG. 63. ON n'a $x = o$, qu'au point A Fig. 63. qui eſt le commencement des x ; c'eſt pourquoi lorſque par la ſubſtitution de la valeur de y, l'équation ſe reduit à $x = a$, c'eſt une marque que la courbe rencontre la ligne GA des y en celui de ſes points, où l'appliquée y a la valeur qu'on lui a ſuppoſée.

Prenons $y = AE$, a ; la ſubſtitution changera l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ en $x = \frac{a^3 - 2a^3 - a^3 + 2a^3}{aa} = \frac{o}{aa} = o$ étant donc $y = a$, l'on trouve $x = o$; ce qui ſignifie que lorſque l'appliquée à la courbe cherchée eſt égale à a, la courbe rencontre la ligne AG, comme en effet au point E de la courbe l'on aura AE, $y = a$, $x = o$.

On n'a $y = o$, que ſur la ligne BAP, de laquelle tous les y ſortent ; c'eſt pourquoi lorſque par la ſubſtitution de la valeur de x, l'équation ſe reduit à $y = o$, l'on doit conclurre que la courbe rencontre la ligne AB des x en celui de ſes points, où l'abſciſſe x a la valeur, qu'on lui a ſuppoſée. Voyez Problême 2. 3. 4.

Il n'y a que le point A commencement des x & des y, où l'on ait tout ensemble $x = o$, $y = o$. C'est pourquoi s'il arrive qu'en supposant $x = o$, l'équation se reduise à $y = o$; ou qu'en supposant $y = o$, l'équation se reduise à $x = o$; la courbe rencontrera les lignes AB, AG au point A. Voyez Problême 2. 3. 4.

Lorsqu'il arrive, qu'en supposant une des inconnuës égale à zero, ou à une grandeur quelconque, l'autre inconnuë devient égale à une fraction telle que $\frac{aa}{o}$, dont le denominateur est zero; la valeur de cette inconnuë est alors regardée comme infinie: parceque la valeur d'une fraction est d'autant plus grande, que son denominateur est plus petit, comme on le voit ici, $\frac{16}{8} = 2$, $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{16}{2} = 8$, $\frac{16}{1} = 16$, $\frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$, $\frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$, $\frac{16}{\frac{1}{8}} = 128$, &c. Donc si l'on divise 16 par un nombre infiniment petit, ou, ce qui est le même, par zero, $\frac{16}{o}$, la valeur de cette fraction sera infiniment augmentée, & par consequent infiniment grande. Bien plus la ligne dont la valeur est une fraction quelconque $\frac{aa}{o}$, dont zero est le denominateur, sera une asymptote de la courbe cherchée, puisque l'extrêmité de cette ligne ne doit rencontrer la courbe qu'à une distance infinie, c'est-à-dire, qu'elle ne la rencontrera jamais. Soit $y = o$, l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay - 2a^3}{ay}$ devient $x = \frac{o - o - o + 2a^3}{o}$, $x = \frac{2a^3}{o}$. C'est-à-dire que la courbe cherchée est telle, que lorsque son appliquée y est égale à zero, ou, ce qui est le même, lorsque la courbe rencontrera la ligne AB des x; alors la valeur $\frac{2a^3}{o}$ de x sera infiniment grande; d'où il suit, que la courbe rencontrera la ligne AB à une distance infinie du point A, ou qu'elle ne la rencontrera jamais, & AB est son asymptote.

REGLE V.

On commence ordinairement par égaler les deux inconnuës l'une aprés l'autre à zero, afin de connoître d'abord, les points, où la courbe coupe les lignes AB des x, AG des y, & souvent d'autres choses importantes pour la description de la courbe cherchée.

Nous venons de voir qu'étant $y = o$, l'on a $x = \frac{2a^3}{o}$, qui fait connoître que la ligne droite AB est asymptote de la courbe cherchée, s'il n'y en a qu'une, & des courbes cherchées, s'il y en a plusieurs.

Faisons à present $x = o$. l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ se change en $o = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, & multipliant par ay, $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o \times ay = o$. C'est pourquoi l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o$ doit me découvrir toutes les valeurs que y a, lorsque $x = o$, où tous les points dans lesquels la courbe, ou les courbes rencontrent la ligne GA des y. Et comme une inconnuë a autant de valeurs dans une équation, qu'elle a de dimensions dans cette équation; y aura trois va-

leurs, & rencontrera la ligne AG en trois points, si ces trois valeurs sont réelles.

Suivant la methode, que M. DESCARTES enseigne, L. 3. Part. 3. Sect. 2. pour connoître les racines d'une équation, ou les valeurs de l'inconnuë d'une équation, je divise $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o$ par $y - a = o$, la division est juste, & le quotient est $yy - ay - 2aa = o$; que je divise par $y + a = o$, la division se fait juste, & le quotient est $y - 2a = o$.

Ce qui donne à connoître, qu'étant $x = o$, y a trois valeurs, qui sont les trois racines de l'équation; la premiere, qui est positive $y - a = o$, ou $y = a$; la seconde, qui est negative $y + a = o$, ou $y = -a$, ou $-y = a$; la troisiéme, qui est positive $y - 2a = o$, ou $y = 2a$.

La premiere $y = a$ montre que la courbe cherchée rencontre la ligne AG au point E, puisqu'à ce point l'on a $x = o$, & l'appliquée AE, $y = a$.

La seconde $-y = a$, montre que la courbe rencontre la ligne AG au point I, puisqu'à ce point l'on a $x = o$, & l'appliquée AI, $-y = a$.

La troisiéme $y = 2a$ montre que la courbe rencontre la ligne AG au point G, puisqu'à ce point on a $x = o$, & l'appliquée AG, $y = 2a$.

On découvre encore ici 1. que, puisque la courbe rencontre la ligne AG aux points E, I, qui sont separez par l'asymptote AB, il n'y a pas une seule courbe, mais pour le moins deux, dont l'une est du côté de E, & l'autre du côté de I. 2. Que puisque la courbe rencontre la ligne AG aux deux points E, G, il faut, excepté que ces deux points ne soient encore separez par une asymptote, que l'on n'a pas encore découverte, il faut, dis-je, que la courbe, qui est du côté de E coupe la ligne GA aux points E, G, & qu'une partie de cette courbe descende au dessous de GA, & que l'autre s'étende au dessus.

On découvre aussi des asymptotes, quoiqu'on n'égale aucune inconnuë à zero. Nous avons trouvé, Sect. 2. Art. 3. n. 2. que l'équation de la Cissoïde Figure 44. est $x^3 = ayy - xyy$; laquelle quand il s'agit de décrire
FIG. 44. cette courbe, se reduit à $yy = \frac{x^3}{a-x}$, $\pm y = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$. Etant les AC, x; les CD, y; faisons $x = a = AB$, l'équation se change en celle-ci, $\pm y = \sqrt{\frac{a^3}{a-a}} = \sqrt{\frac{a^3}{o}}$, qui fait voir que lorsque AB, x est égale au diametre AB, CD, y qui se confond alors avec BG est infiniment grande, que la Cissoïde n'aura cette ligne infiniment grande pour appliquée qu'à une distance infinie du point B. C'est à dire que la ligne BG ne rencontrera jamais la Cissoïde ADd, & qu'elle en est l'Asymptote.

Aprés avoir égalé x, & y à zero, & examiné ce qui s'ensuit, l'on continuë à donner des valeurs differentes à l'inconnuë, que l'on veut déterminer; l'on peut commencer par les moindres; & l'on marque les points K, C, E, g, G, E, S, X. Fig. 63. que chaque operation donne. Tous ces
FIG. 63. points, quand on croit d'en avoir assez trouvé, se joignent par la ligne

courbe $KCgSX$, qui eſt la courbe cherchée. L'on joint de même les points *Fig. 63.* N, I, o, b, de l'autre courbe, s'il y en a deux ; &c. Il faut chercher un plus grand nombre de points là, où la courbure eſt plus ſenſible.

REGLE VI.

SI en ſubſtituant des valeurs poſitives & negatives de l'inconnuë y, qu'on détermine, on trouve des valeurs réelles de l'autre inconnuë x ; la courbe s'étendra des deux côtez, où l'on prend les $+y$ & les $-y$: comme Fig. 64. Problême 2. &, s'il y a pluſieurs courbes, l'une pourra occuper un côté & l'autre l'autre, comme Figure 63. la courbe $CEGS$ eſt décrite du côté AG, où l'on prend les valeurs poſitives de y ; & la courbe NIo du côté AI, où l'on prend les valeurs negatives de y.

Que ſi les valeurs réelles de l'inconnuë x, qu'on cherche, & qui viennent de la ſubſtitution de l'inconnuë $\pm y$ qu'on détermine, ſont réelles poſitives & negatives ; la courbe, ou les courbes s'étendront auſſi des deux côtez, où l'on prend les valeurs poſitives & negatives de x, comme Fig. 63. les courbes occupent les eſpaces qui ſont du côté de AB, où ſont les $+x$, & du côté de AP, où ſont les $-x$.

Mais ſi en ſubſtituant la valeur negative de y par exemple, la valeur de x devient imaginaire & impoſſible ; c'eſt un ſigne, que la courbe, que l'on veut décrire, n'entre pas dans l'eſpace, vers lequel l'on vouloit prendre les x & les $-y$. Il en eſt de même des autres ſubſtitutions ; car les valeurs imaginaires marquent les bornes, au delà deſquelles les courbes ne s'étendent pas. Voyez Problême 2. 3. 4.

Il arrive quelquefois, que deux courbes ſont ſeparées par un eſpace conſiderable, pour lequel ſeul il y a des valeurs imaginaires, comme Fig. 64. Les valeurs ne peuvent être imaginaires, que lorſqu'il y a une extraction de racine quarrée à faire, $y = \sqrt{-aa}$, parcequ'on ne peut extraire la racine quarrée de $-aa$, tout quarré ayant le ſigne $+$: pour la racine cubique l'on peut auſſi bien l'extraire d'une grandeur negative que d'une poſitive $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{-a^3}$, car comme $+a$ eſt la racine cubique de $+a^3$, de même $-a$ eſt la racine cubique de $-a^3$.

Enfin les differentes ſubſtitutions feront connoître de quels côtez une courbe s'étend, par quel eſpace elle ne paſſe pas ; quand c'eſt qu'elle ſe forme, ce qui arrive lorſqu'elle rencontre deux fois la même ligne droite au même point ; quand c'eſt qu'elle s'élargit à l'infini, ou en s'approchant ou en s'écartant toûjours davantage d'une ligne droite. C'eſt ce qui s'expliquera dans le Problême ſuivant.



PROBLEME I.

Décrire la Courbe, dont l'équation est $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

ON cherchera l'inconnuë x, & l'on déterminera l'inconnuë y, & l'équation se reduira à $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$. Soit $AE = a$, &c. V. Regl. 3.

FIG. 63 L'on fera d'abord $x = o$, ce qui donne, comme on a dit Regle 5. $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o$. Dont les trois racines $y = a$, $y = 2a$, $-y = a$, montrent que la courbe, ou les courbes rencontrent la droite AG aux points E, G, I. $y = o$, donne $x = \frac{2a^3}{o}$ comme on a fait Regle 4. 5. ce qui découvre que la droite AB est une asymptote. D'où l'on conclud, que cette asymptote separant le point I des points E, G, il faut qu'il y ait plus que d'une courbe.

Soit $y = \frac{1}{2}a$, l'équation sera $x = \frac{9}{4}a$. AM est $y = \frac{1}{2}a$, coupez AF, $x = \frac{9}{4}a$ Fig. 63. Par le point M menez MK parallele à AB, par le point F, FK parallele à AG; le point K, où les lignes MK, FK se coupent est à la courbe $CEGS$.

Soit $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, l'équation sera $x = -\frac{15}{4}a$. ou $-x = \frac{15}{4}a$. Aa est $-y = \frac{1}{2}a$, prenez $Ad = -x = \frac{15}{4}a$. Par le point a tirez ab parallele à AP, par le point d la ligne db parallele à AI; le point b, où les lignes ab, db se coupent, est à la ligne NIo.

Si l'on prend des valeurs de $\pm y$ moindres que $\frac{1}{2}a$, l'on trouvera que les courbes s'approchent toûjours de la ligne AB, la courbe $KCGE$ du côté de F, la courbe NIo du côté de d. Car soit $y = \frac{1}{4}a$, l'équation devient $x = \frac{105}{16}a$, qui est plus grande que $x = \frac{9}{4}a$ $MK = AF$, soit $-y = \frac{1}{4}a$ ou $y = -\frac{1}{4}a$, l'on aura $x = -\frac{135}{16}a$, ou $-x = \frac{135}{16}a$ qui est plus grande que $-x = \frac{15}{4}a = ab = Ad$. C'est pourquoi ces deux courbes s'approchent de plus en plus de la droite AB, qu'elles ne doivent pourtant jamais rencontrer : la ligne AB est donc l'asymptote de ces deux courbes.

Soit $y = \frac{3}{4}a$. l'équation se change en $x = \frac{35}{48}a$. AD est $y = \frac{3}{4}a$, prenez $AB = \frac{35}{48}a$; le point C où les lignes DC, BC se coupent, est à la courbe $CEGS$, qui s'approche de la droite GA.

Soit $-y = \frac{3}{4}a$, ou $y = -\frac{3}{4}a$, l'on aura $x = -\frac{77}{48}a$, ou $-x = \frac{77}{48}a$. Af est $\frac{3}{4}a$, prenez AP, $-x = \frac{77}{48}a$, le point o, ou les lignes fo, Po se rencontrent, est à la courbe NIo, qui s'approche de la droite GA.

Soit $y = a$, l'on trouve $x = o$. la courbe $CEGS$ rencontre la droite AG au point E, étant AE, $y = a$.

Soit $-y = a$, $y = -a$, l'on fait $x = o$. la courbe NIo rencontre la droite AG au point I, étant AI, $-y = a$.

Soit $y = \frac{3}{2}a$, l'équation se change en $x = -\frac{5}{12}a$. ou $-x = \frac{5}{12}a$. Ah est $y = \frac{3}{2}a$. coupez Al, $-x = \frac{5}{12}a$; menez par le point h la ligne

hg parallele à AP, & par le point l la ligne lg parallele à GA; le point g du concours est à la courbe $CEGS$, qui après avoir coupé la droite GA au point E, descend au dessous de la même GA.

Soit $-y = \frac{3}{2}a$, $y = -\frac{3}{2}a$, la substitution donne $x = \frac{35}{12}a$. AZ est $-y = \frac{3}{2}a$, coupez AY, $x = \frac{35}{12}a$; le point N où les deux lignes ZN, YN se coupent, est un point à la courbe NIo, qui après avoir coupé la droite GA au point I, monte au dessus de cette même ligne.

Soit $y = 2a$, la substitution donne $x = \frac{0}{2aa} = 0$. & la courbe $CEGS$ rencontre la ligne GA au point G, étant $AG = 2a$. Ainsi l'espace EgG est fermé par la droite EG.

Soit $-y = 2a$, $y = -2a$. l'on trouve $x = 6a$. la courbe NIo s'écarte de la droite AB du côté de N. Le point, que donne $x = 6a$ est trop éloigné du point A, pour qu'on le marque dans la Figure.

Soit $y = \frac{5}{2}a$, la substitution donne $x = \frac{21}{20}a$. AT est $\frac{5}{2}a$, AR est $x = \frac{21}{20}a$. Les lignes TS, RS donnent dans leur intersection le point S à la courbe $CEGS$, qui après avoir coupé la droite AG au point G monte vers X.

Soit $-y = \frac{5}{2}a$, $y = -\frac{5}{2}a$. l'on aura $x = \frac{189}{20}a$. La courbe NIo s'écarte toûjours davantage des droites AI, AB.

Soit $y = 3a$, l'on trouvera $x = \frac{8}{3}a$. AH est $y = 3a$, AQ, $x = \frac{8}{3}a$. le point X est à la courbe $CEGS$, qui monte en s'éloignant des lignes AG, AB.

L'on peut chercher plusieurs autres points, sur tout dans l'espace EgG, tous les points trouvez étant joints donneront les courbes $CEGS$, NIo.

PROBLEME II.

Décrire une courbe, dont l'équation est $yy = 2ax + xx$.

VOus chercherez y, & vous déterminerez x par la Regle 2. & vous aurez en extrayant les racines quarrées $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$. Fig. 64. FIG. 64.

Vous tirerez les lignes AB, AD, qui feront l'angle, que les inconnuës doivent faire. Le point A sera le commencement des x & des y; les valeurs positives de x se prendront du côté de C, les negatives du côté de B; les valeurs positives de y, du côté de E, les negatives du côté de D. Soit $AB = 2a$. Divisez la ligne BP en parties & en multiples de a.

Soit $x = 0$. l'équation $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$ devient $\pm y = 0$. Donc au point A, ou $x = 0$, l'on a aussi $y = 0$, & la courbe rencontre la ligne AB, d'où sortent toutes les y, au point A.

Soit $y = 0$. L'équation $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$ devient $\sqrt{2ax + xx} = 0$, ou en quarrant les deux membres, $2ax + xx = 0$. Divisez par $x = 0$, le quotient est $2a + x = 0$, ou $x = -2a$, $-x = 2a$. Il y a donc deux racines pour x, lorsque $y = 0$; la premiere $x = 0$, qui marque,

FIG. 64 comme auparavant, qu'au point A, ou $x = o$, l'on a aussi $y = o$, & que la courbe rencontre la ligne AB au point A. La seconde racine est $-x = 2a$, qui fait connoître, que si l'on prend AB, $-x = 2a$, l'on aura encore au point B, $y = o$, & que la courbe rencontrera encore la ligne AB au point B.

Soit $x = \frac{1}{4}a$. L'équation devient $\pm y = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{1}{16}aa} = \sqrt{\frac{9}{16}aa} = \frac{3}{4}a$.

Soit AC, $x = \frac{1}{4}a$; & parceque la valeur positive de y est égale à sa valeur negative, prenez AE, $+y = AD$, $-y = \frac{3}{4}a$; par les points E, D, menez EG, DF paralleles à AB, & par le point C la ligne GCF parallele à AD; les points G, F où ces lignes se coupent, sont à la courbe GAF: & $CG = AE$, $+y$; $CF = AD$, $-y$.

Soit $-x = \frac{1}{4}a$, ou $x = -\frac{1}{4}a$. L'équation est $\pm y = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{16}aa} = \sqrt{-\frac{7}{16}}$ racine imaginaire, qui marque qu'en allant de A vers B, qui est le côté, vers où l'on prend les valeurs negatives de x, il y a un espace, dans lequel la courbe, ou les courbes cherchées ne passent point. D'ailleurs comme le point B appartient à une courbe, & le point A à une autre, il y aura pour le moins deux courbes.

Soit $x = a$. L'équation se change en $\pm y = \sqrt{2aa + aa} = \sqrt{3aa}$. Soit $AP = x = a$; coupez AL, $+y = AK$, $-y = \sqrt{3aa}$; menez par les points L, K les lignes LV, KR paralleles à AB, & par le point P la ligne VPR parallele à AD; les intersections V, R sont deux points à la courbe GAF.

Soit $-x = a$, $x = -a$. l'équation sera $\pm y = \sqrt{-2aa + aa} = \sqrt{-aa}$ racine imaginaire. Il n'y a donc point encore de courbe vers le point O, étant AO, $-x = a$.

Soit $x = 2a$. La substitution donne $\pm y \sqrt{4aa + 4aa} = \sqrt{8aa}$. Il est aisé de voir, que dans l'équation $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$, les valeurs positives de x croissant, les valeurs de $\pm y$ croîtront aussi, & que la courbe GAF, va toûjours en s'élargissant vers V, & R.

Soit $-x = 2a$, ou $x = -2a$. La substitution donne $\pm y = \sqrt{-4aa + 4aa} = o$. Ainsi comme on l'a déja trouvé en faisant $y = o$, une nouvelle courbe, qu'il faut maintenant décrire, passe au point B, étant AB, $-x = 2a$.

Soit $-x = \frac{9}{4}a$, $x = -\frac{9}{4}a$. La substitution produira $\pm y = \sqrt{-\frac{9}{2}aa + \frac{81}{16}aa} = \sqrt{\frac{9}{16}aa} = \frac{3}{4}a$, même valeur de $\pm y$, lorsqu'on a posé $+x = \frac{1}{4}a$.

Soit donc Ag, $-x = \frac{9}{4}a$, AE, $+y = AD$, $-y = \frac{3}{4}a$; menez EI, DH paralleles à AB, & par le point g la ligne IgH parallele à AD; les points I, H où elles se coupent, sont à la courbe IBH, & $gI = AE$, $+y$, $= gH = AD$, $-y = CG$, $+y = CF$, $-y$.

Soit $-x = 3a$, $x = -3a$. L'on trouvera $\pm y = \sqrt{-6aa + 9aa} = \sqrt{3aa}$,

$= \sqrt{3aa}$. même valeur de $\pm y$, que lorſqu'on a pris $x = a$: cette operation donnera les points T, S; & les appliquées lT, lS ſont égales aux appliquées PV, PR.

Soit $-x = 4a, x = -4a$. La ſubſtitution fait $\pm y = \sqrt{-8aa + 16aa} = \sqrt{8aa}$, même valeur de $\pm y$, que lorſqu'on a ſuppoſé $x = 2a$.

De ſorte que l'on trouvera les mêmes équations pour les valeurs poſitives de x en commençant depuis a, & pour les negatives en commençant depuis $2a$; ainſi les courbes GAF, IBH, dont les ſommets ſont A, B, éloignez de toute la ligne AB, $2a$, auront des appliquées égales à une diſtance égale de A & de B, & les deux courbes ſeront égales, & tournées vers deux côtez oppoſez. En effet ce ſont deux hyperboles oppoſées équilateres, dont le diametre determiné eſt AB.

PROBLEME III.

Décrire une Courbe, dont l'Equation eſt $y^3 - pzz$.

C'Eſt z qu'il faut chercher, y qu'il faut déterminer, & l'équation doit être $zz = \frac{y^3}{p}$, $\pm z = \sqrt{\frac{y^3}{p}}$.

Que les droites KL, KP, faſſent l'angle PKL des inconnuës; que les z & les y commencent au point K; que les $+z$ s'étendent vers B, les $-z$ vers b, les $+y$ vers P, les $-y$ de l'autre côté. Soit $KP = p$ qui eſt l'unité; diviſez la ligne KP prolongée à l'infini de part & d'autre en parties & en multiples de p. FIG. 58.

Soit $z = o$, l'équation ſe reduit à $\sqrt{\frac{y^3}{p}} = o$, $y = o$.

Soit $y = o$, l'équation eſt $\pm z = o$. C'eſt pourquoi étant mutuellement $z = o$ lorſqu'on poſe $y = o$, & $y = o$ lorſqu'on poſe $z = o$, il ſuit que la courbe rencontre la ligne PK au point K, ou $z = o$, $y = o$, puiſque ce point eſt l'origine des z & des y.

Soit $y = p$. La ſubſtitution donne $\pm z = \sqrt{\frac{p^3}{p}} = p$. Soit $KP = p$, & qu'on prenne KB, $+z = Kb$, $-z = p$. L'on trouvera à l'ordinaire les points C, c à la courbe cherchée.

Soit $-y = p$, ou $y = -p$. La ſubſtitution produit $\pm z = \sqrt{\frac{-p^3}{p}} = \sqrt{-pp}$ racine imaginaire. Et comme il eſt évident, que quelque valeur negative, que l'on aſſigne à y, l'on trouvera une racine imaginaire l'on doit conclurre, que la courbe ne paſſera pas du côté, où l'on avoit reſolu de prendre les $-y$.

Mais comme on trouvera des valeurs de $\pm z$, qui augmenteront à meſure qu'on augmentera les valeurs poſitives de y; l'on conclurra, que la courbe, qui commence au point K a deux portions, qui ſont toutes deux du côté de P, vers lequel les $+y$ ſe prennent, & dont l'une s'étend vers C, du

côté que l'on prend les $+ z$, l'autre vers c, du côté que l'on prend les $- z$.

Cette courbe CKc est la seconde parabole cubique.

PROBLEME IV.

Décrire une Courbe, dont l'équation est $y^3 = ddz$.

L'On cherche z, l'on détermine y, l'équation est $z = \frac{y^3}{dd}$.

Fig. 60. On trouve Fig. 60. en faisant le même que Fig. 58. Problême 3. que la courbe rencontre le diametre KB au point K commencement des inconnuës z, y.

Ce qu'il y a de particulier pour cette équation, c'est que toutes les fois, que l'on prendra une valeur positive de y, la valeur de z sera aussi positive: soit $y = d$; l'équation sera $z = d$; & que toutes les fois, que l'on prendra une valeur negative de y, la valeur de z sera aussi negative, soit $-y = d$, $y = -d$; l'on aura $z = \frac{-d^3}{dd} = -d$, ou $-z = d$.

D'où il suit, que la courbe CKc a une portion KC du côté, où se doivent prendre les $+ z$ & les $+ y$; & une autre Kc du côté, où l'on doit prendre les $- z$ & les $- y$; & que cette même courbe ne passe point ailleurs.

§. IV.

Autres Methodes pour décrire les Courbes.

IL y a une infinité de Methodes pour décrire les courbes Geometriques. J'en rapporterai ici quelques-unes. Dans toutes il faut tirer de l'operation même l'équation propre de la courbe.

METHODE I.

LA premiere Methode consiste à se servir d'un instrument composé de plusieurs Regles, dont les unes sont fixes, & les autres mobiles; dans une des Regles mobiles il y a un point déterminé, qui par son mouvement décrit la courbe. L'instrument dont il a été parlé §. 1. 2. est de cette sorte, il suffira d'apporter encore un exemple.

Fig. 65. AB, CD Fig. 65. sont deux Regles fixes d'une grandeur déterminée & inégales, qui se coupent dans leur milieu I à angles droits. GE est une troisiéme Regle mobile, égale à AI moitié de la plus grande AB des deux premieres Regles, & dont la partie EF est égale à CI moitié de la plus petite CD. L'on fait mouvoir de telle sorte la Regle GE, que par le moyen d'une cheville mise au point G, ce point soit toûjours sur la petite Regle CD, tandis qu'une autre cheville mise au point F tient toûjours ce point sur la grande Regle AB. Je dis que le point E par son mouvement

décrira la demi-circonference ACB d'une ellipſe, tandis que le point G demeurera ſur ID, & l'autre demi-circonference ADB de la même ellipſe, tandis que le point G ſera ſur IC. La ligne AB eſt le grand axe, la ligne CD le petit axe, le point I le centre de l'ellipſe.

Dém. Prenons un point quelconque E, d'où l'on menera EH parallele à AB, & EK parallele à CD; $EH = KI$, $EK = HI$. Nommons les données AB, $2a$; AI, $a = GE$; CD, $2b$; CI, $b = FE$; $GF = GE - EF$, $a - b$. Les inconnuës IH, $x = EK$; EH, $y = KI$; GH, v; $GI = GH - IH$, $v - x$.

On aura donc GH, $v : GI$, $v - x :: GE$, $a : GF$, $a - b$. $v = \frac{ax}{b} = GH$; donc $GI = v - x = \frac{ax}{b} - x = \frac{ax - bx}{b}$. GH, $\frac{ax}{b} : GI$, $\frac{ax - bx}{b} :: HE$, $y : FI$, $\frac{ay - by}{a}$, donc $KF = KI - FI$, $y - \frac{ay + by}{a} = \frac{by}{a}$.

Maintenant dans le triangle EKF, $\overline{EF}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KF}^2$, $bb = xx + \frac{bbyy}{aa}$, $\frac{bbyy}{aa} = bb - xx$, équation à l'ellipſe, dont l'axe eſt $2b = CD$, & parceque la proportion de ce diametre à ſon parametre eſt comme bb à aa, ſi l'on fait $bb : aa :: 2b : \frac{2aa}{b}$, ce quatriéme terme ſera le parametre du petit axe CD.

METHODE II.

ON *ne doit pas rejetter de la Geometrie*, dit M. DESCARTES, Part. 2. Sect. 3. Art. 6. *les lignes, où l'on ſe ſert d'un fil, ou d'une corde repliée, pour déterminer l'égalité, ou la difference de deux ou pluſieurs lignes droites, qui peuvent être tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche à certains autres points, ou ſur certaines autres lignes à certains angles, ainſi que nous avons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipſe & l'Hyperbole. Car encore qu'on n'y puiſſe recevoir aucunes lignes, qui ſemblent à des cordes, c'eſt-à-dire qui deviennent tantôt droites & tantôt courbes, à cauſe que la proportion, qui eſt entre les droites & les courbes n'étant pas connuë, & même je croi ne le pouvant être par les hommes, on ne pourroit rien conclurre de là, qui fût exact & aſſuré. Toutesfois à cauſe qu'on ne ſe ſert de cordes en ces conſtructions, que pour déterminer des lignes droites, dont on connoît parfaitement la longueur, cela ne doit point faire, qu'on les rejette.*

Les deux Exemples, que l'on donnera, ſont la deſcription de l'Ellipſe & de l'Hyperbole, tirée de ſa Dioptrique diſcours 8e.

Exemple 1. *Les Jardiniers plantent en terre deux piquets, comme par exemple l'un au point* M, *l'autre au point* N, *& ayant noüé enſemble les deux bouts d'une corde ils la paſſent autour d'eux, en la façon que vous voyez ici* MEN. *Puis mettant le bout du doigt en cette corde, ils le conduiſent tout autour de ces deux piquets, en la tirant toûjours à eux d'égale force, afin de la tenir tenduë également, & ainſi décrivent ſur la terre la ligne courbe* ACB, *qui eſt une Ellipſe.* FIG. 65.

Dém. Lorſque le piquet E, qui détruit la courbe ACB, eſt au point A,

la corde eſt ſur la ligne AB, & elle eſt égale à $NM + 2AM$, parcequ'elle eſt repliée depuis A juſqu'à M. Lorſque le même piquet E eſt au point B, la corde eſt ſur la ligne AB, & elle eſt égale à $MN + 2NB$, parcequ'elle eſt encore double depuis B juſqu'à N. Donc la corde $= MN + 2AM = MN + 2NB$; $2AM = 2NB$, $AM = NB$; & de plus la corde $MN + AM + NB = AB$. Et ſi le point I eſt le milieu de MN, l'on aura $IM = IN$, $IA = IB$. Du point E abbaiſſez la perpendiculaire EK ſur AB.

Nommons la corde $2a = AB$; $MN = 2b$; IM, $b = IN$: EK, y; IK, x; $MK = IM - IK$, $b - x$; $KN = IN + IK$, $b + x$; EM, z; $EN = 2a - z$.

Dans les triangles EKM, EKN rectangles en K, $\overline{EK}^2 = \overline{EM}^2 - \overline{MK}^2 = \overline{EN}^2 - \overline{NK}^2$, $yy = zz - bb + 2bx - xx = 4aa - 4az + zz - bb - 2bx - xx$; $z = \frac{aa - bx}{a}$. Et mettant cette valeur de z dans $yy = zz - bb + 2bx - xx$, elle ſe change en $yy = \frac{a^4 - 2aabx + bbxx}{aa} - bb + 2bx - xx$; multipliant par aa & diviſant par $aa - bb$, on trouve $\frac{aayy}{aa + bb} = aa - xx$, équation à l'ellipſe, dont l'axe $AB = 2a$; & ſi l'on fait $aa : aa - bb :: 2a : \frac{2aa - 2bb}{a}$, ce quatriéme terme eſt le parametre de l'axe AB. Les points M, N ſont les Foïers de l'Ellipſe.

Fig. 66. Exemple 2. *Un Jardinier plante derechef ſes deux piquets aux points* H, I; *& ayant attaché au bout d'une longue regle le bout d'une corde un peu plus courte, il fait un trou rond à l'autre bout de cette regle, dans lequel il fait entrer le piquet* I, *& une boucle à l'autre bout de cette corde, qu'il paſſe dans le piquet* H. *Puis mettant le doigt au point* X, *où elles ſont attachées l'une à l'autre, il le coule de là en bas juſques à* D, *tenant toûjours cependant la corde toute jointe & comme colée contre la regle depuis le point* X * *juſques à l'endroit, où il la touche, & avec cela toute tenduë: au moyen dequoi contraignant cette regle de tourner autour du piquet* I *à meſure qu'il abaiſſe ſon doigt, il décrit ſur la terre la ligne courbe* XBD, *qui eſt une partie d'une hyperbole. Et après cela tournant ſa regle de l'autre côté vers* Y, *il en décrit en même façon une autre partie* YD: *Et de plus s'il paſſe la boucle de ſa corde dans le piquet* I, *& le bout de ſa regle dans le piquet* H, *il décrira une autre Hyperbole* SKT *toute ſemblable & oppoſée à la precedente.*

* *Le point* F *eſt ſur le point* X, *lorſqu'on commence à décrire l'hyperbole.*

Dém. Dans tous les points B de la courbe DBX, la difference de la ligne IB & de la ligne BH, c'eſt la difference de la longueur de la regle IF, & de la longueur de la corde FBH. Car la longueur de la regle eſt $FB + BI$, & la longueur de la corde eſt $FB + BH$: or la difference de $FB + BI$ & de $FB + BH$ eſt la même que celle BI & de BH. Il faut auſſi remarquer que cette difference eſt par tout la même, puiſque la regle & la corde ſont partout les mêmes. Soit $IA = IF = HE$.

Lorſque le bout de la regle eſt en I, la boucle de la corde en H, & le poinçon B en D; la regle & la corde s'étendent ſur la ligne AI; & la dif-

ference de la regle IF ou de la ligne IA & de la corde FBH, c'est $ID - DH$, parceque la corde est repliée depuis D jusqu'en H. Lorsque le bout de la regle est transporté en H, la boucle de la corde en I, & que le poinçon B est en K; la regle & la corde s'étendent sur la ligne HE; & la difference de la regle HE & de la corde, c'est $HK - KI$. Mais ces deux differences sont égales, $ID - DH = HK - KI$. Pour ID substituez sa valeur $IK + KD$, & pour HK sa valeur $HD + DK$; vous ferez $IK + KD - DH = HD + DK - IK$; donc $2IK = 2HD$, $IK = HD$. De sorte que si l'on divise DK en deux parties égales au point G, l'on aura $GI = GH$. De plus comme la difference de la ligne IB & de la ligne BH est par tout la même, ce sera partout $ID - DH$, où mettant IK pour DH qui lui est égale, cette difference sera $ID - IK = KD$. Ainsi la ligne KD est constamment dans tous les points des courbes YDX, SKF, la difference des lignes IB, BH. Ainsi par tout $BH = IB - KD$.

Nommons les connuës KD, $2a$ difference de la regle & de la corde connuës; IH, $2b$; $GH = GI$, b; GC, x; BC, y; BI, z; l'on aura $IC = GC + GI$, $x + b$; $CH = GC - GH$, $x - b$; $BH = BI - KD$, $z - 2a$.

Dans les triangles IBC, HBC, $\overline{BC}^2 = \overline{IB}^2 - \overline{IC}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{CH}^2$, $yy = zz - xx - 2bx - bb = zz - 4az + 4aa - xx + 2bx - bb$, d'où l'on forme $z = \frac{aa - bx}{a}$; & mettant cette valeur de z à sa place dans $yy = zz - xx - 2xb - bb$, elle se change en $yy = \frac{a^4 + 2aabx + bbxx}{aa} - xx - 2bx - bb$; multipliez par aa, divisez par $bb - aa$ vous aurez $\frac{aayy}{bb - aa} = xx - aa$, équation à l'Hyperbole, dont l'axe determiné est KD, $2a$, & si l'on fait $aa : bb - aa :: 2a : \frac{2bb - 2aa}{a}$, ce quatriéme terme est le parametre du diametre KD. Les points I, H sont les foïers des deux Hyperboles opposées YDX, SKT.

L'on peut décrire des courbes avec une corde attachée à trois, quatre points, &c. Voyez Part. 4. Sect. 3. Art. 1. 2. 3. 4. n. 6.

METHODE III.

L'On peut se servir d'une courbe, dont on sçait l'équation, pour former une nouvelle courbe. Voici quelques-unes des manieres dont on le peut faire.

1. L'on donnera une position nouvelle aux cordes, aux appliquées, aux coupées, aux tangentes de la courbe connuë, ce qui se peut en une infinité de manieres.

Exemple 1. La courbe connuë est AEB, Fig. 67. Prenez chaque corde AE & appliquez la perpendiculairement à l'axe AB, en la faisant passer par le point E, c'est $CD = AE$. Joignez toutes les extrêmitez D, d des nouvelles appliquées; vous aurez décrit une nouvelle courbe ADd, dont vous connoîtrez aisément l'équation. Soit AC, x; CE, y; AE, $z = CD$. FIG. 67.

FIG. 67. Le triangle ACE fournit cette équation $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2$, $zz = xx + yy$, formule generale.

Soit la courbe connuë AEB un cercle, dont le diametre $AB = 2a$, ſon équation eſt $yy = 2ax - xx$. Mettez cette valeur de yy à ſa place dans la formule; vous ferez $zz = 2ax$, équation à la parabole. La nouvelle courbe ADd eſt donc une parabole, dont AB, $2a$ eſt le parametre, $CD = AE$, z une ordonnée; AC, x une coupée.

Soit la courbe connuë AEB une Parabole dont le parametre eſt AB, $2a$. Son équation eſt $yy = 2ax$; & la formule devient $zz = xx + 2ax$, équation à l'hyperbole équilatere, dont l'axe déterminé eſt $2a$. Ainſi de la parabole on formera une hyperbole.

Soit la courbe connuë AEB une Ellipſe, dont l'axe eſt AB, $2a$. Son équation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$ ſubſtituez cette valeur de yy dans la formule, elle ſe changera en $zz = \frac{2apx - pxx + dxx}{d}$, équation à l'hyperbole, lorſque le diametre eſt plus grand, que ſon parametre; à l'ellipſe lorſqu'il eſt plus petit.

Soit la courbe connuë AEB une hyperbole, dont l'axe determiné eſt AB, $2a$; l'équation $yy = \frac{2apx + pxx}{d}$. La formule devient $zz = \frac{2apx + pxx + dxx}{d}$, équation à l'hyperbole.

Exemple 2. La courbe connuë eſt AdD Fig. 67. dont AB eſt l'axe. Prenez chaque ordonnée CD, & tranſportez la du ſommet A de l'axe, juſqu'à ce qu'elle touche la même appliquée CD en E, de ſorte que l'on ait toûjours la corde $AE =$ à l'appliquée CD. Joignez tous les points E, e; vous aurez une nouvelle courbe AeE, dont l'équation ſera connuë. Soit AC, x; CD, $y = AE$; CE, z.

Or $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2$ $zz = yy - xx$, formule generale.

Soit la courbe connuë AdD une parabole, dont le parametre eſt AB, $2a$; l'équation $yy = 2ax$. Mettez cette valeur de yy à ſa place dans la formule, vous trouverez $zz = 2ax - xx$, équation au cercle, la nouvelle courbe AeE eſt un cercle, dont le diametre eſt AB, $2a$.

Soit la courbe connuë AdD un cercle, dont le diametre eſt AB, $2a$; l'équation $yy = 2ax - xx$. La ſubſtitution changera la formule en $\frac{1}{2}zz = ax - xx$, équation à l'ellipſe, dont l'axe eſt a, & le parametre $2a$.

Soit la courbe connuë AdD une ellipſe, dont l'equation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$; la formule devient $zz = \frac{2apx - pxx - dxx}{d}$, à l'ellipſe.

Soit la courbe connuë AdD une hyperbole, dont l'équation eſt $yy = \frac{2apx + pxx}{d}$; l'on aura $zz = \frac{2apx + pxx - dxx}{d}$, à l'hyperbole, lorſque p plus grand que d; à l'ellipſe, lorſque p plus petit que d.

Exemple 3. La courbe connuë eſt AdD, dont l'axe AB eſt prolongé vers F: aux differens points d, l'on tire les tangentes dF; & à chaque

point F l'on applique $FG = Fd$, & perpendiculaire à l'axe. Si l'on joint tous les points tels que G, l'on aura une nouvelle courbe AG, dont on connoîtra l'équation de cette ſorte.

Nommons Ac, x; cd, y; $Fd = FG$, z, $FA = v$, $Fc = x + v$. Il faut avoir conclu de l'équation de la courbe connuë la valeur de chaque $v = FA$, qui dans la parabole eſt x, dans le cercle & l'ellipſe $\frac{ax}{a-x}$, dans l'hyperbole $\frac{ax}{x+a}$, étant le diametre de ces trois courbes $2a$

Dans le triangle rectangle Fcd, $\overline{Fd}^2 = \overline{Fc}^2 + \overline{cd}^2$, $zz = xx + 2vx + vv + yy$ formule generale.

Soit la courbe connuë AdD un cercle, dont l'équation ſoit $yy = 2ax - xx$, en ſuppoſant le diametre $2a$. Dans la formule ſubſtituons pour yy ſa valeur $2ax - xx$, nous aurons $zz = 2ax + 2vx + vv$; pour x mettons ſa valeur $\frac{av}{a+v}$, puiſque $v = \frac{ax}{a-x}$ l'équation ſera $zz = 2av + vv$, équation à l'hyperbole. Ainſi la nouvelle courbe AG eſt une hyperbole équilatere, dans l'axe déterminé eſt $2a$.

Soit la courbe connuë AdD une parabole, dans laquelle $v = x$ & l'équation $yy = px$; ſubſtituons dans la formule px pour yy, elle deviendra $zz = xx + 2vx + vv + px$; ſubſtituons encore v pour x, & nous aurons $\frac{1}{4}zz = vv + \frac{1}{4}pv$, à l'hyperbole.

Soit la courbe connuë AdD une hyperbole équilatere, dont l'équation eſt $yy = 2ax + xx$ & pour laquelle $v = \frac{ax}{x+a}$, & $x = \frac{av}{a-v}$. Dans la formule mettons pour yy ſa valeur, ce ſera $zz = xx + 2vx + vv + 2ax + xx = 2xx + 2vx + 2ax + vv$. Mettons encore pour x ſa valeur & nous trouverons $zz = \frac{2aavv}{aa - 2av + vv} + \frac{2avv + 2aav}{a - v} + vv$; $v^4 - 4av^3 + 3aavv - zzvv + 2a^3v + 2azzv - aazz = 0$, du quatriéme degré.

Soit la courbe connuë AdD une ellipſe dont l'équation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$, & pour laquelle $v = \frac{ax}{a-x}$, & $x = \frac{av}{a+v}$. Subſtituons dans la formule pour yy ſa valeur; la formule ſe changera en $zz = xx + 2vx + vv + \frac{2apx - pxx}{d}$; mettons pour x ſa valeur $\frac{av}{a+v}$, nous aurons $zz = \frac{aavv}{aa + 2av + vv} + \frac{2avv}{a+v} + vv \frac{+ 2aapv}{ad + dv} \frac{- aapvv}{aad + 2adv + dvv}$, d'où l'on formera cette équation du quatriéme degré $dv^4 + 4adv^3 + 4aadvv + aapvv - dzzvv + 2a^3pvv - 2adzzv - aadzz = 0$.

2. L'on aſſignera le rapport que doivent avoir les abſciſſes, les ordonnées, les cordes, les tangentes avec la ligne, qui doit être l'appliquée d'une nouvelle courbe; ou avec une ligne connuë, & celle qui doit être l'appliquée de la nouvelle courbe.

Exemple 1. La courbe connuë eſt KDE Fig. 62. dont le diametre eſt KB, une abſciſſe KB, x; une ordonnée DB, y; il faut appliquer au même point B du diametre une ligne CB, z, moyenne proportionelle entre l'abſciſſe KB, & l'ordonnée BD. De ſorte qu'en joignant tous les FIG. 62.

FIG. 62. points tels que C, l'on décrive une nouvelle courbe KCF. Puiſque $KB : BC :: BC : BD$; l'on aura $\overline{BC}^2 = KB \times BD$, $zz = xy$ formule generale.

Soit la courbe connuë KDE une parabole quarrée, dont l'équation eſt $yy = px$; donc $y = \sqrt{px}$. Subſtituons cette valeur de y dans la formule $zz = xy$; elle ſe changera en $zz = x\sqrt{px}$; quarrons les deux membres, $z^4 = px^3$, parabole du quatriéme degré KCF.

Si la courbe connuë KDE eſt un cercle; dont l'équation eſt $yy = 2ax - xx$; par la ſubſtitution de la valeur de y, on aura $z^4 = 2ax^3 - x^4$, la figure KCF ſera cercliforme, ou cercle du quatriéme degré.

Soit la courbe connuë KDE une ellipſe, dont l'équation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$: donc $y = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{d}}$; & l'équation de la nouvelle courbe elliptiforme $\frac{d}{p}z^4 = 2ax^3 - x^4$, du quatriéme degré.

Soit la courbe connuë une hyperbole, dont l'équation $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$; la nouvelle courbe hyperboliforme ſera $\frac{d}{p}z^4 = 2ax^3 + x^4$.

FIG. 62. Exemple 2. La courbe connuë eſt KDE, dont KB eſt le diametre, KB, x une abſciſſe, DB, y une ordonnée. Il faut appliquer au point B une ligne CB, z, qui ſoit moyenne proportionelle entre une donnée a & l'ordonnée DB, y. On aura $a : z :: z : y$. $zz = ay$, formule generale des nouvelles courbes KCF, qui ſe décriront en joignant les points trouvez, comme le point C.

Soit la courbe connuë KDE une parabole ordinaire, dont l'équation eſt $yy = px$, $y = \sqrt{px}$, la formule $zz = ay$ ſe changera en $zz = a\sqrt{px}$; $z^4 = aapx$, & la courbe KCF ſera une autre parabole quarrée.

Si la courbe connuë KDE eſt un cercle, dont l'équation $yy = 2ax - xx$ l'équation à la nouvelle courbe ACF ſera $z^4 = 2a^3x - aaxx$, &c.

3. Soit la courbe connuë AD, ſon ſommet A, autour duquel on fait
FIG. 68. rouler la ligne DG d'une grandeur déterminée, de telle ſorte qu'une de ſes extrêmitez D parcourant la courbe AD, ſon autre extrêmité G décrit la nouvelle courbe AG.

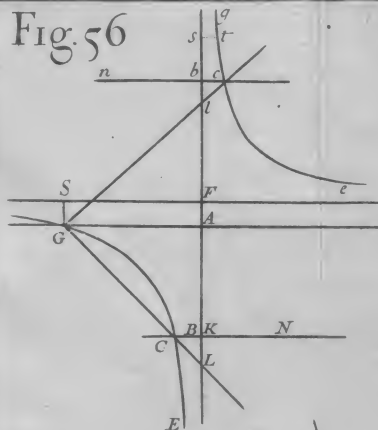
Suppoſons la ligne donnée dans la poſition DAG. Des points D, G, tirons ſur l'axe AC prolongé, les perpendiculaires DC, FG; l'on aura toûjours deux triangles équiangles & rectangles ACD, AFG.

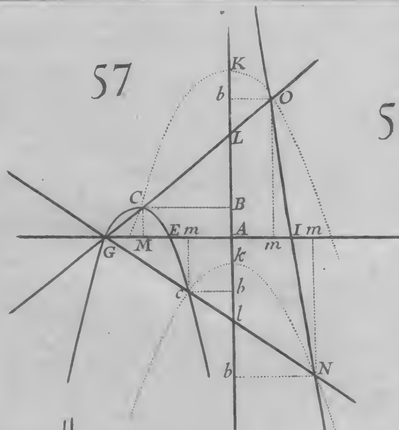
Nommons la donnée DG, a; les inconnuës AC, x; CD, y; AF, z; FG, v; AG, s; AD ſera $DG - AG$, $n - s$.

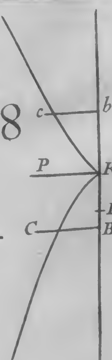
A cauſe des triangles équiangles $AC, x : CD, y :: AF, z : FG, v$; $y = \frac{vx}{z}$. Et $AC, x : AD, a - s :: AF, z : AG, s$; $x = \frac{az - sz}{s}$.

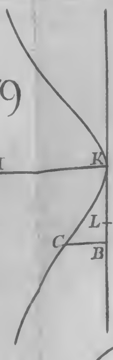
Soit la courbe connuë AD une Parabole, dont l'équation eſt $yy = px$; $y = \sqrt{px} = \frac{vx}{z}$: $x = \frac{pzz}{vv} = \frac{az - sz}{s}$; $s = \frac{avv}{pz + vv}$.

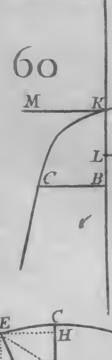
La formule generale eſt ici $\overline{AG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FG}^2$, $ss = zz + vv$. Subſtituëz pour s ſa valeur & vous aurez l'équation à la nouvelle courbe $v^6 - aav^4 + 2pzv^4 + zzv^4 + ppzzvv + 2pz^3vv + ppz^4 = 0$.

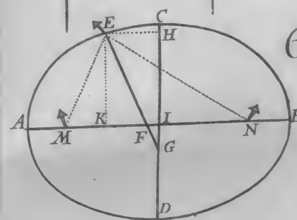


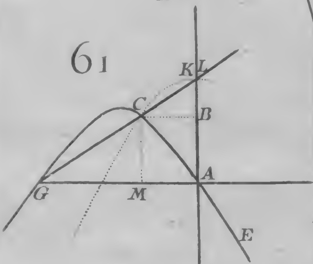


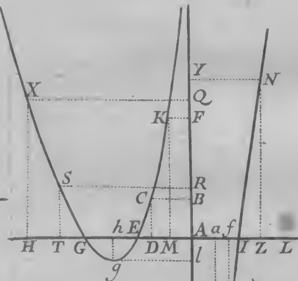


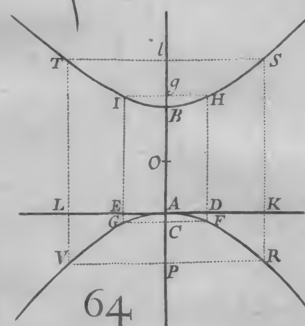


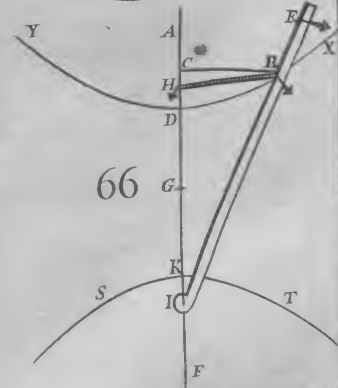


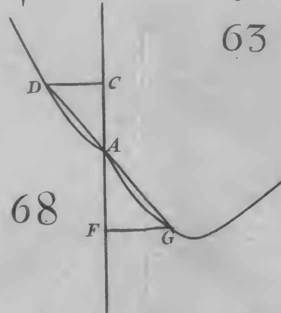


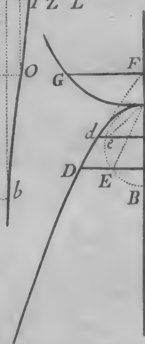


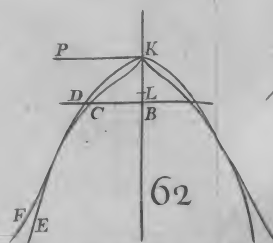












Gravé par Daudet.

PARTIE SECONDE.

Suite de la Question de Pappus.

M. DESCARTES parle en cet endroit premierement de la ſolution generale du Problême de Pappus en quelque nombre de lignes, que la queſtion ſoit propoſée ; ſecondement de la ſolution particuliere du même Problême, lorſqu'il n'eſt propoſé qu'en trois ou quatre lignes ; à la fin il eſt parlé des lieux geometriques ; troiſiémement de la ſolution particuliere de ce Problême, lorſqu'il eſt propoſé en cinq lignes, l'on trouvera encore ici quelque choſe touchant la deſcription des lignes courbes.

SECTION I.

Solution generale du Problême de Pappus.

M. DESCARTES.

Suite de l'explication de la queſtion de Pappus miſe au Livre precedent.

OR après avoir reduit toutes les lignes courbes à certains genres, il m'eſt aiſé de pourſuivre en la démonſtration de la réponſe, que j'ai tantôt faite à la queſtion de Pappus. Car premierement ayant fait voir-ci deſſus, * que lorſqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, l'équation qui ſert à déterminer les points cherchez, ne monte que juſques au quarré ; il eſt évident, que la ligne courbe, où ſe trouvent ces points, eſt neceſſairement quelqu'une de celles du premier genre : à cauſe que cette même équation explique le rapport, qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite. Et que lorſqu'il n'y a point plus de huit lignes droites données, cette équation ne monte que juſqu'au quarré de quarré tout au plus, & que par conſequent la ligne cherchée n'eſt que du ſecond genre, ou au deſſous. Et que lorſqu'il n'y a point plus de douze lignes données, l'équation ne monte que juſques au quarré de cube, & que par conſequent la ligne cherchée n'eſt que du troiſiéme genre, ou au deſſous, & ainſi des autres. Et même à cauſe que la poſition des lignes droites don-

** L. 1. Part. 3. Sect. 4.*

nées peut varier en toutes ſortes, & par conſéquent faire changer tant les quantitez connuës, que les ſignes + & — de l'équation en toutes les façons imaginables; il eſt évident, qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre, qui ne ſoit utile à cette queſtion, quand elle eſt propoſée en quatre lignes droites; ni aucune du ſecond, qui n'y ſoit utile, quand elle eſt propoſée en huit; ni du troiſiéme, quand elle eſt propoſée en douze, & ainſi des autres. En ſorte qu'il n'y a pas une ligne courbe, qui tombe ſous le calcul, & puiſſe être reçûë en Geometrie, qui n'y ſoit utile pour quelque nombre de lignes.

Tout cet endroit ſe comprendra aſſez pour les choſes, que l'on a dites, L. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 1.

SECTION II.

Solution particuliere du Probléme de Pappus, lorſqu'il n'eſt propoſé qu'en trois ou quatre lignes.

POur expliquer cette Section, qui paroît embarraſſée en quelques endroits à ceux, qui liſent la Geometrie de M. DESCARTES pour la premiere fois, il nous faut traiter 1° du reſte de la reſolution du Problême commencée, L. 1. Part. 3. Sect. 3. 2° Du commencement de la reſolution, qui peut-être commun à toutes les lignes, qui ſatisfont à ce Problême. 3° De la conſtruction particuliere à la ligne droite. 4° De la conſtruction commune aux trois Sections coniques, & au cercle. 5° De la conſtruction particuliere à la parabole. 6° De la conſtruction particuliere au cercle & à l'ellipſe. 7° De la conſtruction particuliere à l'hyperbole par rapport à ſes diametres. 8° De la conſtruction particuliere à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. 9° De la démonſtration que M. DESCARTES apporte de la ſolution du Problême appliqué au cercle. 10° Des lieux plans & ſolides, & de la façon de les trouver. L'on diviſera auſſi le texte de M. DESCARTES ſelon le beſoin.



ARTICLE I.

Suite de la resolution du Probléme commencée au Livre I.

M. DESCARTES.

MAis il faut ici plus particulierement, que je détermine & donne la façon de trouver la ligne cherchée, qui sert en chaque cas, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données; & on verra par même moyen que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucune autre que les trois Sections coniques & le cercle.

Solution de cette question quand elle n'est proposée qu'en trois ou quatre lignes.

Reprenons Fig. 38. les quatre lignes AB, AD, EF, & GH données * ci-dessus, & qu'il faille trouver une autre ligne, en laquelle il se rencontre une infinité de points tels que C, duquel ayant tiré les quatre lignes CB, CD, CF, & CH à angles donnez, sur les données; CB multipliée par CF produit une somme égale à CD multipliée par CH. c'est à dire ayant fait $CB = y$; $CD = \frac{czy + bcx}{zz}$, $CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz}$, & $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$ l'équation est

FIG. 38. * L. 1. Part. 3. Sect. 3.

$$yy = \frac{\left.\begin{array}{l} -dekzz \\ \\ +cfglz \end{array}\right\} y \left.\begin{array}{l} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{array}\right\} y \begin{array}{l} +bcfglx \\ \\ -bcfgxx \end{array}}{ez^3 - cgzz}$$

Au moins en supposant ez plus grand que cg: car s'il étoit moindre, il faudroit changer tous les signes + & —. Et si la quantité y se trouvoit nulle, ou moindre que rien en cette équation, lorsqu'on a supposé le point C en l'angle DAG, il faudroit le supposer aussi en l'angle DAE, ou EAR, ou RAG, en changeant les signes + & — selon qu'il seroit requis à cet effet. Et si en toutes ces quatre positions la valeur de y se trouvoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé. Mais supposons la ici être possible, & pour en abreger les termes, au lieu des quantitez $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ écrivons $2m$, & au lieu de $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ écrivons $\frac{2n}{z}$, & ainsi nous aurons $yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, dont la racine est $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$. Et derechef pour abreger, au lieu de $\frac{-2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$

FIG 38. écrivons o, & au lieu de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ écrivons, $\frac{p}{m}$, car ces quantitez étant données, nous les pouvons nommer comme il nous plaît; & ainſi nous avons $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, qui doit être la longueur de la ligne BC, en laiſſant AB, ou x indeterminée. Et il eſt évident que la queſtion n'étant propoſée qu'en trois ou quatre lignes, on peut toûjours avoir de tels termes; excepté que quelques-uns d'eux peuvent être nuls, & que les ſignes $+$ & $-$ peuvent diverſement être changez.

1. $CB \times CF$ produit $\frac{ezyy + deky + dexy}{zz}$, & $CD \times CH$ produit $\frac{cgzzyy + bcgzxy + cfglzy + bcfglx - cfgzxy - bcfgxx}{z^4}$. Reduiſez à la même denomination ces deux produits, qui par la ſuppoſition ſont égaux; laiſſez les denominateurs communs, & vous aurez $ez^3yy + dekzzy + dezzxy = cgzzyy + bcgzxy + cfglzy + bcfglx - cfgzxy - bcfgxx$; ordonnez ainſi les termes $ez^3yy - cgzzyy = - dekzzy + cfglzy - cfgzxy - dezzxy + bcgzxy + bcfglx - bcfgxx$; diviſez tout par $ez^3 - cgzz$, vous trouverez

$$yy = \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +bcfglx \\ \\ -bcfgxx \end{matrix}}{ez^3 - cgzz}$$

Afin d'abreger les termes, pour $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ écrivez $2m$, pour $+ \frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ écrivez $\frac{2n}{z}$, ou pour $\frac{-dezz - cfgz + bcgz}{ez^3 - cgzz}$ écrivez $- \frac{2n}{z}$. L'équation precedente ſe changera en celle-ci $yy = 2my - \frac{2nx}{z}y + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$. En ſubſtituant $2m$ & $2n$ plûtôt que m & n, l'on évite les nouvelles fractions que donneroit l'extraction de la racine quarrée, que l'on doit bientôt faire. L'on ne ſubſtituë point encore de valeur abregée aux deux derniers termes, parceque dans l'extraction de la racine quarrée l'on en trouvera deux autres, dont l'un aura x, l'autre xx; & alors l'on ſubſtituera une valeur abregée aux deux termes, qui auront x, & une autre aux deux termes, qui auront xx.

Je range ainſi l'équation $yy - 2my + \frac{2nx}{z}y = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$. Je mets de chaque côté $mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz}$, afin que le premier membre de l'équation ſoit exprimé par une formule de quarré; & je fais $yy - 2my + \frac{2nx}{z}y + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$. Enſuite j'extrais la racine quarrée de chaque côté, & je trouve $y - m + \frac{n}{z}x = \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$. C'eſt maintenant que

faisant $-\frac{2mn}{z}+\frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}=o$, ou plûtôt $=\omega$, afin que o, qui peut signifier zero, ne fasse point d'équivoque; & $\frac{nn}{zz}\frac{-bcfg}{ez^3-cgzz}=-\frac{p}{m}$, je diminuerai le nombre des termes, & je reduirai l'équation à $y-m+\frac{n}{z}x=\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$, $y=m-\frac{n}{z}x+\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$, valeur de la ligne CB.

L'on a substitué les quantitez $+2m$, $-\frac{2n}{z}$, $+\omega$, $-\frac{p}{m}$, parcequ'on suppose, qu'après avoir examiné la valeur des termes, à la place desquels on les a mises, l'on a trouvé que les unes étoient positives, les autres negatives. En effet l'on verra Art. 6. Exemp. 13. n. 2. 3. 4. que $b=1$. $c=\frac{3}{2}$, $d=\frac{1}{2}$, $e=2$, $f=1$; $g=\frac{2}{3}$, $k=3$, $l=5$, $m=1$, $n=\frac{1}{2}$, $\omega=4$, $p=\frac{3}{4}$, $z=1$. & que par consequent ez^3-cgzz est $+1$, $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ est $+2=+2m$, $\frac{-dezz-cfgz+bcgz}{ez^3-cgzz}$ est $-1=-\frac{2n}{z}$, & $n=\frac{1}{2}$, $\frac{-2mn}{z}+\frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}$ est $+4=+\omega$, $\frac{nn}{zz}-\frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ est $-\frac{3}{4}=p$, ou $=\frac{p}{m}$ parceque $m=1$, & que $y=1-\frac{1}{2}x+\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}xx}$.

M. DESCARTES dit dans une * de ses Lettres, que touchant cette question de Pappus, il n'a mis que la construction, & la démonstration, sans en rapporter toute l'Analyse. J'ai mis ici cette partie de la resolution, qui avoit été omise. *Tom 3. Lett. 69.

2. L'équation $yy-2my+\frac{2nxy}{z}+mm-\frac{2mnx}{z}+\frac{nnxx}{zz}=mm-\frac{2mnx}{z}+\frac{nnxx}{zz}+\frac{bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}$, a deux racines quarrées; l'une positive, que l'on a extraite; l'autre negative, qui est $-y+m-\frac{nx}{z}=\sqrt{mm-\frac{2mnx}{z}+\frac{nnxx}{zz}+\frac{bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}}$, ou $y=m-\frac{nx}{z}-\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$. M. DESCARTES s'est contenté d'extraire la racine positive parceque, comme on l'a dit, Liv. 1. Part. 1. Sect. 4. Regle 10. C'est la racine positive qui donne la solution de la question pour la partie du lieu, pour laquelle on la cherche. La negative comme, on l'enseigne dans les lieux geometriques, resout aussi la question dans une autre partie du lieu.

3. ez est plus grand que cg, car, $ez=2$, $cg=1$. Ainsi $ez-cg=1$. & multipliant par $zz=1$. l'on a $ez^3-cgzz=1$.. Mr DESCARTES veut que l'on range ainsi les termes $ez^3yy-cgzzyy=-dekzzy+cfglzy-cfgzxy-dezzxy+bcgzxy+bcfglx-bcfgxx$, ce qui, en divisant tout par ez^3-cgzz, donne

$$yy=\frac{\begin{array}{ccc}-dekzzy & -cfgzxy & +bcfglx\\ & -dezzxy & \\ +cfglzy & +bcgzxy & -bcfgxx\end{array}}{ez^3-cgzz}$$

Il veut, dis-je, que l'on range ainsi les termes, afin que le quarré $ez^3yy-cgzzyy$ soit positif, ce que l'on a coutume d'observer.

Mais quoiqu'on eût autrement ordonné les termes, l'on auroit toûjours trouvé la même racine.

Soit donc $cgzzyy - ez^3yy = dekzzy - cfglzy + dezzxy + cfgzxy - bcgzxy - bcfglx + bcfgxx$; divisons tout par $cgzz - ez^3$, l'on fera

$$yy = \frac{+dekzzy + dezzxy - bcfglx \; + cfgzxy \; - cfglzy - bcgzxy + bcfgxx}{cgzz - ez^3}$$

où les signes sont tous changez dans le second membre.

Afin d'abreger pour $\frac{+dekzz - cfglz}{cgzz - ez^3}$ il faut mettre $+2m$, comme on l'a mis n. 1. pour $\frac{-dekzz + cfglz}{ez^3 - cgzz}$, parceque si le numerateur & le denominateur de cette derniere fraction sont positifs, & par leur division donne le signe $+$; le numerateur & le denominateur de la premiere fraction seront tous deux negatifs, & donneront aussi par leur division le signe $+$. En effet, comme on le conclurra de ce qui se dira Art. 9. $\frac{-dekzz + cfglz}{ez^3 - cgzz}$ est $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{+dekzz - cfglz}{cgzz - ez^3}$ est $\frac{-2}{-1} = 2$.

De même si $\frac{-dezz - cfgz + bcgz}{ez^3 - cgzz}$ est $\frac{-1}{+1} = -1$, $\frac{+dezz + cfgz - bcgz}{cgzz - ez^3}$ est $\frac{+1}{-1} = -1$, ainsi il faut toûjours écrire $-\frac{2n}{z}$ pour la seconde fraction aussi bien que pour la premiere.

L'on formera donc comme n. 1. $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} = \frac{-bcfglx}{cgzz} + \frac{bcfgxx}{ez^3}$ où le premier membre est le même que n. 1. & ensuite $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} \frac{-bcfglx}{cgzz} + \frac{bcfgxx}{ez^3}$, dont la racine sera, $y - m + \frac{nx}{z} = \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} - \frac{bcfglx + bcfgxx}{cgzz - ez^3}}$. Dans laquelle pour $\frac{-2mn}{z} - \frac{bcfgl}{cgzz - ez^3} = \frac{-1}{+1} \frac{-5}{-1} = -1 + 5 = 4$, il faut encore mettre $+\omega = 4$, & l'on aura $+\omega x$; pour $+\frac{nn}{zz} + \frac{bcfg}{cgzz - ez^3} = \frac{+1}{\frac{4}{+1}} \frac{+1}{-1} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ il faut encore écrire $-p$, ou $-\frac{p}{m}$, & l'on aura $-\frac{p}{m}xx$. De sorte que la racine sera comme auparavant $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, $y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$.

4. M. DESCARTES veut, que si la quantité y se trouvoit nulle, ou moindre que rien, c'est-à-dire negative, lorsqu'on a supposé le point C dans l'angle DAG, il faudroit le supposer aussi dans l'angle DAE, & ensuite, s'il étoit encore necessaire dans l'angle EAR, & enfin dans l'angle RAG: & si dans ces quatre positions la valeur de y se trouvoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé.

La ligne $CB = y$ doit se terminer à la ligne donnée EAG par l'hypothese: donc tout l'espace, dans lequel elle peut être, est compris par les quatre angles, qui sont autour du point A, & ces angles sont DAG, DAE, EAR, RAG. Ainsi on peut la chercher dans ces quatre angles.

Tandis qu'on trouve la valeur de *CB*, *y* negative, l'on continuë à la chercher ailleurs, parceque c'est sa valeur positive, que l'on veut trouver. Ce n'est pas, qu'une valeur negative trouvée ne serve de quelque chose, puisque, comme on l'a expliqué, L. 1. Part. 1. Sect. 4. Regl. 10. elle signifie, que la valeur positive est du côté opposé à celui, vers lequel on l'a supposé. Si *CB* ayant été posé du côté de *D* par rapport à la droite *AB*, on trouvoit par le calcul sa valeur negative ; ce seroit une marque certaine, que la positive seroit de l'autre côté de *AB*, c'est-à-dire, du côté de *S*. Parceque, comme on le pratique dans les lieux geometriques, les *CB*, *y* sortant toutes de la ligne *AB*, si les $-y$ vont du côté de *D*, les $+y$ s'étendront du côté de *S*.

* L'on oppose contre cet endroit, que le point *C* est par tous les quatre angles, que M. DESCARTES ne nomme point celui, où il ne peut pas être & que jamais la question n'est impossible. A quoi M. DESCARTES répond ainsi. **. *Il est évident qu'il se trompe en ce qu'il dit, que je n'ai pas nommé l'angle, où le point* C *ne peut être ; car ayant nommé tous les quatre angles, qui se font par l'intersection des deux lignes* DR *&* EG, *j'ai nommé toute la superficie indéfiniment étenduë de tous côtez, & par consequent tous les lieux, tant ceux où le point* C *peut être, que ceux où il ne peut pas être ; en sorte qu'il auroit été superflu, que j'eusse consideré d'autres angles. Enfin il se trompe de dire que cette question n'est jamais impossible : car bien qu'elle ne le soit pas en la façon que je l'ai proposée, on la peut proposer en plusieurs autres, dont quelques-unes sont impossibles, & je les ai voulu toutes comprendre dans mon discours,*

*Tom. 3. Lett. 76.

** Lett. 77.

L'on verra plusieurs Exemples, dans lesquels les points *C* occupent les quatre angles *DAG*, *DAE*, *EAR*, *RAG* ; & plusieurs, dans lesquels ils ne les occupent pas tous quatre. L'on trouvera aussi des Exemples, dans lesquels le même Problême, qui est impossible par rapport à un angle, est possible par rapport à un autre. Tels sont à la ligne droite, Exemp. 6. à la parabole, Exemp. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 1. 2. 3. 5. 7. 9. 10. 11. 12. 14. à l'hyperbole rapportée à ses diametres, Ex. 1. 2. 6. sans parler des points où les *x* & les *y* commencent, & où étant nuls ils font le Problême impossible.

Il peut aussi arriver qu'un Problême soit entierement impossible, car on peut y apporter des conditions, qui ne peuvent se trouver ensemble, & alors *y* sera partout égale à zero, ou elle aura une valeur imaginaire. Voyez Sect. 3. Art. 5.

5. Monsieur DESCARTES reconnoît que dans cette équation Tom 3. Lett. 71.

$$yy = \frac{\begin{array}{ccc} -dekzzy & -dezzxy & +bcfglx \\ & -cfgzxy & \\ +cfglzy & +bcgzxy & -bcfzxx \end{array}}{ez^3 - cgzz}$$

il y a deux défauts. Le premier, c'est qu'il a omis le cas, où il n'y a point de *yy*, mais seulement

xy avec quelques autres termes ; ce qui donne toûjours, ajoûte-t-il un lieu à l'hyperbole, dont l'aſymptote eſt la ligne AB, ou bien lui eſt parallele. Le ſecond défaut eſt, qu'il forme cette équation, ſans y mettre aucun terme, qui ſoit composé de quantitez connuës, & quoique cela ſoit bon, pourſuit-il, pour la queſtion de Pappus, à cauſe qu'il ne s'y en trouve jamais par la façon qu'il l'a reduite ; il en falloit pourtant mettre un, pour ne rien omettre touchant les lieux.

M. DESCARTES regarde donc cette équation, comme une formule generale, pour le Problême de Pappus proposé en trois ou quatre lignes. Il ne me ſemble pas que cette formule, ait le premier défaut, dont on vient de parler, car puiſque M. DESCARTES aſſure que l'on peut toûjours trouver de tels termes, excepté, que quelques-uns d'eux peuvent être nuls ; l'on peut aûtant ſuppoſer que yy ne s'y rencontre pas, que xx : & comme le terme xx manquant n'empêche pas, que la formule ne ſoit generale, l'on doit raiſonner de même du terme yy.

Lorſque une équation a le plan xy des inconnuës avec xx le quarré de l'une des inconnuës, ſans avoir le quarré yy de l'autre inconnuë ; elle peut, ainſi qu'on l'apprend dans les lieux geometriques, ſe conſtruire avec l'hyperbole priſe ou par rapport à ſes aſymptotes, ou par rapport à ſes diametres. L'on verra qu'il peut arriver, que ni la ligne AB, ni aucune de ſes paralleles ne ſoit l'aſymptote de l'hyperbole, qui ſatisfait au Problême de Pappus, Voyez Art. 8. Exemp. 5.

Touchant le ſecond défaut, il eſt certain que lorſqu'on donne une formule ou équation generale pour tous les lieux à une courbe particuliere, on met un terme, où il n'y a que des quantitez connuës. Soit x, y les ſeules inconnuës.

Pour la ligne droite, $y = \frac{a}{b}x + c$

* M. de l'Hôpital lieux geometriques.

* Pour la parabole, $$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry \begin{array}{l} + \frac{2nrx}{m} \\ - \frac{ep}{m}x \end{array} \begin{array}{l} + rr \\ + ps \end{array} = 0$$

Pour le cercle ou l'Ellipſe $$yy - \frac{2n}{m}xy \begin{array}{l} + \frac{nn}{mm}xx \\ + \frac{eep}{2mmt}xx \end{array} - 2ry \begin{array}{l} + \frac{2nr}{m}x \\ - \frac{2epsx}{2mt} \end{array} \begin{array}{l} - \frac{ptt}{2t} \\ + \frac{pss}{2t} \\ + rr \end{array} = 0$$

Pour l'hyperbole par rapport à ſes diametres. $$yy - \frac{2n}{m}xy \begin{array}{l} + \frac{nn}{mm}xx \\ - \frac{eep}{2mmt}xx \end{array} - 2ry \begin{array}{l} + \frac{2nr}{m}x \\ + \frac{2epsx}{2mp} \end{array} \begin{array}{l} \pm \frac{ptt}{2t} \\ - \frac{pss}{2t} \\ + rr \end{array} = 0.$$

Pour l'hyperbole entre ſes aſymptotes. $$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y \begin{array}{l} + \frac{ns}{e}x \\ - rx \end{array} \begin{array}{l} + \frac{mrs}{e} \\ - mp \end{array} = 0.$$

La

La Methode dont on se sert pour faire ces formules generales, *consiste à construire d'abord une parabole, en sorte que l'équation qui en exprime la nature, soit la plus composée qu'il se puisse; de faire ensuite la même chose dans l'ellipse, & dans l'hyperbole rapportée à ses diametres, & considerée entre ses asymptotes, ce qui fournit des équations ou formules generales.* *Mr le M. de l'Hôp. lieux Geomet.*

Ainsi M. DESCARTES a raison de dire que son équation, qui doit servir de formule generale, devoit renfermer un terme composé de seules quantitez connuës: comme dans les formules, que l'on vient de rapporter, le dernier terme, où il n'y a ni x, ni y, est composé de seules quantitez connuës.

De plus nous verrons, que pour la question même de Pappus, de la façon, que M. DESCARTES l'a reduite, il arrive quelquefois, qu'un des termes n'a que des quantitez connuës; que même il n'y a quelquefois que des quantitez connuës dans un des membres de l'équation, la question étant proposée autrement, que M. Descartes ne l'a proposée. Ce qui fait encore plus voir la necessité, qu'il y avoit de mettre dans l'équation generale un terme tout composé de quantitez connuës. Voyez à la ligne droite, Exemp. 1. 6. à la parabole, Ex. 2. 6. 9. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 2. 8. 10. 14. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, Exemple 1. 2. 6. 8. 9. 12. 13. 14.

6. M. Descartes * dit encore, qu'au lieu de s'être employé à construire la question de Pappus, & de n'avoir parlé des lieux geometriques après cela, qu'en forme de corollaire; il eut mieux fait, d'expliquer par ordre tous les lieux, & de dire ensuite que par ce moyen la question de Pappus étoit construite. * *Tom. 2. Lett. 71.*

Mais aujourd'hui, que l'on trouve les lieux geometriques expliquez dans plusieurs traitez: j'ai cru devoir suivre M. Descartes, & faire comme lui la construction du Problême de Pappus en plusieurs Exemples, & en si grand nombre d'Exemples, qu'il y eût dequoi contenter tout le monde. Car quelques-uns seront bien aise de savoir, comment le Problême se construit, lorsqu'on a une certaine équation; quelques autres, lorsqu'on en a une autre. Dans chaque Exemple je mettrai la resolution suivant la Methode de M. Descartes, & quelquefois encore par l'évanoüissement des seconds termes, comme on le pratique ordinairement dans les lieux Geometriques; & l'on trouvera, que des deux manieres l'on vient à la même construction. Voyez les deux sortes de constructions à la ligne droite, Ex. 5. à la parabole, Ex. 3. 7. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 5. 6. 9. 10. 13. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, Ex. 2. 3. 5. 6. 7. 10. 11. 13. 15. 16.

M. DESCARTES parle encore Art. 10. des lieux geometriques, & il fait voir, que les seules lignes courbes du premier genre sont le cercle & les trois Sections coniques, ce qui est déja connu par ceux, qui ont étudié les lieux geometriques, dans lesquels les inconnuës n'ont au plus que deux dimensions.

ARTICLE II.

Commencement de la construction commune à tous les Problèmes.

M. DESCARTES.

FIG 69 *Dans cette Figure BK est trop grande, elle ne doit être que le tiers de AE.*

APrès cela je fais KI Fig. 69. égale & parallele à BA, en sorte qu'elle coupe de BC la partie BK égale à m, à cause qu'il y a ici $+ m$.

La ligne CB fait avec la ligne AB l'angle donné CBA par les conditions du Problème. L'on ignore encore la longueur de CB, c'est-à-dire, en quel endroit doit être le point C, quoique l'on ait la valeur de CB exprimée en termes algebriques. Il faut donc que sur CB je prenne toutes les quantitez exprimées dans sa valeur trouvée par l'Analyse $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, je commence par le point B à déterminer cette valeur.

C'est pourquoi puisque cette valeur contient $+ m$, sur BC je coupe $BK = m$, en allant de B vers C. Ensuite par le point K je mene l'infinie KI parallele à AB, & je prends KI égale à AB, x. Les autres Exemples, où il y a $+ m$, sont à la ligne droite, Exemple 1. 3. 6. 7. à la parabole, Exemp. 2. 4. 5. 7. 8. 9. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 4. 8. 9. 10. 11. 13. 14. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, Ex. 7. 13. 16.

Et je l'aurois ajoûtée, en tirant cette ligne IK de l'autre côté, s'il y avoit eu $- m$.

Lorsqu'il y a $- m$ dans la valeur de CB, $y = - m + \frac{n}{z}x$, &c. il faut retrancher la ligne m de la ligne qui donne la valeur totale de y. Alors sur CB prolongée je coupe $BK = m$ au dessus de AB, c'est-à-dire, du côté où le point C n'est pas.

Les Exemples, où il y a $- m$, sont à la ligne droite, Exemple 4. à la parabole, Ex. 6. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 6. 12. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, Ex. 8. 9. 10. 11. 12. 14. 15. 16.

Et je ne l'aurois du tout point tirée, si la quantité m eût été nulle.

Les Exemples où m est nulle, sont à la ligne droite, Ex. 2. 5. à la parabole, Ex. 1. 3. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 1. 2. 3. 5. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, Ex. 1. 2. 5. 6.

FIG. 64. Puis je tire aussi IL, en sorte que la ligne IK est à KL, comme z à n, c'est-à-dire, que IK étant x, KL est $\frac{n}{z}x$. Et par même

moyen je connois aussi la proportion, qui est entre KL & IL, que je pose comme entre n & a: si bien que KL étant $\frac{n}{z}x$, IL est $\frac{a}{z}x$. Et je fais que le point K soit entre L, & C, à cause qu'il y a ici $-\frac{n}{z}x$.

L'on a $IK = x$, qui est ici connuë, parceque, c'est l'inconnuë, que l'on a determinée à être d'une telle grandeur. L'on peut donc faire cette Analogie $z : n :: IK, x : KL, \frac{n}{z}x$, dont le quatriéme terme $\frac{n}{z}x$ est connu, parceque les trois premiers le sont.

Je coupe donc sur BK, la ligne $KL = \frac{n}{z}x$. Je fais que le point K soit entre L & C, c'est-à-dire, que je prends KL en remontant du point K déja trouvé vers la ligne AB, parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$ dans la valeur de $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Car il faut retrancher $\frac{n}{z}x$ de la ligne, qui represente la valeur de y; ce qui arrive, lorsque je prends ainsi KL. En effet supposant ensuite que LC est $\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, j'aurai CB, $y = BK = +m, -KL = -\frac{n}{z}x, +LC = +\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Dans le triangle IKL, le côté IK, x est pris à volonté, le côté KL est $= \frac{n}{z}x$. L'angle $LKI =$ à l'angle ABR est connu, donc on connoît tout le triangle & par consequent le rapport des côtez KL, IL qui peut s'exprimer par la raison de la connuë n à la connuë a; on aura donc $n : a :: KL, \frac{n}{z}x : IL, \frac{a}{z}x$.

Les autres Exemples, où il y a $-\frac{n}{z}x$ sont à la parabole, Exemp. 8. 9. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 5. 8. 11. 12. 13. 14. à l'hyperbole par rapport à ses diametres. Ex. 6. 9. 10. 16.

Au lieu que Fig. 69. j'aurois mis L entre K & C, si j'eusse eu $+\frac{n}{z}x$. Fig. 69.

Lorsqu'on a $+\frac{n}{z}x$, dans la valeur de CB, $y = m + \frac{n}{z}x \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, il faut que la ligne CB, qui represente cette valeur, contienne $KL = \frac{n}{z}x$, afin que j'aye CB, $y = BK = +m, +KL = +\frac{n}{z}x, + LC = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Les Exemples, où il y a $+\frac{n}{z}x$ sont à la ligne droite, Exempl. 2. à la parabole, Ex. 3. 7. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 9. 10. à l'hyperbole rapportée à ses diametres, Ex. 8. 10. 11. 12. 13. 14. 15.

Et je n'eusse point tiré cette ligne IL, si $\frac{n}{z}x$ eût été nulle.

Les Exemples où $\frac{n}{z}x$ est nulle, sont à la ligne droite, Ex. 1. 4. 6. 7. à la parabole, Ex. 1. 2. 4. 5. 6. au cercle ou à l'ellipse, Ex. 1. 2. 3. 4. 6. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, Ex. 1. 2. 3. 7.

J'appellerai Regles dans la suite, soit les conditions que M. Descartes demande dans une équation, afin qu'elle appartienne à la ligne droite, ou au cercle, ou à une Section conique, soit les preceptes qu'il donne pour construire chaque équation.

Je nommerai toûjours AB, x; CB, y; BK, m; IK, x; KL, $\frac{n}{z}x$; IL, $\frac{a}{z}x$; CL, ce qui ſera ſous le ſigne radical. Et parceque, m étant nulle dans une équation, dans laquelle $\frac{n}{z}x$ ſe trouve, le point I eſt en A; le point K en B; & l'on a BL au lieu de KL, AL au lieu de IL; je nommerai dans ce cas BL, $\frac{n}{z}x$; AL, $\frac{a}{z}x$. Il en ſera de même de pluſieurs autres points ou lignes, qui tombent ſur d'autres, comme il ſera facile de s'appercevoir. Je nommerai mm la quantité connuë, qui eſt ſous le ſigne radical, lorſqu'elle ſera le quarré de la quantité nommée m; $ſſ$, lorſqu'elle ne ſera pas ce quarré; ω la quantité qui multiplie x, $\frac{p}{m}$ la quantité qui multiplie xx ſous ce même ſigne. C'eſt ce que prevoient fort bien tous ceux qui donnent des formules generales, dont on a parlé, L. 1. Part. 1. Sect. 4. Regl. 11. Ainſi l'on ne doit pas regarder certaines regles de M. Deſcartes comme fauſſes, parcequ'il ne deſcend pas en détail dans chaque cas particulier, parcequ'il ne parle pas de AL, par exemple. Car il ſuffit, qu'il ait averti, que quelques termes de ſon équation generale peuvent être nuls, ce qui eſt une marque certaine, que quelques points & quelques lignes de ſa conſtruction peuvent auſſi manquer.

ARTICLE III.

Conſtruction particuliere à la ligne droite.

M. DESCARTES.

FIG. 69. OR cela fait, il ne me reſte plus pour la ligne LC que ces termes, $LC = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. D'où je vois, que s'ils étoient nuls, ce point C ſe trouveroit en la ligne droite IL; & que s'ils étoient tels, que la racine s'en pût tirer, c'eſt-à-dire, que mm & $\frac{p}{m}xx$ étant marquez d'un même ſigne +, * $\omega\omega$ fût égal à $4pm$; ou bien que les termes mm & ωx, ou ωx & $\frac{p}{m}xx$ fuſſent nuls; ce point C ſe trouveroit en une autre ligne droite, qui ne ſeroit pas plus mal aiſée à trouver que IL.

* *Il y a dans les Editions Françoiſes de Leyde 1637. de Paris 1705.* un même ſigne + ou −, *ce qui eſt une faute d'impreſſion.*

M. Deſcartes donne en peu de mots les marques pour connoître; quand la queſtion de Pappus eſt un lieu à la ligne droite, & dans quelle ligne le point C, que l'on cherche, ſe trouve, lorſque c'eſt un lieu à la ligne droite.

La premiere marque, pour connoître, ſi un lieu eſt à la ligne droite, eſt celle-ci. Lorſque les inconnuës x, y n'ont toutes deux qu'une dimenſion dans une équation, & que leur plan xy ne s'y rencontre pas; le lieu de cette équation eſt toûjours une ligne droite. Tous ceux qui traitent des lieux geometriques, apportent cette Regle.

La seconde marque est celle-ci. Lorsque dans une équation, il n'y a qu'une des deux inconnuës, & qu'elle n'a qu'une dimension; le lieu de cette équation est encore une ligne droite. Quelques Geometres apportent cette marque dans leur traité des lieux geometriques, quelques autres l'omettent.

Il faut donc faire voir dans les regles suivantes, que M. Descartes nous propose ici des équations, qui ont une de ces deux marques; d'où il suit, que lorsque l'équation est telle, qu'il la détermine, le Problême se construira par une ligne droite.

REGLE I.

SI dans la derniere équation, dont $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$ est la formule generale, ce qui est sous le signe radical est nul, elle se construira par la ligne droite. Voyez Exemple 1. 2. 3.

Lorsque ce qui est sous le signe radical est nul, l'équation se reduit à $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x$; où, si le terme $\frac{n}{z}x$ est encore nul, elle se reduit à $y = \pm m$; & elle a les marques d'un lieu à la ligne droite.

REGLE II.

LOrsque ce qui est sous le signe radical est nul, le point C est dans la droite IL Fig. 69. Cette Regle suppose qu'il y a tout ensemble m & $\frac{n}{z}x$. Voyez Ex. 3. 4, Mais lorsque m est nul, le point C est dans la droite AL. Voyez Ex. 2. lorsque $\frac{n}{z}x$ est nul, le point C est dans la ligne IK. Voyez Ex. 1.

REGLE III.

S'Il y a quelque quantité sous le signe radical, & qu'on en puisse extraire la racine quarrée; le point C est encore sur une ligne droite. Voyez Ex. 4. 5. 6. 7.

La racine quarrée de xx est x. Dès que l'on pourra extraire la racine quarrée de ce qui est sous le signe radical, l'inconnuë x qui s'y trouve n'aura plus qu'une dimension. D'un autre côté l'inconnuë y n'a aussi qu'une dimension dans la formule generale: ainsi les inconnuës n'auront alors toutes deux qu'une dimension; marque certaine d'un lieu à la ligne droite.

Lorsque ce qui est sous le signe radical est tout connu, comme $\sqrt{\frac{p}{m}}$, il est aisé d'en extraire la racine quarrée, suivant ce que l'on a dit, Liv. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. Car si Fig. 7. FG est l'unité, $GH = \frac{p}{m}$; la perpendiculaire GI est $\sqrt{\frac{p}{m}}$, que je puis égaler à une connuë, & alors l'équation sera $y = f$, ou $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x + f$, qui signifie encore un lieu à la ligne droite. FIG. 7.

Mais quand est-ce que l'on pourra extraire la racine quarrée de ce qui est sous le signe radical de la formule $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$?

1. Lorſque les termes mm & ωx ſont nuls, & que $\frac{p}{m}xx$ eſt poſitif; car alors l'on aura $\sqrt{\frac{p}{m}xx}$, ou $x\sqrt{\frac{p}{m}}$, comme l'on vient de dire. Mais ſi le terme $\frac{p}{m}xx$ étoit ſeul & negatif $\sqrt{-\frac{p}{m}xx}$, ou $x\sqrt{-\frac{p}{m}}$, la racine ſeroit imaginaire, & l'on ne pourroit pas en extraire la racine.

2. Lorſque les termes ωx & $\frac{p}{m}xx$ ſont nuls, & que mm eſt poſitif; car alors l'on aura $\sqrt{mm} = m$; & la formule ſe reduira à $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x + m$. L'on ne peut pas extraire la racine de $\sqrt{-mm}$.

3. Lorſque les trois termes ſont ſous le ſigne radical, il faut que les deux mm, $\frac{p}{m}xx$ ſoient marquez d'un même ſigne $+$, & que $\omega\omega$ ſoit égal à $4mp$, ou $\omega = \sqrt{4mp} = 2\sqrt{mp}$. La raiſon eſt qu'alors ce qui ſe trouve ſous le ſigne radical eſt ſous la forme d'un quarré parfait algebrique, $\sqrt{mm + 2x\sqrt{mp} + \frac{p}{m}xx}$, dont la racine quarrée eſt $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$; ou bien ſous la forme $mm - 2x\sqrt{mp} + \frac{p}{m}xx$, dont la racine quarrée eſt $m - x\sqrt{\frac{p}{m}}$, ou $-m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$.

4. L'on ne peut pas extraire la racine quarrée, lorſque ſous le ſigne radical il n'y a que deux termes $\sqrt{\pm mm \pm \omega x}$, ou $\sqrt{\pm mm \pm \frac{p}{m}xx}$; $\sqrt{\pm \omega x \pm \frac{p}{m}xx}$; ainſi dans tous ces cas, le lieu n'eſt pas à la ligne droite. L'on ne peut pas non plus extraire la racine quarrée, lorſque ce qui eſt ſous le ſigne radical n'eſt pas une formule de parfait quarré algebrique. La raiſon en eſt évidente.

REGLE IV.

LOrſqu'on peut extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical, le point *C* eſt dans une autre ligne que *IL*, Voyez Ex. 5. 6. 7. n. 5. Le point *C* eſt auſſi dans une autre ligne que *IL*, Ex. 1. Quoiqu'il n'y ait point d'extraction de racine à faire : & il eſt dans *IL*, Ex. 4. quoiqu'on ait pû extraire la racine.

EXEMPLE I. $y = m$.

FIG. 70. 1. SOient Figure 70. les quatre lignes droites *AB*, *QD*, *EF*, *GH* données de poſition paralleles entr'elles, & qu'il faille trouver un point *C*, duquel ayant tiré d'autres lignes droites, *CB*, *CD*, *CF*, *CH* ſur les données, & faiſant avec elles un même angle de 60. degrez *CBA*, *CDQ*, *CFE*, *CHG*. De ſorte que ce qui eſt produit par la multiplication de *CB* & *CH*, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de *CD* & *CF*.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons les diſtances données des paralleles entr'elles, BD, b; DF, c; FH, d; & les inconnuës CB, y; $CD = CB + BD$, $y + b$; $CF = CB + BD + DF$, $y + b + c$; $CH = CB + BD + DF + FH$, $y + b + c + d$.

3. On a par les conditions du Problême cette équation $yy + by + cy +$

$dy = yy + 2by + cy + bb + bc$; d'où l'on forme $y = \frac{bb + bc}{d - b}$ & en faisant $\frac{bb + bc}{d - b} = m$; on aura $y = m$.

4. Prenez $BC = m$; par le point c menez la ligne droite ICK parallele à AB; la ligne IK est le lieu cherché, & satisfait au Problême en tous ses points.

Dém. Au point quelconque c de la ligne IK on trouve la même équation qu'au point C. Menez ch parallele à CH, vous aurez mêmes lignes, & mêmes angles, d'où l'on tire, comme n. 3. $y = m$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer 1° que la ligne droite IK se trouve par la Geometrie simple, en coupant CB sur l'infinie CH; & que par consequent le Problême est plan. 2° Que les points cherchez Gc ne se trouvent pas sur la ligne IL de Fig. 69. mais sur la ligne IK, suivant la Regle 2. 3° Que y n'a point de valeur negative; car les y partent de la droite IK, & s'étendent toutes du côté de la ligne Hh. 4° Que la valeur de y est constante, puisque l'on a toûjours $cb = CB$.

5° Si la derniere équation étoit $y = -m$, ou $-y = m$; l'on nommeroit CB, $-y$.

EXEMPLE II. $y = \frac{n}{z}x$.

1. Soient Fig. 71. données de position les quatre lignes droites AB, AD, EF, GH, qui composent un parallelogramme. Il faut trouver un point C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH, sur les données; & dont CD, CH soient paralleles à AB, & CB, CF paralleles à AD: ce qui est produit par la multiplication de CB & CH, soit égal à ce qui est produit par la multiplication de CD & de CF. Fig. 71.

2. Supposons la chose faite, & nommons les données AE, $n = NL = BF$; AN, $z = LE = DH$; & les inconnuës CB, y; $CF = BF - CB$, $n - y$; $AB = CD$, x; $CH = DH - CD$, $z - x$.

3. Puisque l'on demande que $CB \times CH$ soit égal à $CD \times CF$, l'on aura $zy - xy = nx - xy$; $zy = nx$, $y = \frac{n}{z}x$.

4. L'équation $zy = nx$ donne cette proportion & en même tems cette construction $AN, z : NL, n :: AB, x : BC, y$; & 24. 6. Eucl. Le point C est sur le diametre du parallelogramme $ANLE$. Ainsi tirez la diagonale ACL, prolongez-la à l'infini des deux côtez; elle est le lieu cherché.

Dém. Au point C, il est évident que $AN, z : NL, n :: AB, x : BC, y$, $y = \frac{nx}{z}$. Ou bien $CB \times CH = CD \times CF$, $zy - xy = nx - xy$, $zy = nx$, $y = \frac{n}{z}x$. Au point quelconque c pris dans l'angle ILG à cause des triangles semblables ANL, Abc, $AN, z : NL, n :: Ab, x : bc, y$; $y = \frac{nx}{z}$. Ou bien $cb \times ch = cd \times cf$, $xy - zy = xy - nx$, $y = \frac{n}{z}x$. Au point c pris dans l'angle MAP, $AN, z : NL, n :: Ab, -x :$

FIG 71. bc, $-y$, $y = \frac{nx}{z}$. Ou bien $cb \times ch = cd \times cf$, $xy - zy = xy - nx$, $y = \frac{n}{z}x$. Ainsi tous les points de la diagonale AL prolongée satisfont au Problême, & elle est le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Si $ANLE$ étoit un quarré ou un rhombe, n seroit égal à z, & l'équation $y = \frac{n}{z}x$, se changeroit en $y = x$; & les CB seroient égales aux CD.

6. Il faut remarquer 1° que le lieu AL se trouve par la Geometrie ordinaire, en faisant AN, $z : NL$, $n :: AB$, $x : BC$, y. Car le point C ainsi trouvé est dans le diametre du parallelogramme.

Le Problême est donc plan. 2° Les points cherchez C, c sont sur AL & non pas sur IL de Fig. 69. Regl. 2. 3° Les inconnuës x, y ont des valeurs positives & negatives variables, comme dans les lieux geometriques. 4° Au point A, x & y sont nulles; parcequ'elles commencent en A. 5° Le Problême n'est aussi possible que dans les deux angles, par lesquels la diagonale CN passe.

EXEMPLE III. $y = m - \frac{n}{z}x$.

FIG. 72. 1. Fig. 72. comme n. 1. Ex. 2. excepté que l'on demande ici, que $CB \times CD$ soit égal à $CF \times CH$.

2. Comme n. 2. Ex. 2.

3. Puisque $CB \times CD = CF \times CH$, l'on aura $xy = nz - zy - nx + xy$; $y = n - \frac{n}{z}x$, & faisant $m = n$, $y = m - \frac{n}{z}x$.

4. Parce qu'il y a $+m$, sur BC prolongée au dessous de AB prenez $BK = m = n = BF$; par le point K ou F, menez IK parallele & égale à AB; la ligne IK sera la même que EF. Ensuite faites, $IG = AN$, $z : GN = AE$, $n :: IK$, $= AB$, $x : KL = KC$, $\frac{nx}{z}$. Donc $CB = BK - CK$, $m - \frac{n}{z}x = y$.

Le point C est un point du diametre du parallelogramme $ANGE$. Tirez donc le diametre infini IL, il satisfait en tous ses points au Problême.

Dém. Au point quelconque c pris au dedans du parallelogramme, étant Ab, $x = cd$; $bN = AN - Ab$, $z - x = ch$; cb, y; $cf = bf - cb$, $n - y$, les triangles IGN, Ikl sont semblables, & donnent cette Analogie, IG, $z : GN$, $n :: Ik = AB$, x; $kl = cf$, $n - y$; $y = n - \frac{n}{z}x = m - \frac{n}{z}x$, ou bien $cb \times cd = cf \times ch$, $xy = nz - nx - zy + xy$; $y = n - \frac{nx}{z} = m - \frac{nx}{z}$. 2° Au point c pris hors du parallelogramme dans l'angle dIf, $cb \times cd = cf \times ch$; $- xy = - xy + zy + nx - nz$; $y = n - \frac{n}{z}x$. 3° Au point c pris hors du parallelogramme dans l'angle bNh, $cb \times cd = cf \times ch$, $- xy = - xy + zy + nx - nz$; $y = n - \frac{n}{z}x = m - \frac{n}{z}x$. La ligne droite IL est donc le lieu du Problême proposé, Ce qu'il falloit démontrer.

5. Les points cherchez C, c, sont sur la ligne IL. Reg. 2.

EXEMPLE

EXEMPLE IV. $y = -m + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 73. ſoient données de poſition les trois lignes AB, AD, EF; dont AB, EF ſont paralleles entr'elles; & AD leur eſt perpendiculaire. Il faut trouver le point C, duquel ayant tiré les droites CB, CD, CF perpendiculaires ſur les données; le rectangle ſous CB & CF, ſoit égal au quarré de CD multiplié par AI, moins le quarré de AI moitié de AE, c'eſt-à-dire, à $\overline{CD}^2 \times AI - \overline{AI}^2$. Fig. 73.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons la connuë AE, $2m = BF$; AI, m; les inconnuës CB, y; $AB = CD$, x; $CF = CB + BF$, $y + 2m$,

3. Par l'hypotheſe $CB \times CF = \overline{CD}^2 \times AI - \overline{AI}^2$; $yy + 2my = mxx - mm$; $yy + 2my + mm = mxx$; dont les racines ſont $y + m = \sqrt{mxx}$, & ſi l'on prend m pour l'unité, & $p = m$, l'équation pourra ſe changer en $y + m = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$; $y = -m + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, ou, puiſque $\frac{p}{m} = 1$, $y = -m + \sqrt{xx}$, $y = -m + x$.

4. Parcequ'il y a $-m$, au deſſus de AB prenons $BK = m$; par le point K menons KI parallele à AB & infinie; coupons $AL = AI$, & par les points I, L, tirons l'infinie IL, qui eſt le lieu cherché.

Dém. 1° Au point C, à cauſe des triangles équiangles IAL, ICD, $IA : AL :: ID : CD$. Mais $IA = AL$, donc $ID = CD$, x; or CK eſt égal à ID, donc CK, x. Et $CB = CK - KB = x - m$. 2° Au point c, étant $Ab = cd$, $-x$; cb, $-y$, $bf = EA$, $2m$, $cf = cb - bf$, $-y - 2m$. Les triangles IAL, IEl ſont égaux en tout ſens, & les triangles IEl, Idc ſont équiangles : donc $IE : El :: Id : dc$; & étant $IE = El$, l'on aura $Id = cd$, $-x$. D'un autre côté $ck = Id$, $-x$. Ainſi $cb - y = ck + kb$, $-x + m$; $y = -m + x$. L'on trouvera la même équation dans tous les autres points de la droite, IL, par exemple au point c de cette façon. Suppoſons $cb \times cf = \overline{cd}^2 \times AI - \overline{AI}^2$, $yy + 2my = mxx - mm$; d'où l'on tire, comme n. 2. $y + m = \sqrt{mxx} = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, $y = -m + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$. C'eſt pourquoi la ligne IL ſatisfait au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

Les points C, c ſont ſur la droite IL, Regle 2. Car quoique la quantité x ſoit ſeule dans l'équation $y = -m + x$, elle ſera $\frac{n}{z}x$, ſi l'on poſe $n = z = 1$.

EXEMPLE V. $y = -\frac{n}{z}x + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$.

1. SOient données de poſition les quatre lignes AB, AD, AH, AF. Fig. 74. qui ſe coupent toutes au point A, où elles font entr'elles des angles BAR, RAS, SAT, chacun de 30. degrez. Il faut trouver un point C, duquel on puiſſe tirer quatre lignes droites CB, CD, CF, CH ſur les données, faiſant les angles CBG, CDA, CFA, CHA de ſoixante Fig. 74.

degrez de ſorte que le rectangle ſous CB, CH ſoit égal au rectangle ſous CD, CF.

2. Suppoſons la choſe faite, & ayant prolongé CB, juſqu'à ce qu'elle coupe toutes les données ; nommons AB, x ; CB, y. Et parce que le Problême ne fournit point d'unité, prenons la ligne z pour l'unité.

Tous les angles du triangle ABR ſont donnez. Le côté AB, que j'ai pris d'une grandeur déterminée, eſt connu. Puiſque je connois les angles, je connoîtrai le rapport de leurs Sinus, qui ſont pour l'angle droit ARB le Sinus total 100000, pour l'angle BAR de 30. deg. le Sinus 50000 la raiſon de 100000 à 50000, eſt comme 2, que je nomme b, à 1, que je nomme z. Je connoîtrai encore par le Theorême de la Trigonometrie, L. 1. Part. 3. Sect. 1. Art. 2. La raiſon des côtez AB, BR, qui étant la même que celle des Sinus de leurs angles oppoſez, l'on aura cette proportion $b : z :: AB, x : BR ; \frac{xz}{b}$; & $CR = CB + BR$, $\frac{by + xz}{b}$.

De même dans le triangle CRD les angles ſont connus. L'angle CRD eſt droit, l'angle CDR ou CDA de 60. degrez, dont le Sinus eſt 86602 ; dont la raiſon au Sinus total 100000, eſt celle de $1 = z$ à $\frac{100000}{86602}$, que je nomme $2c$. Ainſi la raiſon de leurs côtez oppoſez CR, CD ſera la même, & l'on pourra dire, $z : 2c :: CR, \frac{by + zx}{b} : CD, \frac{2bcy + 2czx}{bz}$.

FIG. 74. Les angles du triangle BAS ſont de 60. degrez. Le triangle eſt donc équilateral, & $BS = AB$, x ; $CS = CB + BS$, $y + x$.

Après cela le triangle SCH, dont les angles CSH ou BSA, CHS ou CHA ſont de 60. degrez, ſera auſſi équilateral ; & $CH = CS$, $y + x$.

Enſuite dans le triangle ABT, l'angle ABT ou ABS eſt de 60. degrez, l'angle BAT de 90. l'angle ATB de 30. Or le Sinus 50000 de BTA eſt au Sinus 100000 de BAT, comme $1 = z$ à $2 = b$; donc $z : b :: AB, x : BT, \frac{bx}{z}$; & $CT = \frac{zy + bx}{z}$.

Enfin dans le triangle CTF tous les angles ſont connus ; CTF eſt de 30. degrez, CFT de 60. Or la raiſon de 86602 Sinus de l'angle de 60. degrez eſt à 50000 Sinus de l'angle de 30. comme $1 = z$ à $\frac{50000}{86602} = c$. Donc $z : c :: CT, \frac{zy + bx}{z} : CF, \frac{czy + bcx}{zz}$.

5. L'on demande $CB \times CH = CD \times CF$, c'eſt-à-dire, en termes analytiques $yy + xy = \frac{2bcczyy + 2ccxzzxy + 2bbccxy + 2bcczxx}{bz^3}$; & $bz^3yy + bz^3xy = 2bcczyy + 2ccxzzxy + 2bbccxy + 2bcczxx$; $2bcczyy - bz^3yy + 2bbccxy + 2cczzxy - bz^3xy = -2bcczxx$; & diviſant par $2bccz - bz^3$, l'on fait $yy + \frac{2bbccxy + 2cczzxy - bz^3xy}{2bccz - bz^3} = \frac{-2bcczxx}{2bccz - bz^3}$. Mettez $\frac{2n}{z}$ pour $\frac{2bbcc + 2cczz - bz^3}{2bccz - bz^3}$ l'équation ſera $yy + \frac{2nxy}{z} = \frac{-2bcczxx}{2bccz - bz^3}$, ajoûtez de chaque côté $\frac{nnxx}{zz}$, vous trouverez $yy + \frac{2nxy}{z} + \frac{nnxx}{zz} = \frac{nnxx}{zz} - \frac{2bcczxx}{2bccz - bz^3}$; ſubſtituez encore $\frac{p}{m}$ à la place de $\frac{nn}{zz} - \frac{2bccz}{2bccz - bz^3}$; ce ſera $yy + \frac{2nxy}{z} + \frac{nnxx}{zz} = \frac{p}{m}xx$; dont les raci-

nes ſont $y + \frac{nx}{z} = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$; $y = -\frac{n}{z}x + x\sqrt{\frac{p}{m}}$. Soit Fig. 7. $Fg = z$; $gH = \frac{p}{m}$; gi ſera $\sqrt{\frac{p}{m}}$, L. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. que j'appelle f. Ainſi l'on aura $y = -\frac{n}{z}x + fx$. Soit enfin $f - \frac{n}{z} = \frac{h}{z}$, ce ſera $y = \frac{h}{z}x$.

4. Fig. 74. Faites $z : h :: AB, x : BC, \frac{h}{z}x = y$. Par les points A, C, tirez l'infinie AC, elle eſt le lieu cherché. Fig. 74.

Dém. 1° Au point quelconque c pris dans l'angle FAG, tirez cb parallele à CB ; les triangles ABC, Abc ſont équiangles ; $AB : CB :: z : h :: Ab, x : cb, \frac{h}{z}x = y$. 2° Au point quelconque c pris dans l'angle PAT, menez cb parallele à CB, & nommez Ab, $-x$; cb, $-y$. Deſlors $AB : CB :: z : h :: Ab, -x : cb, -y$; & $-zy = -hx$; $y = \frac{h}{z}x$. De plus ſi au même point c pris dans l'angle PAT, vous tirez encore cd parallele à CD, cf à CF, ch à CH ; vous trouverez des triangles ſemblables à ceux, qui ont été ſupputez n. 3. & qui donneront en ſuivant la même Methode, $cd = \frac{-2bcy - 2czx}{bz}$; $ch = -y - x$; $cf = \frac{-czy - bcx}{zz}$. C'eſt pourquoi $cb \times ch = cf \times cd$ s'exprimera ainſi $yy + xy = \frac{2bccz yy + 2cczzxy + 2bbccxy + 2bcczxx}{bz^3}$ même équation que n. 3. d'où l'on tirera auſſi, comme là, $y = -\frac{n}{z}x + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, & enfin $y = \frac{h}{z}x$. La ligne AL ſatisfait donc en tous ſes points au Problême, & elle eſt le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer 1° que les points C, c ſont ſur la ligne AL Regle 2. 2° Que l'équation $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, a été reduite à la forme $y = \frac{n}{z}x$ par l'extraction de la racine quarrée. 3° Que le Problême n'eſt poſſible que dans les angles FAB, TAP.

6. L'on auroit pû reſoudre l'équation $yy + \frac{2n}{z}xy = \frac{-2bcczxx}{2bccz - bz^3}$ par l'évanoüiſſement du ſecond terme, & prenant $y + \frac{n}{z}x = v$, $v - \frac{n}{z}x = y$; car ſubſtituant pour y & yy leur valeur, l'on auroit trouvé $v = \sqrt{\frac{nnxx}{zz} - \frac{2bcczxx}{2bccz - bz^3}}$. Soit $\frac{nn}{zz} - \frac{2bccz}{2bccz - bz^3} = \frac{p}{m}$; l'on trouvera par la ſubſtitution $v = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$; & remettant encore pour v ſa valeur, l'équation eſt $y + \frac{n}{z}x = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$. Et l'on achevera comme n. 3. 4.

EXEMPLE VI. $y = m + \sqrt{s}$.

1. SOient Fig. 75. les quatre lignes AB, QD, EF, GH, données de poſition, toutes paralleles entr'elles & également éloignées l'une de l'autre ; & qu'il falloit trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données ; ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CH, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD & CF. Fig. 75.

2. Suppoſons la choſe faite, & parceque le Problême eſt poſſible en quelques endroits, impoſſible en d'autres ; commençons par les cas, où il eſt impoſſible ; aprés avoir nommé a chaque diſtance des paralleles $BD = DF = FH$; & y la ligne cherchée qui ſe termine à AB.

FIG. 75. 3. Supposons que le point cherché soit N pris hors des paralleles au dessous de AB. Les lignes cherchées sont NB, y; $ND = NB + BD$, $y + a$; $NF = NB + BD + DF$, $y + 2a$; $NH = NB + DF + FH$, $y + 3a$.

Et parce qu'on demande que $NB \times NH$ soit égal à $ND \times NF$, l'équation sera $yy + 3ay = yy + 3ay + 2aa$, qui se reduit à $2aa = 0$. Ce qui montre que le Problême est impossible dans tout point N pris au dessous de AB. Il est évident qu'en tout point P pris au dessus de GH on aura la même preuve de l'impossibillté $2aa = 0$.

4. Au point R pris entre les paralleles EF, QD les lignes cherchées sont RB, y; RD, $y - a$; RF, $2a - y$; RH, $3a - y$; ce qui donnera $-2aa = 0$ Problême encore impossible.

5. Maintenant supposons que le point C est pris entre les paralleles AB, QD. Les lignes cherchées sont CB, y; CD, $a - y$; CF, $2a - y$; CH, $3a - y$. Ce qui donne cette équation $3ay - yy = 2aa - 3ay + yy$; $yy - 3ay = - aa$. Ajoûtons de chaque côté $\frac{9}{4}aa$; l'équation sera $yy - 3ay + \frac{9}{4}aa = \frac{5}{4}aa$. Extrayons les racines quarrées de chaque membre. La premiere est $y - \frac{3}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; $y = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. La seconde $-y + \frac{3}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $y = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Les deux $y = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ positives.

6. L'on construit la seconde racine $y = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, en extrayant la racine quarrée de $\frac{5}{4}aa$, Liv. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. que je nomme b, & l'équation est $y = \frac{3}{2}a - b$, & faisant $\frac{3}{2}a - b = m$, l'on fait $y = m$. C'est pourquoi l'on coupe BK ou $BC = m$, par le point C l'on mene l'infinie Cc ou IK parallele à AB, elle est la ligne cherchée.

Dém. Du point quelconque c tirez sur les données les perpendiculaires cb, cd, cf, ch, elles seront chacune égales aux lignes qui partent du point C, & qui ont les mêmes lettres : donc $cb = CB$, $y = m = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. D'où il suit encore que $cb \times ch = cd \times cf$ donnera la même équation $3ay - yy = 2aa - 3ay + yy$ comme n. 6. Cc est donc la ligne cherchée. Ce qu'il falloit démontrer.

7. L'on construira la premiere racine $y = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, en prenant $BM = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & menant par le point M l'infinie Mm parallele à AB. La ligne Mm satisfait aussi au Problême.

Dém. Au point quelconque m, l'on aura $mb = MB$, $\frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = y$. De plus mb étant y, l'on aura $md = y - a$; $mf = y - 2a$; $mh = 3a - y$; & $cb \times ch = cd \times cf$, $3ay - yy = yy - 3ay + 2aa$; même équation que n. 5. la ligne Mm satisfait donc au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

8. Il faut remarquer 1° que les droites Cc, Mm ont été trouvées par l'extraction de la raciné quarrée, & en ne se servant que de la regle & du compas; ainsi le Problême est plan. 2° L'équation $y = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ ne peut pas d'abord se reduire à la formule de M. DESCARTES $y = m \pm \sqrt{mm}$, parceque posant $\frac{3}{2}a = m$, $\frac{5}{4}aa$ n'est pas mm, c'est pour cela que j'ai mis

au commencement $y = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{ſ}$. Je me ſervirai de $ſ$, $ſſ$ pour m, mm dans des cas ſemblables. Elle ſe reduit pourtant à la formule $y = m$ n. 6. 3° Les points C, c ſont ſur la ligne IK, Regle 4. Les valeurs de y ſont conſtantes puiſque l'on a par tout $cb = CB$, y; $mb = MB$, y. Il n'y a point de x. 4° L'inconnuë y n'a que des valeurs poſitives, ſoit qu'elle ſorte de la droite Cc, ſoit qu'elle ſorte de la droite Mm; puiſque toutes les y ſe terminent à la parallele AB. Ainſi l'équation $y = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ a deux racines poſitives. 5° Le Problême eſt poſſible en deux endroits, impoſſible en trois. 6° Quoiqu'on ne cherchât que la ligne Cc, la reſolution a encore donné la ligne Mm.

EXEMPLE VII. $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. SOient Fig. 71. 72. données de poſition les lignes AB, AD, EF, GH, qui font un parallelogramme EN. Il faut trouver un point C, d'où l'on tire les lignes CB, CD, CF, CH, ſur les données; étant CB, CF paralleles à AD; CD, CH à AB. Il faut encore que $CB \times CF$ ſoit égal à $CD \times CH$. FIG. 75. 4.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons AE, $2m = BF$; AN, $\omega = DH$, CB, y; AB, $x = CD$. L'on aura $CF = 2m - y$, $CH = \omega - x$. Si l'on fait $p = m = 1$, & que AN ſoit double de AE, on aura $\omega = 2\sqrt{mp} = \sqrt{4mp}$.

3. Par l'hypotheſe $CB \times CF = CD \times CH$, c'eſt-à-dire $2my - yy = \omega x - xx$; $yy - 2my = xx - \omega x$. Mettons mm de chaque côté & extrayons les racines quarrées. Elles ſeront $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + xx}$. Et parceque $p = m$, on trouvera la formule de M. Deſcartes $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, ou parceque $\omega = 2\sqrt{mp}$, $y = m \pm \sqrt{mm - 2x\sqrt{mp} + \frac{p}{m}xx}$, qui par l'extraction des racines devient $y = m \pm m \mp x\sqrt{\frac{p}{m}}$, ou $y = 2m - x\sqrt{\frac{p}{m}}$, $y = x\sqrt{\frac{p}{m}}$; ou parceque $\sqrt{\frac{p}{m}} = 1$, $y = 2m - x$, $y = x$.

4. Pour conſtruire l'équation $y = 2m - x$; parce qu'il y a $+ 2m$, prenez $BK = 2m = AE$ au deſſous de AB, par le point K menez IK ou EF parallele à AB, de BK retranchez KL ou $FC = IK = AB$, x, par les points I, L tirez l'infinie IL; c'eſt le lieu cherché.

Dém. Au point C vous avez $CB = BF - CF$, $2m - x$. Au point c pris au deſſus de AB, on a cette proportion $EF : FC :: Ef ; fc$; mais $EF = AB = FC$, x; donc $Ef = Ab$, $x = fc$. Et $cb = cf - bf$, $-y = x - 2m$, $y = 2m - x$. Au point c pris au deſſous de EG, où vous avez $-x$ vous trouverez $cb = cf + fb$, $-x + 2m$.

Pour conſtruire l'équation $y = x$, il faut couper $BC = AB$, & par les points A, C mener une droite infinie, qui ſera le lieu cherché.

5. L'équation $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$ ſe reduit à $y = 2m - x$, $y = x$; ou en poſant $z = n = 1$, $y = 2m - \frac{nx}{z}$, $y = \frac{nx}{z}$. Les points C, c ſont ſur IL dans le premier cas, ſur AL dans le ſecond, Regle 2.

ARTICLE IV.

Conſtruction commune aux trois Sections coniques, & au cercle.

M. DESCARTES.

MAis lorſque cela n'eſt pas, ce point *C* eſt toûjours en l'une des trois Sections coniques, ou en un cercle, dont l'un des diametres eſt en la ligne *IL*, & la ligne *LC* eſt l'une de celles, qui s'appliquent par ordre à ce diametre; ou au contraire *LC* eſt parallele au diametre, auquel celle qui eſt en la ligne *IL* eſt appliquée par ordre. A ſavoir ſi le terme $\frac{p}{m}xx$ eſt nul, cette Section conique eſt une parabole; & s'il eſt marqué du ſigne +, c'eſt une hyperbole, & enfin s'il eſt marqué du ſigne —, c'eſt une ellipſe; excepté ſeulement ſi la quantité aam eſt égale à pzz, & que l'angle *ILC* ſoit droit, auquel cas on a un cercle, au lieu d'une ellipſe.

REGLE I.

LOrſque ſous le ſigne radical, qui ſe trouve dans la valeur de *y*, il y a quelque quantité, dont on ne peut pas extraire la racine quarrée, l'un des diametres eſt dans la ligne *IL* Fig. 69. & *LC* eſt une des appliquées à ce diametre. Ou au contraire *LC* eſt parallele au diametre, auquel une partie de *IL* eſt appliquée.

Les exceptions de cette Regle ſont pour chaque courbe dans l'Article, qui contient ſa conſtruction particuliere.

FIG. 69. Les diametres dont il eſt ici parlé ſont les diametres conjuguez.

Ainſi cette expreſſion ne regarde pas la parabole, qui n'a pas des diametres conjuguez. Bien plus, cela ne regarde que l'hyperbole, comme on le verra, Article VII.

REGLE II.

LOrſque $\frac{p}{m}xx$ n'eſt pas ſous le ſigne radical, la ligne, qui contient tous les points cherchez; eſt une parabole, Voyez Art. V.

Lorſque $-\frac{p}{m}xx$ eſt ſous le ſigne radical, la ligne qui reſout le Problême eſt un cercle, ou une ellipſe, Voyez Art. VI.

C'eſt un cercle, ſi 1° $aam = pzz$ ou $m = p$; ſi 2° l'angle *ILC*, ou l'angle que l'appliquée fait avec ſon diametre eſt droit. Voyez Art. 6. Ex. 2. 4. 6. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

C'eſt une ellipſe, ſi ces deux conditions, ou l'une des deux manquent. Voyez Art. 6. Ex. 3. 5. 14.

Lorſque $\frac{p}{m}xx$ eſt ſous le ſigne radical, le lieu cherché eſt une hyperbole. Voyez Art. 7.

L'on peut ajoûter, que c'est une hyperbole équilatere, si $aam = pzz$, Fig. 69.
ou $m = p$, Voyez Art. 7. Ex. 1. 2. 3. 6. 7.

Et que, si aam n'est pas égal à pzz, ou m, à p, c'est une hyperbole non équilatere, Voyez Art. 7. Ex. 5. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.

Comme M. DESCARTES n'a point parlé de l'hyperbole considerée entre ses asymptotes; l'on peut rapporter ici la Regle, que l'on en donne dans les lieux Geometriques.

1° Lorsque le plan xy des deux inconnuës est dans l'équation, sans aucun quarré des inconnuës, la ligne qui satisfait au Problême est une hyperbole construite entre ses asymptotes.

2° Lorsque le plan xy se trouve dans une équation avec le quarré d'une des inconnuës seulement, la ligne cherchée est une hyperbole prise ou par rapport à ses diametres, ou par rapport à ses asymptotes: de sorte que la même équation, si elle se reduit par l'évanoüissement des seconds termes, sera à l'hyperbole rapportée à ses diametres; & si elle se reduit par la simple substitution de nouvelles valeurs, elle sera à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, Voyez Art. 7. Ex. 9. & Art. 8.

Au reste les marques, par lesquelles M. DESCARTES veut que l'on reconnoisse le lieu qu'il faut construire, reviennent à celles que l'on donne communément dans les lieux Geometriques. Il n'y a qu'à les comparer; les voici.

Le lieu est à la parabole, lorsque l'équation ne contient que le quarré de l'une des inconnuës, & que le plan xy sous les deux inconnuës ne s'y trouve pas; l'exemple est $yy = px$. Extrayez la racine quarrée des deux côtez pour avoir $y = \sqrt{px}$; ce qui est sous le signe radical de la valeur de y ne contient pas $\frac{p}{m}xx$, ou le quarré de la seconde inconnuë x; ce qui est la Regle de M. DESCARTES touchant la parabole.

Le lieu est au cercle, lorsque l'équation contient le quarré de chaque inconnuë, si 1° les quarrez étant l'un d'un côté de l'équation, l'autre de l'autre, ils ont des signes contraires; si 2° ces quarrez sont reduits à l'unité; si 3° l'angle des abscisses avec les appliquées est droit; l'exemple est $yy = aa - xx$, ou $yy = 2ax - xx$. Extrayez la racine quarrée des deux membres; vous ferez $y - \sqrt{aa - xx}$, ou $y = \sqrt{2ax - xx}$; vous aurez, ainsi que M. DESCARTES le demande $-xx$, ou $-\frac{p}{m}xx$ sous le signe radical; il veut aussi que l'angle des abscisses avec les ordonnées soit droit; la troisiéme condition que M. DESCARTES exige, c'est $aam = pzz$, c'est-à-dire, comme ces deux quantitez expriment le rapport du diametre au parametre, qu'il exige que le diametre soit égal au parametre, ce qui convient au cercle.

Or dans les lieux geometriques la condition, qui répond à celle-ci, c'est que les quarrez des deux inconnuës soient reduits à l'unité: ce qui arrive toûjours dans la derniere équation reduite; lorsque le diametre est égal au

FIG. 69 parametre. D'où il suit que c'est la même chose de vouloir $aam = pzz$, ou les deux quarrez reduits à l'unité, Voyez Art. 6. Ex. 6. 9. 10.

Le lieu sera à l'ellipse & non pas au cercle, si la seconde & la troisiéme condition, que l'on a rapportées pour le cercle, ou même si l'une des deux manquent. L'Exemple est $\frac{d}{p}yy = aa - xx$, ou $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$; ou bien $yy = \frac{aap - pxx}{d}$, $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$. Extrayez la racine quarrée $y = \sqrt{\frac{aap}{d} - \frac{p}{d}xx}$, $y = \sqrt{\frac{2ap}{d}x - \frac{p}{d}xx}$. Tou cela est aussi conforme à ce que M. Descartes demande pour l'ellipse.

Le lieu est à l'hyperbole par ses diametres, lorsque les deux quarrez des inconnuës étant l'un d'un côté de l'équation, l'autre de l'autre, ils ont tous deux le même signe. L'Exemple est $\frac{d}{p}yy = xx + aa$, ou $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$; ou bien $yy = \frac{pxx + paa}{d}$, $yy = \frac{2ax + pxx}{d}$. Extrayez la racine quarrée, $y = \sqrt{\frac{pxx}{d} + \frac{aap}{d}}$, $y = \sqrt{\frac{2ax}{d} + \frac{p}{d}xx}$; & vous avez, ainsi que M Descartes le veut, $y + \frac{p}{d}xx$ sous le signe radical.

Il ne faut pas oublier que l'on peut avoir pour la parabole une valeur de y, dans laquelle il n'y aura point de signe radical, & où il y aura xx, Voyez Art. 5. Ex. 1. Le même peut aussi arriver dans l'hyperbole rapportée à ses diametres. Voyez Art. 7. Ex. 9. La valeur de y a moins souvent le signe radical, lorsqu'il s'agit de l'hyperbole entre ses asymptotes, Voyez Art. 8.

ARTICLE V.

Construction particuliere à la Parabole.

M. DESCARTES.

QUe si cette Section est une parabole, son côté droit est égal à $\frac{\omega z}{a}$, & son diametre est toûjours en la ligne IL de Fig. 69. & pour trouver le point N, qui en est le sommet, il faut faire IN égale à $\frac{amm}{\omega z}$; & que le point I soit entre L & N, si les termes sont $+ mm + \omega x$; ou bien que le point L soit entre I & N, s'ils sont $+ mm - \omega x$; ou bien il faudroit que N fût entre I & L, s'il y avoit $- mm + \omega x$. Mais il ne peut jamais y avoir $- mm$, en la façon que les termes ont ici été posez. Et enfin le point N seroit le même que le point I, si la quantité mm étoit nulle. Au moyen de quoi il est aisé de trouver cette parabole par le premier Problême du premier Livre d'Apollonius.

Ce Problême est la Proposition 52. qui apprend à décrire sur un plan une parabole, étant donnez le parametre, le sommet du diametre, & l'angle que les ordonnées doivent faire avec les coupées.

L'on

L'on trouve auſſi, dans tous les Traitez des Sections coniques, differentes methodes pour décrire une parabole ſur un plan. L'on a donné Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2. la maniere de décrire une parabole en cherchant ſes differens points ſur un plan : d'où l'on peut déja conclurre que les Problêmes, qui ſe conſtruiſent avec une parabole ſeulement, ſont plans. Voyez auſſi Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Fig. 69.

REGLE I.

LE côté droit, ou le parametre de la parabole, qu'il faut conſtruire, eſt $\frac{\omega z}{a}$. Cette Regle ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ dans l'équation à conſtruire. Voyez Exemple 3. 7. 8. 9.

Car le parametre eſt ω dans les Ex. 1. 2. 4. 5. 6.

REGLE II.

LE diametre de la parabole eſt dans la ligne *IL* de Fig. 69. cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 7. 8. 9.

Car le contraire arrive aux Ex. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

REGLE III.

LE point *N* eſt le ſommet de la parabole. Pour le trouver ſur la ligne *IL* l'on coupe $IN = \frac{amm}{\omega z}$. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 7. 8. L'on prend $IN =$, $\frac{aff}{\omega z}$. Ex. 9.

Le contraire arrive aux Exemp. 4. 5. 6.

REGLE IV.

LOrſqu'il y a $+mm + \omega x$ ſous le ſigne radical, il faut faire en ſorte que le point *I* ſoit entre le ſommet *N*, & le point *L*; c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre *IN* du côté oppoſé à celui, où eſt le point *L*, comme il arrive Fig. 69. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 7.

Car le même n'arrive pas entierement, Ex. 4.

REGLE V.

LOrſqu'il y a $+mm - \omega x$ ſous le ſigne radical, il faut faire tomber le point *L* entre le point *I* & le ſommet *N*; c'eſt-à-dire, que l'on prend *IN* du côté, où eſt le point *L*. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, & que *IN* eſt plus grande que *IL*, V. Ex. 8.

Car il n'arrive pas entierement la même choſe, Ex. 5.

REGLE VI.

LOrſqu'il y a $-mm + \omega x$ ſous le ſigne radical, il faut faire tomber le ſommet *N* entre le point *I* & le point *L*; c'eſt-à-dire, que l'on prend en-

core IN du côté, où eſt le point L, mais que IN eſt moindre que IL. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 3.

Car ce n'eſt pas entierement le même, Ex. 6.

REGLE VII.

LOrſque la quantité mm eſt nulle, le ſommet N eſt le même que le point I, Voyez Ex. 2.

Mais cela n'arrive pas, Ex. 1. 3.

REGLE VIII.

FIG. 76. J'Ajoûterai comme une Regle, 1° ſoit Fig. 76. l'abſciſſe AD, x; l'ordonnée CD, y; le parametre de la parabole p. Tous les lieux à la parabole ſont fondez ſur cette proprieté $yy = px$; c'eſt à dire, que le quarré d'une appliquée quelconque CD eſt égal au rectangle fait ſous le parametre p & l'abſciſſe correſpondante AD; laquelle commence toûjours au ſommet A du diametre, ſur lequel les x s'étendent. Et cela eſt vrai, ſoit que l'équation $yy = px$ ait d'abord été donnée par le Problême, ſoit qu'elle ſoit la reduite d'une autre plus compoſée, que les conditions du Problême ont produite. On dira la même d'une autre équation de même forme $xx = py$ $vv = fz$. 2° De ſorte que le diametre, dont on doit ſe ſervir, eſt toûjours ſur la ligne droite, à laquelle ſe termine l'inconnuë y ou v, dont l'équation contient le quarré. Et ſi l'autre inconnuë x ou z étoit ſur une autre ligne, il faudroit la tranſporter ſur le diametre, ſuivant la Regle 10. Sect. 4. L. 1. & faire enſuite dans l'équation les changemens, que cette Regle demande, comme on verra Ex. 3. n. 4. 6. Ex. 4. n. 6. Ex. 5. n. 7. Ex. 7. n. 6. où l'on connoîtra, comment Mr DESCARTES a trouvées les Regles, qu'il a données.

M. DESCARTES avertit, qu'il ne peut y avoir $-mm$ dans l'équation, de la façon dont les termes ſont ici poſez. Cet avertiſſement regarde autant le cercle, l'ellipſe, l'hyperbole, que la parabole. Car M. DESCARTES met ſon équation

$$yy = \frac{\begin{matrix} -dekzzy & -dezzxy & +bcfglx \\ & -cfgzxy & \\ +cfglzy & +bcgzxy & -bcfgxx \end{matrix}}{ez^3 - cgzz}$$

comme une formule generale, dans laquelle il n'y a point de terme compoſé de ſeules quantitez connuës: ainſi il ne peut y avoir de terme entierement connu dans la valeur de y, que celui qu'on y fera entrer. Or, comme l'on a vû, Part. 2. Sect. 2. Art. 1. n. 1. Ayant $yy = 2my - \frac{2nxy}{z} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, ou $yy, -2my + \frac{2nxy}{z} = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, il faut, pour en tirer la valeur de y, ajoûter dans chaque membre de cette équation $mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz}$, afin d'avoir $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} +$

$\frac{nnxx}{zz} = mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, & enfin $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. C'eſt pourquoi dans l'opinion, où étoit M. DESCARTES, que ſa formule ne devoit point avoir de terme entierement connu, & qu'il falloit, pour avoir la valeur de y, faire neceſſairement entrer $+ mm$, il pouvoit avertir, que de la façon que les termes ſont ici poſez, la valeur de y, ne contiendroit jamais $- mm$. Voyez pour la parabole, Ex. 6. 9. Pour le cercle ou l'ellipſe, Ex. 7. 10. 14. Pour l'hyperbole rapportée à ſes diametres, Ex. 2. 6. 12. 15. Ou l'on a $- mm$ ou $- ff$.

EXEMPLE I. $y = \frac{p}{m}xx$.

1. SOient Fig. 76. AB, AD, EF, trois lignes données de poſition, dont AB, EF ſont paralleles entr'elles, & la troiſiéme AD les coupe à angles droits ; & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF perpendiculaires ſur les données ; ce qui eſt produit pat la multiplication de CB & CF ſoit égal au quarré de CD, + le quarré de CB. Fig. 76.

2. Je ſuppoſe la choſe déja faite, & je nomme la connuë AE, $m = BF = bf$, CB, $y = AD$; AB, $x = CD$; $CF = CB + BF\,y + m$.

3. Puiſque l'on demande que $CB \times CF$ ſoit égal à $\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2$, l'on aura l'équation $yy + my = xx + yy$; $my = xx$; $y = \frac{xx}{m}$; & mettant $p = m = 1$. $y = \frac{p}{m}xx$. Or l'équation $my = xx$ eſt à la parabole.

4. Je prends AE, m pour le parametre de la parabole, qu'il faut conſtruire ; AD pour ſon axe ; A pour le ſommet de l'axe ; CD pour une appliquée à cet axe ; & je décris la parabole CAc, en faiſant $m : x :: x : \frac{xx}{m} = y = CB$; par ce moyen chaque fois que je déterminerai une nouvelle grandeur de AB, x, je trouverai une nouvelle grandeur de CB, y ; & par conſequent un point C de la parabole CAc, qui eſt le lieu cherché. La demonſtration en eſt facile.

5. Il faut remarquer 1° que le Problême eſt plan. 2° Que la quantité y n'a point de valeurs negatives, que x a des valeurs poſitives & negatives ; que les valeurs de x & de y ſont variables, comme dans les lieux geometriques ; que le point A étant le commencement des x & des y, ces deux inconnuës ſont nulles dans ce point, il ſuit auſſi que le Problême eſt impoſſible dans les angles BAE, bAE. 3° Que le parametre n'eſt pas $\frac{\omega z}{a}$, mais ω, ou m, Regle 1. que le diametre n'eſt pas dans la ligne IL de Fig. 69. ni dans aucune, qui paroiſſe tenir ſa place, Regle 2. mais le diametre AD eſt parallele à CB ; & l'appliquée CD eſt parallele à AB. Voyez le Texte de M. DESCARTES, Art. 4. 4° Que, quoique l'on trouve ici $y = + \frac{p}{m}xx$, il n'y a pourtant rien de contraire à la Regle 2. Art. 4. qui détermine les lieux à l'hyperbole conſiderée par rapport à ſes diametres : parceque

Fig. 76. cette Regle ſuppoſe que $+\frac{p}{m}xx$ eſt ſous un ſigne radical, ce qui n'arrive pas dans ce Problême. Seulement il faut conclurre que la valeur de y n'a pas toûjours un ſigne radical, & que même elle peut avoir $+\frac{p}{m}xx$ dans une équation à la parabole. Or cette équation $y=\frac{xx}{m}$ eſt fort naturelle à la parabole, dont l'équation eſt $yy=px$, $x=\frac{yy}{p}$.

6. De l'équation $my=xx$ l'on auroit pû faire $x=\sqrt{my}$, ou en poſant $m=\omega$, $x=\sqrt{\omega y}$, qui reſſembleroit à la formule $y=\sqrt{\omega x}$, & l'on chercheroit les points de la parabole par des extractions de racines quarrées : mais la conſtruction ne ſeroit pas ſi ſimple, que celle que l'on a fait n. 4. en ne ſe ſervant que d'une proportion.

EXEMPLE II. $y=m\pm\sqrt{\omega x}$.

Fig. 77. 1. SOient Figure 77. données de poſition les quatre droites AB, AD, EF, GH, qui font un rectangle $AGLE$. Soit AI la moitié de AE. Il faut trouver un point C, duquel on tire les quatre droites, CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données, de ſorte que le produit de $BC\times FC$, plus le quarré de AI, ſoient égaux au produit de $CD\times CH$, plus le quarré de AB.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons AE, $2m=GL=BF$; $AI=m$; & AG, $\omega=HD$; les inconnuës AB, $x=CD$; CB, y; $CF=CB-BF$, $y-2m$; $CH=HD-CD$, $\omega-x$.

3. Par la ſuppoſition $\overline{BC\times CF}+\overline{AI}^2=\overline{CD\times CH}+\overline{AB}^2$ c'eſt-à-dire en termes analytiques $yy-2my+mm=\omega x$; dont les racines ſont, la poſitive $y-m=\sqrt{\omega x}$, $y=+m+\sqrt{\omega x}$; la negative $-y+m=\sqrt{\omega x}$, $y=m-\sqrt{\omega x}$; les deux $y=m\pm\sqrt{\omega x}$. Equation à la parabole.

4. Pour conſtruire l'équation $y=m+\sqrt{\omega x}$; parcequ'il y a $+m$, ſur la ligne BC prenez $BK=m$; par le point K menez l'infinie KI, qui ſera le diametre de la parabole, dont le ſommet N tombera ſur I parceque mm eſt nul Regle 7. & le parametre $\omega=AG$. Ces choſes étant données avec l'angle droit ABC ou NKC qui lui eſt égal, lequel angle NKC eſt celui que les coupées & les ordonnées font enſemble ; l'on peut décrire la parabole CNc, & trouver tous ſes points C, c, en ne faiſant pour le plus qu'extraire la racine quarrée de ωx, après avoir déterminé la valeur de x : car alors on aura la valeur de CB, y, qui correſpond à chaque valeur arbitraire de x. Voyez Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. n. 2. & L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

Je dis que cette parabole eſt le lieu cherché, qui donne la même valeur de y dans tous ſes points : mais qui ne donne l'équation $yy-2my+mm=\omega x$, que ſur les portions déterminées XV, xv.

Dém. Chaque abſciſſe NK, Nk eſt x; ω étant le parametre, tous les CK, ck ſont $\sqrt{\omega x}$. Maintenant 1° au point C pris ſur l'arc déterminé VX de la parabole, l'on a CB, $y=CK+KB$, $\sqrt{\omega x}+m$. 2° Au point c

pris sur l'arc déterminé NV, l'on a cb, $y = ck + kb$, $\sqrt{\omega x} + m$. Mais FIG. 77.
on a là $\overline{bc \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $2my - yy + mm = \omega x - xx + xx$; $yy - 2my + mm = 2mm - \omega x$; $y = m \pm \sqrt{2mm - \omega x}$. Ce qui ne s'accorde pas avec l'équation & les racines trouvées n. 3. Puisque ce que l'on trouve ici est un lieu à une autre parabole. 3° Au point c pris sur l'arc infini XZ; cb, $y = ck + kb$, $\sqrt{\omega x} + m$, Mais l'on a $\overline{bc \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $yy - 2my + mm = xx - \omega x + xx$; $y = m \pm \sqrt{-\omega x + 2xx}$, équation à l'hyperbole. 4° Au point c pris sur l'arc ux, cB a une valeur negative $-y = cK - kB$, $\sqrt{\omega x} - m$, qui se change en $y = m - \sqrt{\omega x}$, racine negative de n. 3. $\overline{cB \times cF} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $yy - 2my + mm = \omega x$, même équation que n. 3. 5° Au point c pris sur l'arc fini Nu, cb a la valeur positive de n. 3. $y = bk - ck$, $m - \sqrt{\omega x}$. Mais on a là $\overline{cb \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $2my - yy + mm = \omega x$, d'où l'on tire $y = m \pm \sqrt{2mm - \omega x}$, équation à une autre parabole. 6° Au point c pris sur l'arc infini xz, cb a une valeur negative $-y = ck - bk$, $\sqrt{\omega x} - m$; $y = m - \sqrt{\omega x}$. Mais l'on a $\overline{cb \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $yy - 2my + mm = -\omega x + 2xx$. $y = m \pm \sqrt{-\omega x + 2xx}$ à l'hyperbole. Il est donc vrai, que tous les points de la parabole CNc donnent la même valeur de y; & l'équation $yy - 2my + mm = \omega x$ sur les arcs finis XV, xu.

5. Il faut remarquer 1° que le Problême est plan. 2° Que la quantité x n'a point de valeurs negatives, parceque la parabole ne s'étend que du côté de G, H, vers lequel les positives se prennent; que la quantité y n'a des valeurs negatives, que sur l'arc indefini uxz; qu'elle en a deux positives sur l'arc déterminé VNu; qu'au point V elle en a une positive, qu'au point u elle n'en a point, comme x n'en a point au sommet N, qui répond au point A son origine; que le point u est aussi le commencement des y; que les valeurs tant de x que de y sont variables. 3° Que le parametre n'est pas $\frac{\omega z}{a}$, mais ω, Regle 1. Que le diametre n'est pas dans IL, mais dans IK, Regle 2. Le point N est le même que le point I, parceque $mm = o$, Regle 7. 4° Le Problême est non seulement impossible dans les angles RAE, RAP, par lesquels la parabole ne passe pas; mais encore sur l'arc fini VNu, & sur les infinis XZ, xz, puisque l'on ne trouve pas dans ces endroits l'équation qu'il y faut avoir, quoiqu'on y trouve la valeur de y qu'on cherche, à savoir la positive $y = m + \sqrt{\omega x}$ sur toute la portion infinie NZ, la negative $y = m - \sqrt{\omega x}$ sur toute la portion infinie Nz. D'où il suit qu'afin qu'une ligne soit le lieu cherché, il ne suffit pas que l'on trouve dans tous ses points la valeur de y par l'addition ou soustraction de quelques lignes : mais il faut encore qu'on y trouve l'équation, d'où l'on a tiré cette valeur de y. L'équation n'est donc construite que sur les arcs

qui donnent les racines de y & l'équation de n. 3. & en construisant la racine positive, l'on a aussi construit la negative. 5° L'équation $yy - 2my + mm = \omega x$ contient un terme qui n'a point de quantité inconnuë.

EXEMPLE III. $y = \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x}$.

Fig. 78.

1. Soient Fig. 78. données de position les lignes AD, AB, EF; dont AB, EF sont paralleles entr'elles, & AD leur est perpendiculaire. Il faut trouver plusieurs points tels que C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, le produit de CD multipliée par CF soit égal au quarré de CB plus le quarré de la moitié de CD.

2. Supposez la chose faite, & nommez la donnée AE, $\omega = BF$; les inconnuës CB, y; AB, $x = CD$; $CF = CB + BF$, $y + \omega$.

3. Par l'hypothese $CD \times CF = \overline{CB}^2 + \frac{1}{4}\overline{CD}^2$; $xy + \omega x = yy + \frac{1}{4}xx$; $yy - xy + \frac{1}{4}xx = \omega x$; dont les deux racines sont $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega x}$, ou $y = \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x}$, en posant $n = 1 = \omega$, $z = 2$. Equation à la parabole.

4. Pour la construction, coupez $BL = \frac{n}{z}x$ au dessous de AB, parcequ'il y a $+\frac{n}{z}x$ Art. 2. Par les points A, L tirez l'infinie AL, sur laquelle Regle 8. le diametre sera, parceque $CL = \sqrt{\omega x}$ est l'appliquée de la parabole cherchée. Il faut donc transporter l'abscisse AB, x sur $AL = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BL}^2} = x\sqrt{\frac{5}{4}}$; & faisant $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{a}{z}$, AL est $\frac{a}{z}x$ expression de M. DESCARTES pour IL de Fig. 69. Pour avoir la valeur du parametre p, il faut considerer que par la nature de la parabole $\overline{CL}^2 = p \times AL$, $\omega x = \frac{pax}{z}$, donc le parametre $p = \frac{\omega z}{a} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. Ayant le parametre, le diametre AL, l'angle ALC, que les coordonnées doivent faire, on décrira la parabole CAc, laquelle est le lieu cherché. Le sommet N est au point A.

Dém. $\overline{CL}^2 = \omega x$; $CL = \sqrt{\omega x}$. Cette expression convient à toutes les ordonnées cl. Maintenant 1. au point C, vous avez CB, $y = BL + LC$, $\frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x}$ racine vraye; que vous trouverez, aussi bien que l'équation de n 3. sur toute la partie infinie NC de la parabole. 2° Au point c pris entre les paralleles AB, EF, où cB a une valeur negative, l'on a $cd \times cF = \overline{cB}^2 + \frac{1}{4}\overline{cd}^2$, $\omega x + xy = yy + \frac{1}{4}xx$ même équation que n. 3. 3° Au point c pris sur l'arc infini VZ, ou cb, $y = \frac{n}{z}x - \sqrt{\omega x}$ racine negative; de plus $cd \times cf = \overline{cb}^2 + \frac{1}{4}\overline{cd}^2$, $xy + \omega x = yy + \frac{1}{4}xx$, même équation que n. 3.

La parabole CNc satisfait donc au Problême, & donne la racine positive de y sur la partie infinie NC, la negative sur la partie infinie NVZ. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer 1° que le Problême est plan. 2° Que la quantité y n'a des valeurs negatives, que sur l'arc déterminé NV, & que $y = 0$ au

point V. 3° Que la partie infinie NC de la parabole donne la racine positive $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x}$; & la partie infinie NVZ la negative $y = \frac{n}{z}x - \sqrt{\omega x}$; & parceque l'on trouve dans tous les points la même équation ; en construisant la racine positive, l'on a aussi construit la negative. 4° Que le parametre est $\frac{\omega z}{a}$, Regle 1. Le diametre est dans AL, Regle 2. Le sommet N tombe sur A, parceque mm est nulle, Regle 7. 5° Que le Problême est impossible dans les angles PAE, PAD, par lesquels la parabole ne passe pas. Fig. 78.

6. Si l'on vouloit reduire l'équation $yy - xy + \frac{1}{4}xx = \omega x$ par l'évanoüissement du second terme ; l'on prendroit $y - \frac{1}{2}x = v$, $v + \frac{1}{2}x = y$; & mettant pour yy & pour xy leur valeur ; la premiere équation se changeroit en $vv = \omega x$, lieu à la parabole, qui se construit ainsi.

Faisons $2 : 1 :: AB, x : BL, \frac{1}{2}x$; par les points A, L, tirons AL, qui sera le diametre Regl. 8. parceque CL, $v = CB - BL$, $y - \frac{1}{2}x$, qui est l'ordonnée de la reduite $vv = \omega x$, se termine à la ligne AL. Donc AL est abscisse, dont nous trouverons la valeur $\frac{a}{z}x$, comme n. 4. aussi bien que celle du parametre $\frac{\omega z}{a}$. La parabole CNc décrite sur le diametre AL, dont le sommet est A, avec le parametre $\frac{\omega z}{a}$, & l'angle CLA des abscisses & des ordonnées, sera le lieu cherché.

Dém. Au point c pris entre les paralleles AB, EF. Par la nature de la parabole $\overline{cL}^2 = \frac{\omega z}{a} \times AL, \frac{a}{z}x$; $vv = \omega x$, & pour vv substituant sa valeur ; l'on forme $yy - xy + \frac{1}{4}xx = \omega x$; équation à construire. Ce qu'il falloit démontrer.

L'on voit comment M. DESCARTES a pû connoître que le parametre de la parabole est $\frac{\omega z}{a}$, lorsque l'équation contient $\frac{n}{z}x$, que le diametre est dans AL, & que le sommet est au point A, étant $mm = 0$.

EXEMPLE IV. $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$.

1. Fig. 79. soient données de position les quatre lignes droites AB, AD, EF, GH, qui font un parallelogramme rectangle ; & qu'il faille trouver un point C, duquel on puisse tirer quatre autres lignes droites CB, CD, CF, CH sur les données, de sorte que ce qui se produit par la multiplication de BC, CF, moins le quarré de CD, soit égal à ce qui se produit par la multiplication CD, CH.

2. Nommons les données AE, $2m = Gm = BF = bf$; AG, $\omega = Em = DH = dh$; & les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y ; CF, $y - 2m$; CH, $\omega - x$.

3. Puisque l'on demande $\overline{BC \times CF} - \overline{CD}^2 = CD \times CH$, l'équation sera $yy - 2my - xx = \omega x - xx$; $yy - 2my + mm = mm + \omega x$, dont les racines sont $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$, à la parabole.

4. Parcequ'il y a $+m$, je coupe $BK = m$ au dessous de AB, & par le

FIG. 79. point K je mene l'infinie KI parallele à AB. Le point I eſt le milieu de AE, & $AI = BK$, m; $IK = AB$, x. Le parametre eſt ω; ſur KI je prends $IN = \frac{mm}{\omega}$ Regle 3. N eſt le ſommet de la parabole; le diametre ſur IK; parcequ'il y a $+ mm + \omega x$, je fais que le point I ſoit entre le ſommet N & le point K Regle 4. L'angle CKN des abſciſſes avec les ordonnées eſt droit. Je puis donc décrire la parabole CNc, comme on l'a dit, Exemple 2. n. 4. Je dis qu'elle donne à la verité la même valeur de y dans tous ſes points : mais qu'elle ne donne l'équation $yy - 2my = \omega x$ que ſur les arcs finis EZ, AZ.

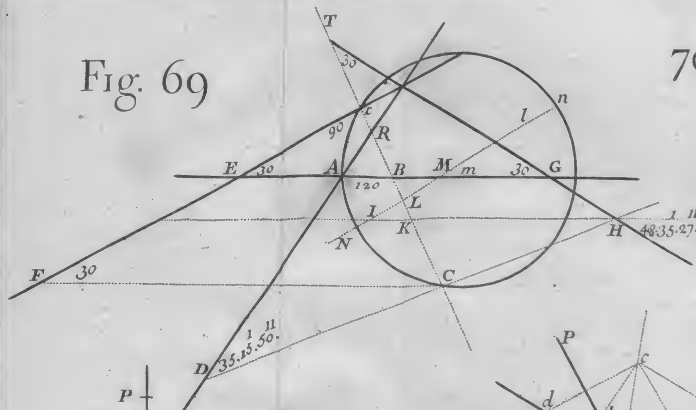
En effet tous les KN, kN ſont $\frac{mm}{\omega} + x$, tous les CK, ck ſont $\sqrt{mm + \omega x}$, le parametre étant ω. Sur l'arc EZ les CB, y ſont $= m + \sqrt{mm + \omega x}$ racine poſitive; ſur l'arc Az, $y = m - \sqrt{mm + \omega x}$ racine negative & dans tous les deux arcs on a l'équation $yy - 2my = \omega x$, comme n. 3. ſur les arcs EN, AN on a cb, $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$ & l'équation $yy - 2my = \omega x - 2xx$ à l'ellipſe, differente de n. 3. Sur les arcs XZ, xz on a cb, $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$ & ſur tous les deux l'équation $yy - 2my = - \omega x + 2xx$ à l'hyperbole, encore differente de n. 3.

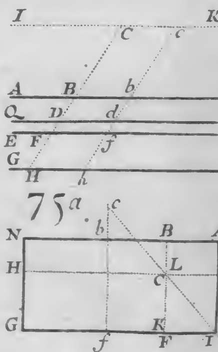
5. Il faut remarquer 1° que le Problême eſt plan. 2° Que les inconnuës x, y ont des valeurs poſitives & negatives; au point A il n'y a ni x, ni y. 3° Que la moitié infinie NC de la parabole donne la valeur poſitive de y; & la moitié infinie Nc donne la negative. 4° Que le parametre eſt ω, Regle 1. le diametre dans IK, Regle 2. le point I eſt entre le ſommet N & le point K parcequ'il y a $+ mm + \omega x$, Regle 4. $IN = \frac{mm}{\omega}$, Regle 3. 5° Qu'il ne ſuffit pas qu'une ligne donne dans tous ſes points la valeur de y, pour être le lieu de l'équation propoſée; mais qu'il faut encore que tous les points donnent l'équation, dont la valeur de y a été tirée.

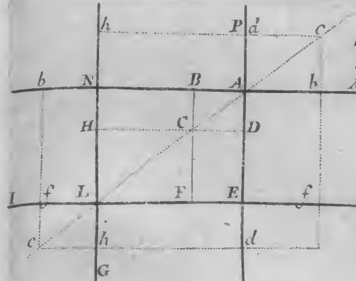
6. L'on connoîtra que le parametre doit être ω, & $IN = \frac{mm}{\omega}$, ſi l'on reduit l'équation $yy - 2my = \omega x$ en faiſant évanoüir le ſecond terme. Soit $y - m = v$, $y = v + m$, la reduction donne $vv = mm + \omega x$. 1° L'abſciſſe NK, qui doit être multipliée par le parametre contient x; & le produit de cette multiplication eſt $mm + \omega x$, qui par la nature de la parabole eſt égal à vv quarré de l'appliquée; je prends donc ω pour le parametre, afin que multipliant IK, x j'aye dans le produit ωx. De plus le même parametre doit multiplier toute l'abſciſſe NK, nommons IN, r, NK ſera $NI + IK$, $r + x$, qui étant multipliée par ω, fera $\omega r + \omega x$. Mais ce produit doit être égal à $mm + \omega x$, puiſque ces deux quantitez ſont chacune égale au quarré vv de l'appliquée. J'ai donc $\omega r + \omega x = mm + \omega x$; $\omega r = mm$; $r = \frac{mm}{\omega} = IN$. Voyez Regle 8.

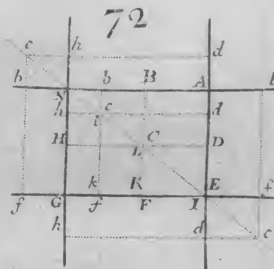
7. Vous avez Exemp. 5. n. 3. $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$, dont la conſtruction donneroit une parabole, qui dans tous les points ſatisferoit au Problême.

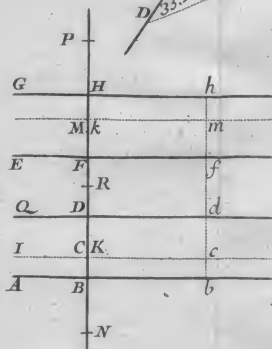
EXEMPLE

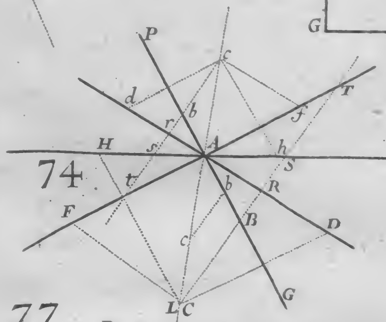




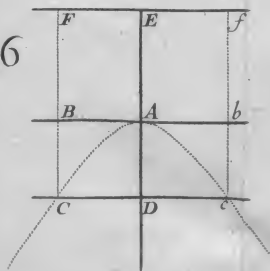


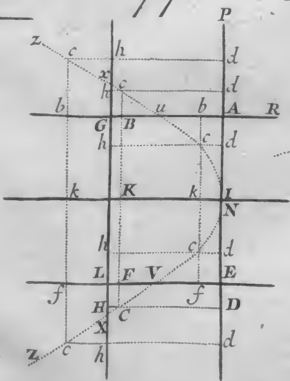


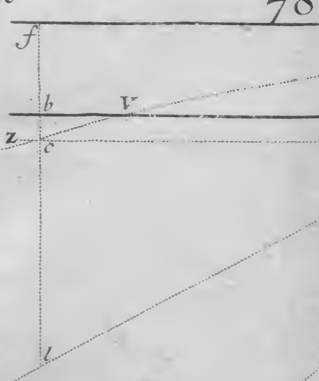


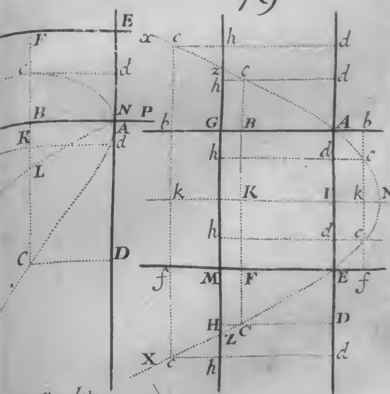












Gravé par Daudet.

EXEMPLE V. $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x}$.

1. FIg. 80. soient données de position les quatre droites *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, dont les trois *AD*, *EF*, *GH* font, en se coupant, un triangle équilateral, & la quatriéme *AB* est parallele à *EF*. Il faut trouver un point *C*, duquel on puisse tirer quatre autres lignes droites *CB*, *CD*, *CF*, *CH* perpendiculaires sur les données, de telle sorte qu'on ait $CB \times CD = CF \times CH$. Fig. 80.

2. Après avoir supposé la chose faite, & pris la donnée *BF* distance des paralleles *AB*, *EF*, pour l'unité; vous nommerez les inconnuës *AB*, x; *CB*, y; $CF = BF - CB$, $1 - y$: Prolongez *CB* en *R*; & remarquez que tous les angles, qui se font autour du point *A* sont de 60. degrez.

Maintenant dans le triangle *ABR* l'angle *ABR* est droit supp. l'angle *BAR* de 60. degrez; donc l'angle *ARB* est de 30. Le sinus de 60. degrez est 86602. celui de 30. est 50000; & la proportion du second au premier est comme 1 à $\frac{86602}{50000}$ ou $\frac{43301}{25001}$, que je nomme b. Or par le Theorême de Trigonometrie, L. 1. Part. 3. Sect. 1. Art. 2. L'on a cette proportion des côtez du triangle *ABR* avec le sinus de leurs angles opposez, $1 : b :: AB$, x: *BR*, bx; & $CR = CB + BR$, $y + bx$.

Ensuite dans le triangle *CHR* rectangle en *H* supp. l'on a cette analogie, comme le sinus total 100000 de l'angle droit *CHR* est à 50000 sinus de l'angle *CRH*; ou comme $2 : 1 ::$ ainsi le côté *CR*, $y + bx$ est à *CH* $\frac{y+bx}{2}$.

De plus les triangles *ABT*, *ABR*, sont égaux; donc $BT = bx$; & $CT = y - bx$.

Après cela les angles du triangle *CDT* sont connus; donc le sinus total 100000 de l'angle droit *CDT* est à 50000 sinus de l'angle *CTD* de 30. degrez; ou 2 est à 1, comme le côté *CT*, $y - bx$ est au côté *CD*, $\frac{y-bx}{2}$.

3. L'on demande $CB \times CD = CF \times CH$; l'équation sera donc $\frac{yy - bxy}{2} = \frac{y + bx - yy - bxy}{2}$; dont les racines sont $y = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}bx}$, équation semblable à celle de l'Exemple IV.

4. Que l'on demande $CB \times CF = CD \times CH$; l'équation sera celle-ci; $yy - \frac{4}{5}y = \frac{1}{5}bbxx$; dont les racines sont $y = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{5}bbxx}$, équation à l'hyperbole, qui seroit $y = m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$, en posant $\frac{2}{5} = m$, $\frac{1}{5}bb = \frac{p}{m}$.

5. Mais si l'on demande $CB \times CH = CD \times CF$, l'équation est $yy - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}bx$; dont les racines sont $y = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{2}bx}$, qui se reduit à $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x}$, en faisant $\frac{1}{4} = m$; $\frac{1}{2}b = \omega$, & l'équation est à la parabole.

Fig. 80. 6. L'on construira le Problème de cette maniere. Parcequ'il y a $+m$, sur CB coupez $BK = m$ de sorte que le point K soit entre B & C; par le point K menez l'infinie KI parallele à AB, tel que la partie IK soit égale à AB, x; prenez $IN = \frac{mm}{\omega}$ Regle 3. parcequ'il y a $mm - \omega x$, faites que le point K tombe entre N & I, Regle 4. le point N est le sommet de la parabole; le diametre est IK, Regle 2. le parametre ω, Regle 1. l'angle CKI des coupées & des ordonnées est droit. Vous pouvez donc, comme on l'a dit Exemple 2. n. 4. décrire la parabole cCN, qui est le lieu cherché.

Dém. L'abscisse NK est $IN - IK$, $\frac{mm}{\omega} - x$. Par la nature de la parabole $CK = \sqrt{mm - \omega x}$; ce qui se peut démontrer de tous les ck, parceque lorsque le point c est pris au dessous de IA, $Ik = Ab$, $-x$; & $Nk = NI + Ik$, $\frac{mm}{\omega} - x$, qui étant multipliée par le parametre ω, donne $mm - \omega x$ pour $\overline{ck}^2$, & $ck = \sqrt{mm - \omega x}$. 1° Au point C, l'on a $CB = BK + KC$, $y = m + \sqrt{mm - \omega x}$, racine vraye. Et c'est à ce point C qu'on a fait le calcul de n. 5. 2° Au point c pris entre le sommet N & le point A, (ce point c n'est pas écrit, pour éviter la confusion dans la Figure,) on a $cB = KB - Kc$, $y = m - \sqrt{mm - \omega x}$ racine fausse de n. 5. 3° Au point c pris auprès de G, l'on a $cb = bk + kc$, $y = m + \sqrt{mm - \omega x}$ racine vraye. De plus comme n. 2. l'on trouvera dans le triangle Abr, que br est $-bx$, parceque Ab est là $-x$; cb, y; $cf = 1 - y$; $cr = y + bx$; dans le triangle chr, ch est $\frac{y+bx}{2}$; $bt = br$, $-bx$; $ct = y - bx$; dans le triangle cdt, cd est $\frac{y-bx}{2}$. Ensuite par la supposition $cb \times ch = cd \times cf$, $yy - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}bx$, même équation que n. 5. 4° Au point c pris dans l'angle Zat, (l'on n'a pas tiré la ligne ch pour éviter la confusion dans la Figure) l'on trouvera Ab, $-x$; cb, $-y$; $cf = -y + 1$; br, $-bx$; $cr = -y - bx$; ch, $\frac{-y-bx}{2}$; $bt = br$, $-bx$; $ct = -bx$; $+y$; cd, $\frac{-bx+y}{2}$. Et $cb \times ch = cd \times cf$, $\frac{yy+bxy}{2} = \frac{bxy - yy - bx + y}{2}$, même équation que n. 5. 5° La parabole passe par le point A, car à ce point par la nature de la parabole, l'on aura le parametre $\omega \times IN$, $\frac{mm}{\omega} = \overline{IA}^2$, c'est-à-dire, $mm = mm$. Enfin dans tous les points de la parabole l'on trouve les valeurs de y, la positive sur la moitié NCc, la negative sur la moitié NAc; & par tout l'équation $2yy - y = -bx$: La parabole CNA est donc le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

7. Faisons $y - \frac{1}{4} = v$, $y = v + \frac{1}{4}$, l'équation $yy - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}bx$ se reduira par la substitution à $vv = \frac{1}{16} - \frac{1}{2}bx$, où faisant $\frac{1}{4} = m$, $\frac{1}{2}b = \omega$, $vv = mm - \omega x$. Maintenant par la nature de la parabole vv est le quarré de CK, $mm - \omega x$ est le rectangle sur $NK \times$ le parametre. De plus les deux termes de ce rectangle prouvent que x n'est pas égale à l'abscisse, &

le terme ωx prouve que le parametre est ω. A present soit $r - x$ l'abscisse, le rectangle $NK \times \omega$ est $\omega r - \omega x = mm - \omega x$; d'où l'on tire $r = \frac{mm}{\omega}$ la quantité IN, de laquelle il faut ôter IK, x pour avoir l'abscisse NK, & on connoît ainsi que le point K doit être entre les points I, N. Le parametre est ω, Regle 1. le diametre dans IK, Regle 2. IN est $\frac{mm}{\omega}$, Regle 3. le point K est entre le sommet N & le point I, parcequ'il y a $mm - \omega x$, Regle 5.

EXEMPLE VI. $y = -m \pm \sqrt{-ff + \omega x}$.

1. COmme Exemple 5. n. 1. excepté, que l'on suppose le point C dans l'angle BAR Figure 81. & que l'on demande $CB \times CD = \overline{CF \times CH} - \overline{BF}^2$. FIG. 81.

2. Comme n. 2. tous les angles autour du point A sont de 60. degrez, l'on nommera AB, x; CB, y; BF, 1; mais l'on aura CF, $y + 1$.

L'on trouvera encore BR, bx; mais $CR = BR - CB$, $bx - y$.

L'on trouvera par consequent CH, $\frac{bx - y}{2}$.

Ensuite l'on trouvera $BT = BR$, bx; mais $CT = CB + BT$, $y + bx$. Enfin CD, $\frac{y + bx}{2}$.

3. Puisque il faut que $CB \times CD$ soit égal à $\overline{CF \times CH} - \overline{BF}^2$, l'équation sera $\frac{yy + bxy}{2} = \frac{bxy - yy + bx - y}{2} - 1$; dont les racines sont $y = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{15}{16} + \frac{1}{2}bx}$ ou $y = -m \pm \sqrt{-ff + \omega x}$, en faisant $\frac{1}{4} = m$; $\frac{1}{2}b = \omega$; $\frac{15}{16} = ff$, l'on ne peut pas mettre mm, parceque $\frac{15}{16}$ n'est pas le quarré de $\frac{1}{4} = m$.

4. L'on doit ainsi construire le Problême, Parcequ'il y a $-m$, l'on prendra $BK = m$ de l'autre côté de AB, où C n'est pas, suivant l'Art. 2. par le point K l'on menera KI parallele & égale à AB, x. Sur IK l'on coupera $IN = \frac{ff}{\omega}$ Regle 3. & l'on fera que le point N tombe entre les points I, & K, parcequ'il y a $-ff$, Regle 6. & le point N est le sommet de la parabole, dont le parametre est ω, Regle 1. le diametre IK, Regle 2. l'angle CKN est celui des abscisses & des appliquées. L'on peut donc décrire la parabole CNc, suivant ce qui a été dit Exemple 2. n. 4. Je dis que cette parabole donne par tout l'une des valeurs de y, & l'équation $yy + \frac{1}{2}y = -1 + \frac{1}{2}bx$ sur l'arc indeterminé VCc.

Dém. L'abscisse NK est $IK - IN$, $x - \frac{ff}{\omega}$, qui étant multipliée par le parametre ω, produit $\omega x - ff$; donc $CK = \sqrt{-ff + \omega x}$; l'on peut démontrer le même de toutes les abscisses Nk, & de toutes les ordonnées ck.

1° Au point C pris sur l'arc indefini VC, l'on a $CB = CK - KB$, $y = \sqrt{-ff + \omega x} - m$. C'est au point C que le calcul a été fait n. 3. 2° Au point c pris sur l'arc Nu, ou cB a des valeurs negatives, vous trouverez $cB = cK + KB$, $-y = \sqrt{-ff + \omega x} + m$; $y = -m - \sqrt{-ff + \omega x}$

FIG. 81. racine fauſſe de n. 3. & par l'hypotheſe $\overline{cB} \times \overline{cd} = \overline{cF} \times \overline{ch} - \overline{BF}^2$, $\frac{-bxy-yy}{2} = \frac{-y+bx-yy+bxy}{2} - 1$; $2bxy - y + bx = 2$, équation à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. 3° Au point c pris ſur l'arc NV (l'on n'a pas marqué les lignes, qui peuvent être tirées de ce point c ſur les données, de peur de mettre de la confuſion dans la figure) où y a des valeurs negatives l'on aura $cb = kb - ck$, $-y = m - \sqrt{-ff + \omega x}$, $y = -m + \sqrt{-ff + \omega x}$ valeur vraye de n. 3. Tout le reſte eſt comme au point c pris ſur l'arc Nu. 4° Au point c pris ſur l'arc indefini uZ, l'on trouvera $cb = ck + kb$, $-y = \sqrt{-ff + \omega x} + m$, $y = -m - \sqrt{-ff + \omega x}$ racine fauſſe de n. 3. Et l'équation $\frac{-bxy-yy}{2} = \frac{yy-bxy+y-bx}{2} - 1$; $yy + \frac{1}{2}y = 1 + \frac{1}{2}bx$, à la même parabole, mais differemment poſée, par la Regle IV.

Remarquez 1° qu'au point V, l'on trouve $y = 0$. & ce point eſt l'origine des y. 2° Que la racine poſitive ſe trouve dans la moitié NC de la parabole, la negative ſur l'autre moitié NZ, mais que l'équation $yy + \frac{1}{2}y = -1 + \frac{1}{2}bx$, ne ſe trouve que ſur la partie infinie VCc. 3° Que le Problême eſt impoſſible non ſeulement dans les angles EAG, GAP, PAR, RAH, par leſquels la parabole ne paſſe point; mais encore dans l'angle EAB, dans lequel une partie infinie VNZ de la parabole eſt décrite. L'équation eſt conſtruite pour les deux racines en même tems, de la façon que cela ſe peut faire. 4° Qu'il y a un terme dans l'équation qui n'a que des quantitez connuës.

EXEMPLE VII. $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm + \omega x}$.

FIG. 82. 1. FIg. 82. ſoient les trois lignes AB, AD, EF données de poſition, faiſant par leur interſection un triangle AEG équilateral. Il faut trouver un point C dans l'angle AEF, d'où l'on puiſſe tirer les lignes CB, CD, CF ſur les données, de telle ſorte que les lignes cherchées ſoient paralleles aux données. Il faut encore que le produit de CB multipliée par CF ſoit au quarré de CD, comme 1 à 4.

2, Suppoſons la choſe faite, & nommons les données $AE = AG = GE$, 1; les inconnuës AB, x; CB, y; Puiſque BF eſt parallele à AG, le triangle EBF eſt équilateral comme le triangle EAG. Ainſi FB eſt égal $EB = 1 + x$; & $CF = 1 + x - y$; CD égal à AB, x.

3. Le Problême demande $CB \times CF : \overline{CD}^2 :: 1 : 4$. $y + xy - yy : xx :: 1 : 4$. $4y + 4xy - 4yy = xx$; $yy - y - xy = -\frac{1}{4}xx$. Mettez de chaque côté $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx$; vous ferez $yy - y - xy + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$; dont les deux racines ſont $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x}$, ou $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm + \omega x}$, en prenant $z = 1$; $m = n = \omega = \frac{1}{2}$.

4. Parcequ'il y a $+m$, prenons $BK = m$, du côté où eſt le point C;

par le point K menons IK parallele & égale à AB, x; parcequ'il y a $+ \frac{n}{z}x$; faisons $z = 1 : n = \frac{1}{2} :: IK, x : KL, \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$; & je mets le point L entre les points K & C. L'on prouvera de la même façon que tous les IK prises du côté de B sont $+ x$; tous les KL prises du même côté sont $\frac{n}{z}x$. Il ne sera pas difficile de prouver que les Ik prises du côté de N sont $- x = Ab$; & les kl sont $- \frac{n}{z}x$. L'infinie IL ayant été tirée par les points I, L. Ensuite étant $AI = m = \frac{1}{2}$, le point I est au milieu de $AG = 1$. De plus l'angle IKL est de 60. degrez. C'est pourquoi dans le triangle IKL, les deux autres angles KLI, KIL font ensemble 120. degrez. D'ailleurs comme le côté IK, x est double du côté KL, $\frac{1}{2}x$. Il faut que les angles KLI, KIL soient tels, que le sinus de l'angle KLI opposé au côté KI, soit double du sinus de l'angle KIL opposé au côté KL. Or tout cela ne convient qu'à l'angle de 90. degrez, dont le sinus est 100000, & à l'angle de 30. degrez, dont le sinus est 50000. Ainsi l'angle ILK est droit; donc $\overline{IL}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{KL}^2$, $xx - \frac{1}{4}xx = \frac{3}{4}xx$; & $IL = \sqrt{\frac{3}{4}xx} = x\sqrt{\frac{3}{4}}$. Appellons $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\frac{a}{z}$; l'on aura $IL = \frac{a}{z}x$; cette valeur convient à toutes les IL prises en allant de I vers L; comme au contraire les Il prises en allant de I vers N sont $\frac{-a}{z}x$, parceque les x sont negatives de ce côté-là.

Sur IL prenons $IN = \frac{amm}{\omega z}$ Regle 3. faisons tomber le point I entre le sommet N & le point L, parcequ'il y a $+ mm + \omega x$, Regle 4. le parametre sera $\frac{\omega z}{a}$, Regle 1. N le sommet; le diametre est dans IL, Regle 2. les angles CLN des coordonnées est droit. Nous pourrons par consequent décrire la parabole CNc, qui sera le lieu cherché.

En effet NL est $\frac{amm}{\omega z} + \frac{a}{z}x$, si on multiplie cette quantité par le parametre $\frac{\omega z}{a}$, le produit sera $mm + \omega x$, donc $CL = \sqrt{mm + \omega x}$, valeurs de tous les cl. 1° Au point C, on a fait le calcul de n. 3. 2° Au point c pris sur l'arc infini uz, nous trouvons cB, $y = m + \frac{n}{z}x - \sqrt{mm + \omega x}$ racine fausse, avec l'équation de n. 3. 3° Au point c pris sur l'arc NV, on a cb, $y = m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x}$ racine vraye, & la même équation. 4° Au point c pris sur l'arc Nu, y est $= m + \frac{n}{z}x - \sqrt{mm + \omega x}$ racine fausse de n. 3. l'on trouvera aussi la même équation. Nous pouvons donc conclurre, que la parabole CNc est le lieu cherché.

5. Il faut remarquer que y n'a que des valeurs positives; qu'au point A, $x = 0$; que la racine positive se trouve sur la moitié NZ, la negative sur la moitié Nz, & la même équation $yy - y - xy = - \frac{1}{4}xx$ dans tous les points de la parabole; ainsi en construisant la racine positive, l'on a aussi construit la negative. Le Problême n'est possible que dans l'angle AEF, dans lequel on l'a cherché.

6. Par l'évanoüissement des seconds termes, si l'on prend $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = v$; on trouvera $v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x} = \sqrt{mm + \omega x}$.

Je prens $BK = \frac{1}{4} = m$; je tire par le point K l'infinie KI parallele à

FIG. 82. AB, & $IK = AB$, x ; je coupe encore $KL = \frac{1}{2} IK = \frac{1}{2} x$; & par les points L, I je tire l'infinie LI. La ligne CL est $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x = v$; & parceque v est l'appliquée dans l'équation $vv = mm + \omega x$, & qu'elle est terminée à la ligne IL, il est certain Regle 8. que le diametre de la parabole est dans IL. Ensuite je considere, que tous les points de la parabole, qu'il faut décrire, doivent me donner l'équation $vv = mm + \omega x$; & que $mm + \omega x$ est le produit de l'abscisse par le parametre égal au quarré vv de l'appliquée ; & que s'il m'étoit libre, comme il l'est ordinairement dans les lieux geometriques, de nommer x la ligne IL, je n'aurois qu'à prendre ω pour le parametre, & faire $IN = \frac{mm}{\omega}$; car $\omega \times IN + IL \frac{mm}{\omega} + x$, donneroit $mm + \omega x$. Mais étant $IK = AB$, x ; IL ne peut plus être appellée x ; je cherche donc la valeur $\frac{a}{z} x = IL$, comme n. 4. Ensuite parceque le parametre multipliant $\frac{a}{z} x$ doit produire ωx je nomme le parametre p ; & j'ai $\frac{pax}{z} = \omega x$, $\frac{pa}{z} = \omega$, $p = \frac{\omega z}{a}$, & le parametre de la parabole, qu'il faut décrire, est déterminé.

Après cela pour avoir la valeur de IN, quantité toute connuë qu'il faut ajoûter à IL, parcequ'il y a $\omega x + mm$, je fais encore reflexion que IN multipliée par le parametre $\frac{\omega z}{a}$ doit produire mm ; je nomme donc IN, r ; & j'ai $\frac{r\omega z}{a} = mm$, $r = \frac{amm}{\omega z} = IN$.

Enfin puisque IN doit être ajoûtée à IL, il faut faire tomber le point I entre le sommet N & le point L. Ainsi vous voyez comment M. DESCARTES a trouvé ce qu'il dit, Regle 1. 2. 3. 4. Il est aisé de voir comment la parabole ZNz est le lieu cherché.

EXEMPLE VIII. $y = m - \frac{n}{z} x \pm \sqrt{mm - \omega x}$.

FIG. 83. 1. Fig. 83. qui est la même que Fig. 38. de M. DESCARTES, soient données les mêmes lignes que Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. Il faut que $CB \times CF + 6 AB$ soient égaux à $CD \times CH + \frac{3}{4} \overline{AB}^2$.

2. Encore comme Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. Prenez la valeur des lignes cherchées, ôtez-en les lettres b, f, z, dont la valeur est 1, ainsi qu'on le verra Art. 6. Ex. 13. n. 2. 3. Vous aurez CD, $cy + cx$; CF, $ey + dek + dex$; CH, $gy + gl - gx$.

3. L'équation sera $eyy - cgyy + deky - cgly + dexy = cglx - 6x - cgxx + \frac{3}{4} xx$; où mettant encore la valeur des lettres connuës à leur place, Voyez Art. 6. Ex. 13. n. 2. 3. vous formerez une équation, dont les deux racines sont $y = 1 - \frac{1}{2} x \pm \sqrt{1 - 2x}$, ou $y = m - \frac{n}{z} x \pm \sqrt{mm - \omega x}$, en faisant $m = z = 1$; $n = \frac{1}{2}$; $\omega = 2$.

4. Sur CB je prends $BK = m$ au dessous de AB ; par le point K je mene KI égale & parallele à AB ; je fais $z : n :: 1 : \frac{1}{2} :: IK, x : KL, \frac{1}{2} x$; je fais tomber le point L entre B & K suivant l'Art. 2. parcequ'il y a $- \frac{n}{z} x$, & par les points L, I, je tire l'infinie IL ; tous les KL pris depuis I jusqu'à N, sont aussi $\frac{n}{z} x$; mais tous les lk pris de l'autre côté de I

font $-\frac{n}{z}x$, parceque les $Ik = Ab$ pris de ce côté font $-x$. Je prouverai comme Ex. 7. n. 4. que les IL pris depuis I jusqu'à N font $+\frac{a}{z}x$, & pris de l'autre côté de I font $\frac{-a}{z}x$. Aprés cela sur IL je coupe $IN = \frac{amm}{\omega z}$ Regle 3. & je fais tomber le point L entre les points N, I parcequ'il y a $mm - \omega x$, Regle 5. Le parametre sera $\frac{\omega z}{a}$ Regle 1. N, le sommet ; le diametre est dans IL, Regle 2. l'angle CLN des abscisses & des appliquées est droit. Je puis donc décrire la parabole CNc, laquelle sera le lieu cherché.

Tous les CL, cl seront $\sqrt{mm - \omega x}$. Au point C où l'on a fait le calcul de n. 3. on a la racine positive. On l'aura encore au point c pris sur l'arc VZ, & l'on y trouveroit encore l'équation de n. 3. si de ce point l'on tiroit des lignes paralleles aux lignes CD, CF, CH, parcequ'on auroit des triangles semblables à ceux, qui ont déja été calculez pour avoir les valeurs de CD, CF, CH. Ce qui arrivera aussi au point C pris au dessus de la ligne AB, mais ce point donne la racine negative aussi bien que le point c pris sur l'arc AN.

La parabole CNc passe par le point A, car alors l'appliquée est $AI = BK$, m, & l'abscisse est IN, $\frac{amm}{\omega z}$: & le parametre $\frac{\omega z}{a} \times IN$, $\frac{amm}{\omega z} = mm = \overline{AI}^2$. De tout ce que nous venons de dire il suit que la parabole CNc est le lieu cherché.

EXEMPLE IX. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-ff + \omega x}$.

1. FIg. 84. qui est la même que Fig. 38. de M. DESCARTES, soient données les mêmes lignes que Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. Il faut que $\overline{CB} \times \overline{CF} + AE$ soient égaux à $\overline{CD} \times \overline{CH} + \frac{3}{4}\overline{AB}^2$. FIG. 84.

2. Comme n. 2. de l'Exemple 8. De plus $AE = 3$.

3. L'équation sera $eyy - cgyy + deky - cgly + dexy = -3 + cglx - cgxx + \frac{3}{4}xx$, où mettant la valeur des lettres connuës à leur place, on aura une équation dont les racines sont $y = 1 - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-2 + 4x}$, ou $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-ff + \omega x}$, en faisant $m = 1 = z$; $n = \frac{1}{2}$; $f = \sqrt{2}$; $\omega = 4$. Nous ne pouvons pas écrire mm sous le signe radical, parceque 2 n'est pas le quarré de $1 = m$.

4. Comme Ex. 8. n. 4. l'on construira $+m - \frac{n}{z}x$, & l'on trouvera que les IL sont $\frac{a}{z}x$, le parametre $\frac{\omega z}{a}$; mais IN sera $\frac{aff}{\omega z}$, & l'on fera tomber le sommet N entre les points I & L, parcequ'il y a $-ff + \omega x$ Regle 6. l'angle CLN est celui des coordonnées. Nous pouvons donc décrire la parabole, CNc, qui est le lieu cherché dans son arc NC.

Tous les CL, cl seront $\sqrt{-ff + \omega x}$; mais au point c pris sur l'arc Nz, on ne trouvera pas l'équation de n. 3. parceque cB est là $-y$; & que cd, cf, ch, si on les tiroit, auroient les mêmes valeurs qu'au point C, où y est positive.

Si l'on demandoit $CB \times CF + AE + 6\,AB = CD \times CH + \frac{3}{4}\overline{AB}^2$, le Problême ſeroit abſolument impoſſible.

ARTICLE VI.

Conſtruction particuliere au cercle & à l'ellipſe.

M. DESCARTES.

QUe ſi la ligne demandée eſt un cercle, ou une ellipſe, ou une hyperbole, il faut premierement chercher le point M, Fig. 69. qui en eſt le centre, & qui eſt toûjours en la ligne droite IL, où on le trouve en prenant $\frac{a\omega m}{2pz}$ pour IM. En ſorte que ſi la quantité ω eſt nulle, ce centre eſt juſtement au point I. Et ſi la ligne cherchée eſt un cercle, ou une ellipſe, on doit prendre le point M du même côté que le point L, au reſpect du point I, lorſqu'on a $+\omega x$; & lorſqu'on a $-\omega x$, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire en l'hyperbole, ſi on a $-\omega x$, ce centre M, doit être vers L; & ſi on a $+\omega x$, il doit être de l'autre côté. Après cela le côté droit de la figure doit être $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, lorſqu'on a $+mm$, & que la ligne cherchée eſt un cercle, ou une ellipſe, ou bien lorſqu'on a $-mm$, & que c'eſt une hyperbole. Et il doit être $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ſi la ligne cherchée étant un cercle ou une ellipſe, on a $-mm$; ou bien ſi étant une hyperbole, & la quantité $\omega\omega$ étant plus grande que $4mp$, on a $+mm$. Que ſi la quantité mm eſt nulle, ce côté droit eſt $\frac{\omega z}{a}$; & ſi ωx eſt nulle, il eſt $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Puis pour le côté traverſant, il faut trouver une ligne, qui ſoit à ce côté droit, comme aam eſt à pzz. A ſavoir ſi ce côté droit eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, le traverſant eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Et en tout ces cas le diametre de la Section eſt en la ligne IM, & LC eſt l'une de celles, qui lui ſont appliquées par ordre; ſi bien que faiſant MN égale à la moitié du traverſant, & le prenant du même côté du point M, qu'eſt le point L, on a le point N pour le ſommet de ce diametre. Enſuite dequoi il eſt aiſé de trouver la Section par le ſecond & troiſiéme Problême du premier Livre d'Apollonius.

1. Les

1. Les mêmes Regles ſervent au cercle & à l'ellipſe, parceque le cercle n'eſt autre choſe, qu'une ſorte d'ellipſe, dont tous les diametres ſont égaux entr'eux, & à leurs parametres. De là vient, que les équations à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = aa - xx$, $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$, deviennent des équations au cercle $yy = aa - xx$, $yy = 2ax - xx$, dès que le diametre d eſt égal au parametre p, & que l'angle que les coordonnées font avec leurs abſciſſes eſt droit. Car l'on ſçait que dans chaque ellipſe, il y a deux diametres conjuguez, qui ſont égaux entr'eux & avec leurs parametres, & dont l'équation par conſequent eſt exprimée comme celle du cercle : mais les ordonnées de ces diametres font avec leurs abſciſſes des angles obliques. Fig. 69.

2. M. DESCARTES mêle les Regles, qui regardent l'ellipſe, avec celles qui regardent l'hyperbole, parceque, quoique ces deux Sections ſoient differentes en ce que l'ellipſe eſt fermée & terminée, tandis que l'hyperbole eſt ouverte & infiniment étenduë : cependant elles ont beaucoup de rapport, en ce qu'elles ont toutes deux un centre, où tous leurs diametres ſe coupent en deux parties égales, le centre de l'ellipſe étant au dedans de cette courbe, & celui de l'hyperbole au dehors ; & en ce que leurs équations ne different que par les ſignes + & —, car les équations à l'hyperbole ſont $\frac{d}{p}yy = xx - aa$, $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$.

Nous laiſſerons pour l'article ſuivant les Regles, qui appartiennent à l'hyperbole ; & nous ne mettrons ici que celles, qui ſont pour l'ellipſe & pour le cercle.

3. Le côté droit d'une courbe eſt la même choſe que ſon parametre, & le côté traverſant eſt le diametre determiné de cette courbe. Dans le cercle & dans l'ellipſe tout diametre eſt déterminé ; dans l'hyperbole il y a des diametres déterminez, leſquels, lorſqu'ils ſont prolongez, s'appellent indéterminez, la parabole n'a que des diametres indéterminez. Les traitez des Sections coniques nous l'apprennent.

On appelle Figure d'une courbe le rectangle fait ſous un diametre déterminé & ſous le parametre de ce diametre.

M. DESCARTES a fait une attention particuliere au cas de l'hyperbole, où l'on a $+ mm$, & où $\omega\omega$ eſt plus grand que $4mp$. Mais il n'a rien dit du cas ſemblable de l'ellipſe, où l'on a $- mm$, & où $\omega\omega$ n'eſt pas plus grand que $4mp$. Je parlerai de ce cas dans une des Regles qui ſuivent. Et c'eſt apparemment parceque ce cas eſt impoſſible, & que par conſequent il ne demande ni côté droit, ni côté traverſant, que cette Geometrie n'en parle pas.

4. Le Problême ſecond du Livre premier d'Apollonius eſt la Propoſition 53. de ce Livre, où il donne la maniere de décrire une hyperbole. Le Problême troiſiéme du Livre ſecond d'Apollonius eſt la Propoſition 54. de ce Livre, où il donne la Methode pour décrire une ellipſe, étant donnez le diametre avec ſon ſommet, le parametre, & l'angle que les coupées & les

ordonnées font ensemble. L'on a donné Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2. la maniere de décrire une ellipse en cherchant ses differens points sur un plan; & Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. la maniere de décrire une hyperbole en cherchant aussi ses points differens. D'où l'on peut conclurre, que les Problêmes qui se construisent avec une ellipse, ou une hyperbole, sont plans, patcequ'on ne se sert dans leurs descriptions que de la Regle & du Compas. Pour le cercle, qui se décrit avec le Compas, il est certain par cette raison, que les Problêmes sont plans, lorsqu'il sert seul à les construire.

REGLE I.

FIG. 69. L'On commence par chercher le centre *M*, qui est sur la ligne *IL*, & on le trouvera en prenant $\frac{a\omega m}{2pz}$ pour *IM*. Cette Regle suppose m & $\frac{n}{z}x$, & ωx dans l'équation. Voyez Exemple 8. 10. 11. 12. 13. 14.

Car les choses ne sont pas telles, Ex. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

REGLE II.

LOrsque la quantité ω est nulle, le point *M* est le même, que le point *I*. Cela suppose m dans l'équation, Voyez Ex. 4. 9.

Car cela n'est pas entierement ainsi, Ex. 2. 5.

REGLE III.

LOrsqu'il y a $+\omega x$, l'on prend le point *M* du même côté que le point *L*, par rapport au point *I*, c'est-à-dire, que le point *M* est sur la partie de la ligne *IL* prolongée, sur laquelle le point *L* se trouve. Cela suppose m & $\frac{n}{z}x$. Voyez Ex. 8. 10. 13. 14.

Car ce n'est pas tout-à-fait la même chose, Ex. 3. 6.

REGLE IV.

LOrsqu'il y a $-\omega x$, l'on prend le point *M* de l'autre côté que le point *L*, par rapport au point *I*, c'est-à-dire, que le point *M* est sur la partie de la ligne *IL* prolongée, sur laquelle le point *L* ne se trouve pas. Cela suppose $\frac{n}{z}x$. Voyez Ex. 11. 12.

Car cela peut n'être pas entierement le même, Exemp. 7. n. 5.

REGLE V.

LOrsqu'il y a $+mm$, le côté droit, ou parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$. Ce qui suppose encore ωx & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 11. 12. 13.

Car le parametre est tout autre. Ex. 2. 4. 6. 7. n. 5.

Fig. 69.

REGLE VI.

LOrsqu'il y a $-mm$, & que $\omega\omega$ est plus grande que $4mp$, le côté droit ou parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Cela suppose encore ωx & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 10. 14.

Car le parametre est different, Exemple 7.

REGLE VII.

LOrsque la quantité mm est nulle, le parametre est $\frac{\omega z}{a}$. Cette regle suppose $\frac{n}{z}x$ & ωx dans l'équation. Voyez Ex. 5. 8.

Car le parametre n'est pas tel, Ex. 3.

REGLE VIII.

LOorsque la quantité ωx est nulle, le parametre est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Cela suppose $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 9.

Car le parametre est different, Ex. 2. 4.

REGLE IX.

DAns tous ces cas le diametre est dans la ligne *IM*, & la ligne *LC* est une de ses ordonnées. Ce qui suppose m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Car cela est autrement, Ex. 2. 3. 4. 5. 6.

REGLE X.

APrès que le parametre, ou côté droit a été déterminé, pour avoir son côté traversant ou son diametre; l'on fait, comme pzz à aam: ainsi le parametre a un quatriéme terme, qui est le diametre cherché. Cette Analogie suppose, que le parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} \pm \frac{4mpzz}{aa}}$, ou $\frac{\omega z}{a}$, ou $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ Voyez Ex. 5. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Car lorsque le parametre est different, la raison du parametre au diametre est aussi differente. Voyez Ex. 2. 3. 4. 6. 7.

REGLE XI.

LA ligne *MN* est toûjours égale à la moitié du diametre, & l'on prend le point *N* sur *IM* du même côté du point *M*, qu'est le point *L*, c'est-à-dire, que l'on prend le point *N* sur la partie de la ligne *IM* prolongée, sur laquelle le point *L* se trouve déja. Tout ceci suppose $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Car la chose est un peu differente, Fx. 2. 3. 4. 5. 6. 8.

REGLE XII.

LOrsqu'il y a dans l'équation $-mm+\omega x$, il faut que $\omega\omega$ soit plus grand que $4mp$; autrement le Problême est impossible. Voyez Exemple 7. 10. 14.

Cette Regle est le cas, dont nous avons dit que M. DESCARTES n'avoit pas parlé.

REGLE XIII.

FIG. 87. J'Ajoûte ici comme une Regle, 1° Fig. 87. soit $AN=2a$ le diametre M le centre, $AM=MN=a$ le demi-diametre, $CB=y$ une appliquée, $AB=x$ un segment du diametre, $NB=AN-AB=2a-x$ l'autre segment du diametre. Tous les lieux au cercle ou à l'ellipse sont fondez sur cette proprieté; comme le diametre est au parametre; ce qui s'exprime ainsi, comme d est à p: de même le rectangle $AB\times BN=2ax-xx$ sous les segmens du diametre, est à yy quarré de l'appliquée correspondante CB. D'où l'on forme l'équation $\frac{d}{p}yy=2ax-xx$. Que si l'on avoit pris le centre M pour l'origine des x, & que MB fût x; le segment AB seroit $AM-MB$, $a-x$; le segment BN seroit $MN+MB$, $a+x$; le rectangle $AB\times BN$ des segmens seroit $aa-xx$, & l'équation auroit été $\frac{d}{p}yy=aa-xx$.

2° Dans ces deux équations, & dans celles qui sont reduites à ces formules; yy, ou vv quarré de l'inconnuë, en laquelle y a été changée, est toûjours le quarré de l'appliquée au diametre dont il faut se servir. Les connuës quelconques $\frac{d}{p}$ qui multiplient yy quarré de l'inconnuë qui est l'appliquée, expriment toûjours le rapport du diametre au parametre. Dans le cercle, où les diametres sont égaux aux parametres, le numerateur d de la fraction est égal au denominateur p. L'inconnuë x se prend sur le diametre: dans l'équation $\frac{d}{p}yy=2ax-xx$. l'inconnuë x commence au sommet A, & la connuë $2a$ est la valeur du diametre: mais dans l'équation $\frac{d}{p}yy=aa-xx$, l'inconnuë x commence au centre M, & la connuë aa est le quarré exprimé affirmativement du demi-diametre $AM=a$.

3° De sorte que, comme le diametre, dont il faut se servir pour construire une équation, doit toûjours être la ligne droite, à laquelle se terminent ou y, ou l'inconnuë, en laquelle y a été changée: il suit, que si l'autre inconnuë quelconque x n'étoit pas sur ce diametre, il faudroit lui substituer une ligne, pour le diametre, & faire ensuite dans l'équation les changemens dont il est parlé, Reg. 10. Sect. 4. Liv. 1. & tels qu'on les verra, Ex. 3. n. 6. Ex. 5. n. 6. Ex. 6. n. 6. Ex. 9. n. 6. Ex. 10. n. 8. Ex. 13. n. 6. qui est l'Exemple de M. DESCARTES. L'on connoîtra dans ces Exemples, comment cet Auteur a trouvé les Regles qu'il nous a données.

4° Lorsque l'équation se reduit à $\frac{d}{p}yy=-aa-xx$, où le quarré aa

du demi-diametre eſt exprimé negativement ; les racines ſont imaginaires, $y = \pm \sqrt{\frac{-aap - pxx}{d}}$, & le Problême eſt impoſſible.

EXEMPLE I. $y = \sqrt{-mm - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIgure 85. ſoient AB, AD, EF, GH, quatre lignes droites données de poſition, & qui font autour du point A huit angles de 45. degrez chacun ; & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme CB, CD, CF, CH, en ſorte que les angles CBA, CDA ſoient droits ; les angles CFE, CHA de 45. degrez ; & que ce qui eſt produit de la multiplication de CB par CD ſoit égal à ce qui eſt produit de la multiplication de CF par CH. FIG. 85.

2. Je nomme les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y ; $HB = BF = AB$, x ; ainſi $CF = y - x$; $CH = y + x$. Et comme il n'y a point de ligne déterminée, je prends la ligne z pour l'unité $= m$.

3. Puiſque l'on demande $CB \times CD = CF \times CH$; l'équation ſera $yy - xy = xx$; dont les racines ſont $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{5}{4}xx}$, qui eſt à la ligne droite.

4. Si l'on demandoit, que $CD \times CF$ fût égal à $CB \times CH$; l'équation ſeroit $xy - xx = yy + xy$; $y = \sqrt{-xx}$, impoſſible : parceque $\sqrt{-\frac{p}{m}xx}$ eſt une racine imaginaire.

5. Si l'on demandoit que $CD \times CF$ — le quarré de la ligne m fût égal à $CB \times CH$; l'équation ſeroit $yy = -mm - xx$, $y = \sqrt{-mm - \frac{p}{m}xx}$ impoſſible.

EXEMPLE II. $y = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIgure 86. ſoient données de poſition les trois lignes droites AB, AD, FE ; dont AB & FE ſont paralleles, & AD leur eſt perpendiculaire. Il faut trouver un point C, duquel ayant tiré trois perpendiculaires CB, CD, CF ſur les données, l'on ait $\overline{CB \times CF} - \overline{CB \times EA} = \overline{CD}^2 - \overline{AE}^2$. FIG. 86.

2. Nommons la diſtance donnée des paralleles AE, $m = p = FB$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y ; $CF = m - y$.

3. L'équation ſera $my - yy - my = xx - mm$, $yy = mm - xx$; dont les racines ſont, $y = \pm\sqrt{mm - xx}$, ou $y = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Lieu au cercle parceque $m = p$, Art. 4. Regle 2.

4. Pour conſtruire cette équation, parceque la quantité ω eſt nulle, je prends A pour le centre, Regle 2. le diametre eſt dans la ligne AB, Regle 9. parceque la quantité ωx eſt nulle, le parametre eſt $\sqrt{4mp}$, Reg. 8. pour avoir le diametre je fais Reg. 10. $p : m :: \sqrt{4mp} : \frac{m}{p}\sqrt{4mp} = \sqrt{\frac{4m^3}{p}}$, qui eſt le diametre ; pour trouver le ſommet N Regle 11. Je fais AN égale au demi-diametre $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m^3}{p}} = \sqrt{\frac{m^3}{p}} = \sqrt{mm}$ parceque $p = m$; & $AN =$

FIG. 85. $m = AE$. C'est pourquoi du point A comme centre, de l'intervale AN, le point N étant pris du même côté, où B se trouve Regle 11. je décris le cercle NEn, qui touchera la ligne EF, m en E; les points N, n sont les sommets du diametre NA. Ce cercle satisfait au Problême dans tous les points du demi-cercle NEn.

Dém. NB est $\sqrt{\frac{m^3}{p}} - x$; & $Bn = x + \sqrt{\frac{m^3}{p}}$ valeurs de tous les segmens du diametre, le rectangle sous les mêmes segmens $\frac{m^3}{p} - xx = mm - xx = yy$ donc $y = \pm \sqrt{mm - xx} = \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. De plus 1° Au point C pris sur le quart EN le calcul de n. 3. a été fait, & l'on a trouvé l'équation $yy = mm - xx$. 2° Au point c pris sur l'arc Ne, où y a des valeurs negatives, l'on a l'équation $yy = xx - mm$, $y = \pm \sqrt{-mm + xx}$ à l'hyperbole. 3° Au point c pris sur le quart En, ou $Ab = -x$, on a l'équation de n. 3. 4° Au point c pris sur l'arc ne, ou Ab, $-x$; cb, $-y$ l'équation sera $yy = xx - mm$ à l'hyperbole.

L'on voit que quoique l'on ait dans toute la circonference du cercle une des deux racines $y = \pm \sqrt{- mm \frac{p}{m} xx}$, cependant il n'y a que la moitié NEn de cette circonference, qui donne l'équation $yy = mm - xx$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer que le centre n'est pas dans la ligne IL, mais sur AB, Regle 1. parceque la quantité ω est nulle, le centre n'est pas different du point A, Regle 2. quoiqu'il n'y ait pas ωx, le parametre n'est pas $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, mais $\sqrt{4mp}$, Regle 8. que le diametre n'est pas dans IM, & que LC n'est pas une ordonnée, Regle 9. que la raison du parametre au diametre n'est pas comme pzz à aam, mais comme p à m, Regle 10. que le sommet N a été pris sur AN du même côté ou B est, & AN est égal à la moitié du diametre, Regle 11.

6. L'on auroit pû construire plus aisément l'équation $yy = mm - xx$, en prenant un rayon AN égal à m, & en décrivant le cercle NEn du centre A, car comme l'on a vû dans les lieux Geometriques, ce cercle resout le Problême, puisqu'il est le même, que celui qu'on a décrit, n. 4.

7. Si les racines $y = \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$ avoient été un lieu à l'ellipse parceque m ne seroit pas égale à p, Art. 4. Regle 2. J'aurois cherché l'équation au point C & ailleurs de cette sorte. Par la nature de l'ellipse comme le diametre $2m$ est au parametre $2p$, ou comme m est à p: de même le rectangle $\frac{m^3}{p} - xx$ sous les segmens NB, Bn du diametre Nn est à $mm - \frac{p}{m}xx$ quarré de l'appliquée $CB = yy$; donc $y = \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. L'on connoît que la raison du diametre au parametre est celle de m à p, en multipliant par m & divisant par p l'équation $yy = mm - \frac{p}{m}xx$, car elle devient $\frac{m}{p}yy = \frac{m^3}{p} - xx$; & l'on sçait que la fraction $\frac{m}{p}$ mise devant yy marque le rapport du diametre au parametre.

EXEMPLE III. $y = \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx}$.

1. FIg. 87. les trois lignes droites *AB*, *AD*, *EF* sont données de position, & font un triangle équilateral. Il faut dans ce triangle trouver un point *C*, d'où ayant tiré les lignes *CB*, *CD*, *CF*, sur les données, étant *CD* parallele à *AB*, *CB* & *CF* à *AD*; le rectangle $CD \times CF$ soit égal au quarré de *CB*, moins le rectangle $CB \times CD$. Fig. 87.

2. Nommez les données $AE = AN = EN$, ω; les inconnuës *AB*, $x = CD$; *CB*, y; $FB = NB = NA - AB$, $\omega - x$; & tous les bf sont de même $\omega - x$; enfin $CF = BF - CB$, $\omega - x - y$.

3. L'équation sera $\omega x - xx - xy = yy - xy$; ou $yy = \omega x - \frac{p}{m} xx$ en faisant $p = m$; les racines sont $y = \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx}$ au cercle ou à l'ellipse.

4. Le centre *M* est sur la ligne *AB*, & non pas sur *IL*, vous le trouverez en prenant $AM = \frac{\omega m}{2p}$, Regle 1. parcequ'il y a $+ \omega x$, vous prendrez Regle 3. le point *M* sur la partie de la ligne *AB*, où le point *B* se trouve; parceque les quantitez mm, $\frac{nx}{z}$ sont nulles, le parametre est ω, Regle 7. le diametre est dans la ligne *AB*, & *CB* est une appliquée, Reg. 9. en faisant $p : m :: \omega : \frac{\omega m}{p}$, vous aurez le diametre Reg. 10. ce diametre est en premier lieu égal à *AN*, ω, parceque $p = m$; il est en second lieu double de $AM = \frac{\omega m}{2p}$ Regl. 10. Ainsi le centre *M* est au milieu de *AN*, & les deux sommets seront *A*, *N*; & Regl. 11. l'on prendra le sommet *A* sur *AB*; du même côté par rapport au point *M*, qu'est le point *B*. Parceque l'angle *CBA* des coordonnées est oblique, le lieu est à l'ellipse, Art. 4. Regl. 2. Vous pouvez décrire l'ellipse *ACN*, & trouver tous ses points *C*, *c*, en ne faisant qu'extraire la racine quarrée de $\omega x - \frac{p}{m} xx$, après avoir déterminé la valeur de x. Voyez Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2. & L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Cette ellipse donne dans tous ses points une des deux racines $y = \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx}$, & sur l'arc *ZA* l'équation $yy = \omega x - \frac{p}{m} xx$.

Par la nature de l'ellipse, comme le diametre est au parametre, ou comme m est à p; ainsi le rectangle sous les segmens du diametre, $AB \times BN$, $\frac{\omega m x}{p} - xx$ est au quarré de l'appliquée correspondante $\omega x - \frac{p}{m} xx = \overline{CB}^2$, yy; & $CB = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx} = y$. Vous trouverez tous les $bN = AN - Ab$, $\frac{\omega m}{p} - x$, & par consequent tous les $cb = \pm y = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx}$; $y = \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx}$, & l'on aura la racine positive sur la moitié *AZN*, où sont les $+ y$; & la negative sur la moitié *AzN*, où sont les $- y$. Ensuite 1° Au point *C* l'on a fait le calcul de n. 3. & l'on y a trouvé l'équation $yy = \omega x - \frac{p}{m} xx$, ce qui convient à l'arc *AZ*. 2° Au point *c* pris sur l'arc

AzN, on a l'équation $yy + 2xy = \omega x - xx$ differente de n. 3. 3° Au point c pris sur l'arc ZN on a l'équation $yy - 2xy = - \omega x + xx$ à l'hyperbole. On a donc dans tous les points de l'ellipse AZN une des racines $y = \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m} xx}$, & l'équation $yy = \omega x - xx$ sur l'arc ZA.

5. En multipliant par m & divisant par p, l'équation $yy = \omega x - \frac{p}{m} xx$, vous formez $\frac{m}{p} yy = \frac{\omega m x}{p} - xx$; qui Regle 13. fait connoître par le terme $\frac{m}{p} yy$, que le diametre est au parametre en raison de m à p; & par le terme $\frac{\omega m}{p} x - xx$, que le diametre AN est $\frac{\omega m}{p}$, puisque par la nature de l'ellipse ce terme est le produit du segment AB, x par le segment BN $\frac{\omega m}{p} - x = AN - AB$. Ensuite m est à p: comme le diametre $\frac{\omega m}{p}$ est à ω parametre. Le diametre est sur AB, parceque l'appliquée CB, y est terminée à cette ligne AB. Parceque x est un côté du rectangle $\frac{\omega m x}{p} - xx$, & AB, x une abscisse, le sommet de l'ellipse est en A, & le centre M se trouve en prenant $AM = \frac{\omega m}{2p}$.

EXEMPLE IV. $y = m \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m} xx}$.

FIG. 86. 88. 1. FIg. 88. comme Ex. 2. n. 1. Fig. 86. excepté que l'on demande que le rectangle sous CB & CF soit égal au quarré de CD.

2. Comme Exemple 2. n. 2.

3. L'équation sera $my - yy = xx$; $yy - my = - xx$; dont les racines sont $y = \frac{1}{2} m \pm \sqrt{\frac{1}{4} mm - xx}$, ou $y = \frac{1}{2} m \pm \sqrt{\frac{1}{4} mm - \frac{p}{m} xx}$ en faisant $p = m$; équation au cercle, ou à l'ellipse.

4. La construction sera telle. Parcequ'il y a $+ \frac{1}{2} m$, l'on coupe $BK = \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} FB$; par le point K l'on mene KI égale & parallele à AB, x; & le point I le milieu de AE, que je prends pour le centre, parceque la quantité ω est nulle, Regle 2. & par la même raison le parametre est $\sqrt{mp}$, Regle 8. & faisant $p : m :: \sqrt{mp} : \frac{m}{p} \sqrt{mp} = \sqrt{\frac{m^3}{p}} = \sqrt{mm}$, & enfin le diametre est $m = AE$, Regle 10. Sa moitié $\frac{1}{2} m$ sera la longueur de IN, qui doit se prendre du côté où est K, & déterminer le sommet N, Regle 11. & sur la ligne IK, étant CK une appliquée, Regle 9. C'est pourquoi l'angle CKN que les appliquées font avec les abscisses étant droit, la ligne cherchée est un cercle, Art. 4. Regle 2. qui passera par A & E, car IN; $\frac{1}{2} m = AI = IE$.

NK est $\frac{1}{2} m - x$; Kn est $\frac{1}{2} m + x$; & le rectangle $NK \times Kn$, $\frac{1}{4} mm - xx$, donc $CK = \sqrt{\frac{1}{4} mm - xx}$, valeur de tous les ck. Maintenant 1° au point C la racine vraye de n. 3. & l'equation $my - yy = xx$. 2° Au point c pris sur l'arc NA, l'on a la racine fausse. 3. Au point c pris sur l'arc En, racine positive. Au point c pris sur l'arc nA, racine negative, & dans tous ces points l'on trouve l'équation $my - yy = xx$.

5. Il faut remarquer que le centre n'est pas sur la ligne IL, mais sur IK, Regle

Regle 1. parceque la quantité ω est nulle, le centre est au point I Reg. 2. quoiqu'il y ait $+mm$, le parametre est $\sqrt{mp}$, parceque la quantité ωx est nulle, Regle 5. 8. le diametre n'est pas dans IM, mais dans IK, CL n'est pas une appliquée, mais CK Regle 9. la proportion du parametre au diametre est comme p à m, Regle 10.

EXEMPLE V. $y = -\frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 89. soient données de position les trois lignes AB, AD, AF; dont AB, AD se coupent à angles droits, & AF fait avec chacune au point A un angle de 45. degrez: & qu'il faille trouver plusieurs points tels que C, duquel tirant les lignes CB, CD, CF, sur les données, les angles CBA, CDA soient droits, & l'angle CFA de 45. degrez; & que ce qui est produit par la multiplication de CB & CD soit égal au quarré de CF, moins le rectangle sous AB & une ligne donnée de grandeur $\omega = 1$. Fig 89.

2. Nommons les inconnuës AB, x, $= CD$; CB, y; De plus $BA = BF$, x; $CF = y + x$.

3. L'équation sera $yy + xy = \omega x - xx$; dont les racines quarrées sont $y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{3}{4}xx}$, ou $y = -\frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, en faisant $z = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 4$, $p = 3$. équation à l'ellipse.

4. Pour construire cette équation, faisons $z : n :: AB, x : BL, \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$; & parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$, nous ferons tomber le point B entre C & L, Art. 2. Il est évident que tous les bl sont aussi $\frac{n}{z}x$. Le triangle ABL est rectangle en B: donc $\overline{AL}^2 = \frac{5}{4}xx$; & $AL = x\sqrt{\frac{5}{4}}$. Nommons $\sqrt{\frac{5}{4}}$, a, AL sera $\frac{a}{z}x$, l'on connoît aussi que tous les Al sont $\frac{a}{z}x$. Pour avoir le centre M, prenons $AM = \frac{a\omega m}{2pz}$ Regle 1. le point M étant mis du côté, où L est, parcequ'il y a $+\omega x$ Regle 3. parceque la quantité mm est nulle, le parametre sera $\frac{\omega z}{a}$ Regle 7. & l'on trouvera le diametre en faisant $pzz : aam :: \frac{\omega z}{a} : \frac{am\omega}{pz}$, ce quatriéme terme est le diametre Regle 10. dont la moitié $\frac{am\omega}{2pz} = MN$ Reg. 11. mais $\frac{am\omega}{2pz}$ est aussi AM; donc $MN = AM$, & comme l'on doit mettre le point N du côté où est L, il tombera en A. Le diametre est dans la ligne AL, & CL est une de ses appliquées, Regle 9. comme $pzz = 3$ n'est pas égal à $aam = 5$, la courbe cherchée est une ellipse, que l'on peut décrire comme il a été dit, Ex. 3. n. 4. puisque l'on connoît le parametre $\frac{\omega z}{a} = \sqrt{\frac{4}{5}}$; le demi-diametre $NM = AM = \frac{1}{3}\sqrt{5}$. Cette ellipse est le lieu cherché.

5. Dém. AL $\frac{ax}{z}$, nL, $\frac{a\omega m}{pz} - \frac{ax}{z}$ donc par la nature de l'ellipse $CL = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$ valeur de tous les cl. Maintenant 1. au point quelconque C pris sur l'arc AZ nous avons la racine vraye & l'équation de n 3. 2° Au point c pris sur l'arc Az, ou y a ses valeurs negatives, nous avons la racine fausse; mais nous avons là l'équation $yy + 3xy = \omega x - xx$, à une ellip-

se differente de celle que l'on vient de décrire. 3° Au point c pris sur l'arc Zn, nous avons encore des valeurs negatives de y; & la racine vraye de n. 3. mais nous avons là l'équation $yy + 3xy = \omega x - xx$. 4° Sur l'arc nz on a la racine fausse & l'équation $yy + 3xy = \overline{\omega x - xx}$. 5° Au point z, où y est nulle, l'équation $y = -\frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, se change en $\frac{n}{z}x = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$: donc $Zl = zl$ est une appliquée, & l'ellipse passe par les points Z, z de la ligne Zlz parallele aux appliquées.

Dans le calcul de n. 3. la lettre L auroit pû être en V, & alors il n'auroit pas fallu prendre MN du même côté, qu'auroit été le point L. Le Problême est non seulement impossible dans les angles DAX, dAX, par lesquels l'ellipse ne passe pas; mais encore dans l'angle dAZ, il n'est possible que dans DAZ.

6. Nous ferons évanoüir les seconds termes de l'équation $yy + xy = \omega x - xx$, en prenant $y + \frac{1}{2}x = v$, $v - \frac{1}{2}x = y$; & en substituant la valeur de y à sa place, la reduite sera $vv = \omega x - \frac{3}{4}xx$; $vv = \omega x - \frac{p}{m}xx$. Puisque Regle 13. l'appliquée est $v = y + \frac{1}{2}x = CL$, le diametre est dans la ligne AL, à laquelle $CL = v$ se termine. L'abscisse n'est donc pas AB, x; mais $AL = \frac{a}{z}x$, n. 4. c'est pourquoi dans l'équation $vv = \omega x - \frac{p}{m}xx$, pour x qui en est l'abscisse, il faut substituer $\frac{ax}{z}$, & afin que l'égalité subsiste, il faut que à la place de l'analogie $x : v :: v : \omega - \frac{p}{m}x$, qui donne $vv = \omega x - \frac{p}{m}xx$, on fasse celle-ci $\frac{ax}{z} : \frac{av}{z} :: \frac{av}{z} : \frac{a\omega}{z} - \frac{apx}{mz}$; $\frac{aavv}{zz} = \frac{aa\omega x}{zz} - \frac{aapxx}{mzz}$, & divisant par p, & multipliant par m, $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aam\omega x}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Cette équation fait connoître dans la fraction $\frac{aam}{pzz}$ qui multiplie vv, que la raison du diametre au parametre est celle de aam à pzz; elle fait aussi connoître dans le terme $\frac{aam\omega x}{pzz}$, que le diametre est $\frac{a\omega m}{pz}$, parceque dans l'équation à l'ellipse, $\frac{aam\omega x}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ est $LN \times Ln$: ainsi divisant par la connuë $LN = AL$, $\frac{ax}{z}$, le quotient $\frac{am\omega}{pz} - \frac{ax}{x}$ sera Ln, laquelle étant $Nn - NL$, il suit que $Nn = \frac{am\omega}{pz}$ le diametre & $AM = \frac{am\omega}{2pz}$. Enfin faisant $aam : pzz :: \frac{a\omega m}{pz} : \frac{\omega z}{a}$, ce quatriéme terme est le parametre. On auroit encore pû faire évanoüir le second terme ωx, comme on le fera, Ex. 6. 9. 10. 13.

EXEMPLE VI. $y = -m \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 90. 1. SOient Fig. 90. données de position les quatre droites AB, AD, EF, GH, qui font un parallelogramme par leur intersection. L'on cherche un point C, d'où ayant tiré les quatre droites CB, CD, CH, CF paralleles aux données, tel que $CB \times CF = CD \times CH$.

2. Nommez les connuës AE, $2m = BF$; EG, $\omega = AR = HD$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y; CH, $\omega - x$; $CF = y + 2m$.

3. L'équation sera $\overline{yy} + 2my = \omega x - xx$; dont les racines sont $y = -m \pm \sqrt{mm + \omega x - xx}$; ou $y = -m \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, en posant $p = m$. Equation au cercle ou à l'ellipse.

4. Parcequ'il y a $-m$, vous prendrez $BK=m$ au dessus de AB; & par le point K vous menerez IK égale & parallele à AB; le point I est le milieu de AE, $2m$, le centre M est sur la ligne IK; & on le trouve en prenant $IM=\frac{\omega m}{2p}$, Regle 1. parcequ'il y a $+\omega x$, le point M tombe sur la partie de la ligne IK prolongée, sur laquelle est K, Regle 3. le parametre sera $\sqrt{\omega\omega+4mp}$, & il y a $+mm$, Regle 5. si vous faites $p: m: \sqrt{\omega\omega+4mp}: \sqrt{\frac{\omega\omega mm}{pp}+\frac{4m^3}{p}}$, ce quatriéme terme est le diametre, Regle 10. dont la moitié est MN, $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp}+\frac{m^3}{p}}$ & se prend sur IM en mettant le point N du côté où le point K se trouve, c'est-à-dire, en allant de M vers K, & N est le sommet Regle 11. car le diametre est sur IM ou IK & CK une appliquée, Regle 9. l'angle CKN est celui des abscisses & des ordonnées : s'il est droit, c'est-à-dire, si le parallelogramme est rectangle, comme on le suppose ici, la courbe est un cercle : autrement c'est une ellipse. L'on peut décrire le cercle CNc, du centre M, & du rayon MN, il satisfait à la question. Fig. 90.

Dém. MK est $IM-IK=\frac{\omega m}{2p}-x$; & NK est $NM-MK$, $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp}+\frac{m^3}{p}}-\frac{\omega m}{2p}+x$; nK, est $nM+MK$, $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp}+\frac{m^3}{p}}+\frac{\omega m}{2p}-x$, car $nM=NM$; & le rectangle $NK\times Kn$ est $\frac{\omega mx}{p}-xx+\frac{m^3}{p}$ valeur de tous les rectangles $Nk\times nk$. Maintenant comme le diametre est au parametre, ou $m: p::$ le rectangle sous les segmens du diametre, $\frac{m^3}{p}+\frac{\omega mx}{p}-xx: mm+\omega x-\frac{p}{m}xx$, quarré de chaque ordonnée correspondante CK, ck donc chaque CK, $ck=\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$.

Ensuite 1° l'on a au point C la racine vraye. 2° Au point c pris sur l'arc AN, ou sur Rn, encore racine vraye. 3° Au point c pris sur l'arc EG, & au point c pris sur l'arc EN ou Gn la racine fausse. Le cercle CNc donne dans tous ses points une des racines de y, & l'équation $yy+2my=\omega x-xx$ de n. 3. Au point A $y=0$ donc AI est une appliquée, puisque $m=\sqrt{mm+\omega x+\frac{p}{m}xx}$, on dira le même des points, E, G, R.

Faites évanoüir le second terme de l'équation $yy+2my=\omega x-\frac{p}{m}xx$; en prenant $v-m=y$, & la substitution des valeurs de y & de yy produira $vv-mm=\omega x-\frac{p}{m}xx$. Multipliez par m, divisez par p, vous ferez $xx-\frac{\omega mx}{p}=-\frac{m}{p}vv+\frac{m^3}{p}$. Prenez encore $x=z+\frac{\omega m}{2p}$; la substitution donnera $\frac{m}{p}vv=\frac{\omega\omega mm}{4pp}+\frac{m^3}{p}-zz$.

Equation reduite qui montre d'abord Regle 13. dans le second membre que le demi-diametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp}+\frac{m^3}{p}}$, & le diametre $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{pp}+\frac{4m^3}{p}}$; & dans le premier $\frac{m}{p}vv$, que la raison du diametre au parametre est celle de m à p; d'où il suit que le parametre est $\sqrt{\omega\omega+4mp}$; que $v=y+m$ est l'appliquée CK, & par consequent IK le diametre. Le second mem-

bre nous apprend encore que z dans ces sortes de reduites commence au centre M, étant MK, $z = x - \frac{\omega m}{2p}$, ou $\frac{\omega m}{2p} - x$; d'où il suit, IK étant x, que IM est $\frac{\omega m}{2p}$. L'on voit aussi que les quarrées vv, zz des inconnuës sont reduits à l'unité, puisque $p = m$.

EXEMPLE VII. $y = -m \pm \sqrt{\mp mm \pm \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

FIG 90. 1. SI l'on avoit demandé dans l'exemple precedent, que $\overline{CB} \times \overline{CF}$ fût égal à $\overline{CD} \times \overline{CH} - 2\overline{AI}^2$, l'équation auroit été $yy + 2my = \omega x - xx - 2mm$; dont les racines sont $y = -m \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, qui sera au cercle en supposant, que le reste est comme Ex. 6.

2. Pour la construction l'on trouvera les mêmes choses, que Ex. 6. n. 4. excepté que le parametre Regle 6. est $\sqrt{\omega\omega - 4mp}$. C'est pourquoi l'on a dit Regle 12. qu'il faut que $\omega\omega$ soit plus grand que $4mp$, autrement le parametre est une racine imaginaire, & le Problème est impossible, comme il arrive ici, car étant $m = p$, Ex. 6. n. 3. l'on a $\sqrt{\omega\omega - 4mm}$ & comme AE, $2m$ est plus grand que EG, ω; il suit que $4mm$ est plus grand que $\omega\omega$. Que si $\omega\omega$ se trouvoit égal à $4mp$, le parametre seroit zero, & le Problême encore impossible.

3. L'on auroit aussi connu l'impossibilité du Problême par l'évanoüissement des seconds termes, soit $v - m = y$; la premiere reduite est $vv = -mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$; $xx - \frac{\omega m}{p}x = -\frac{m^3}{p} - \frac{m}{p}vv$. Soit $x - \frac{\omega m}{2p} = z$, ou $\frac{\omega m}{2p} - x = z$, la seconde reduite sera $\frac{m}{p}vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p} - zz$, dont le demi-diametre $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p}}$, & le diametre $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{pp} - \frac{4m^3}{p}} = \sqrt{\frac{\omega\omega mm - 4m^3p}{pp}}$, où il faut que $\omega\omega$ soit plus grand que $4mp$; le parametre $\sqrt{\omega\omega - 4mp}$, où il faut encore la même chose, IM est $\frac{\omega m}{2p}$.

4. Ce Problême, qui est impossible sur l'arc ACR, est possible sur l'arc ANE; car en cet endroit on a l'équation $yy + 2my + mm = 3mm + \omega x - xx$, dont les racines n'ont rien d'impossible.

5. Mais lorsque sous le signe radical il y a $+mm - \omega x$, il n'est pas necessaire que $\omega\omega$ soit plus grand que $4mp$, parceque le diametre & le parametre n'ont point le signe $-$.

On demande que $CB \times CD$ soit égal à $CF \times CH - 2GE \times AB$. L'équation est $yy + 2my = -\omega x - \frac{p}{m}xx$, $y = -m \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Soit $y = v - m$: la premiere équation se change en $xx + \frac{m\omega x}{p} = -\frac{m}{p}vv + \frac{m^3}{p}$. Soit encore $x = z - \frac{m\omega}{2p}$; la seconde reduite est $\frac{m}{p}vv = \frac{mm\omega\omega}{4pp} + \frac{m^3}{p} - zz$. Donc le diametre est $\sqrt{\frac{mm\omega\omega}{pp} + \frac{4m^3}{p}}$ le parametre $\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. IM est $\frac{m\omega}{2p}$.

EXEMPLE VIII. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 91. les trois lignes AB, AD, EF font par leur interſection un triangle équilateral. Il faut trouver le point C, duquel on tire les lignes CB, CD, CF ſur les données; étant CD parallele à AB; CB, CF paralleles à AD; le point C hors du triangle ſous la ligne EF. Il faut enfin que le rectangle ſous CB, CD ſoit égal au quarré de CF. FIG. 91.

2. Nous nommerons les connuës AE, $\omega = 1 = z = AI = IE$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y; $EB = AE - AB$, $\omega - x$; $CF = CB - BF$, $y - \omega + x$.

3. L'équation ſera $yy - 2\omega y + xy = - \omega\omega + 2\omega x - xx$; dont les racines ſont $y = \omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{3}{4}xx}$, ou $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

4. La conſtruction eſt telle. Parce qu'il y a $+m$, Art. 2. Nous couperons $BK = AI$, m, & nous mettrons le point K entre B & C; par le point I nous menerons IK égale & parallele à AB, x; parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$, nous prendrons $KL = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}x = \frac{n}{z}x$, nous ferons tomber le point K entre L & C, & nous tirerons IL infinie. Dans le triangle IKL, l'angle IKL eſt égal à l'angle IAB de 60. degrez, IK eſt double de KL donc l'angle ILK eſt droit; donc $\overline{IL}^2 = \overline{IK}^2$, xx, $- \overline{KL}^2$, $\frac{1}{4}xx$, & $IL = x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & nommant $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\frac{a}{z}$, Il eſt $\frac{ax}{z}$, & tous les Il ſont auſſi $\frac{ax}{z}$.

De plus le centre M ſe trouve en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. l'on prend M ſur IL en allant de I vers L, parcequ'il y a $+\omega x$, Reg. 3. le parametre eſt $\frac{\omega z}{a}$ parceque mm eſt nulle, Regle 7. le diametre eſt dans IL, dont CL eſt une appliquée, Regle 9. ſi l'on fait $pzz : aam :: \frac{\omega z}{a} : \frac{am\omega}{pz}$, ce quatriéme terme Regle 10. eſt le diametre double de $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$; ainſi MN demi-diametre eſt égale à IM & le point N, tombera ſur I Regle 11. quoique ω ne ſoit pas nulle, Regle 2. l'angle CLN des coordonnées eſt droit; & comme aam, $\frac{3}{4} = pzz$, la courbe eſt un cercle, qu'on décrira du centre M, & du rayon MN, ou MI. C'eſt la ligne cherchée, qui ſatisfait dans tous ſes points.

Dém. nL eſt $In - IL$, $\frac{a\omega m}{pz} - \frac{ax}{z}$, & tous les nl ont la même valeur: donc tous les rectangles $IL \times Ln$ ſont $\frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$; or par la nature de l'ellipſe & du cercle; $aam : pzz : \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz} : \omega x - \frac{p}{m}xx$; donc tous les CL, $cl = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Maintenant 1° au point C pris ſur l'arc ICZ, on a une racine vraye. 2° Au point c pris ſur l'arc Zn encore racine vraye. 3° Au point c pris ſur l'arc nE racine fauſſe. 4° Au point c pris ſur l'arc IE racine fauſſe & dans tous ces points l'équation de n. 3. Remarquez que $bf = bE = x - \omega$. 5° Le cercle paſſe par les points Z, E. Car au point E, ou $y = o$, l'équation $y = m - \frac{n}{z}x - \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$ ſe change en $m - \frac{n}{z}x = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$: or

la ligne ZE eſt égale à AI, m; $Zl = \frac{n}{z}x$; & $El = ZE - Zl$, donc El eſt une appliquée, & le point E eſt dans la circonference. Au point Z on a ZE, $y = m = AI$, & l'équation $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, ſe change en $\frac{n}{z}x = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$: mais Zl eſt $\frac{n}{z}x$, elle eſt donc une appliquée; & le point Z eſt dans la circonference.

EXEMPLE IX. $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 92. 1. FIgure 92. ſoient données de poſition les quatre lignes AB, AD, EF, GH, qui par leur interſection font l'angle EAS droit, & les angles GEA, GAE, GAS, GSA de 45. degrez chacun; d'où il ſuit que les angles en G ſont droits. Il faut trouver le point C, duquel on puiſſe tirer les quatre droites CB, CD, CF, CH ſur les données, faiſant les angles CBA, CDA, CFA, CHG auſſi de 45. degrez chacun, ou bien il faut que CB & CH ſoient paralleles à AE; CD & CF à AB. L'on demande que le produit de CB multipliant CF ſoit égal à celui de CD multipliant CH.

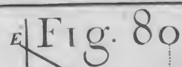
2. Nommons AG, $z = 1 = GS$, car AG eſt donnée de grandeur; les inconnuës AB, $x = CF$, CB, y; dans le triangle ARB l'angle ARB eſt droit, l'angle RBA eſt de 45. degrez = à l'angle RAB. La raiſon du Sinus de l'angle ARB, au Sinus de l'angle RAB de 45. degrez eſt celle de 1 à $\frac{70710}{100000}$, que je nomme de 1 à n. Ainſi l'on fera cette proportion $1 : n :: BA, x : BR$, $nx = AR$; & $CR = y - nx$. Après cela dans le triangle CRD, on a cette Analogie $n : 1 :: CR, y - nx : CD, \frac{y - nx}{n}$.

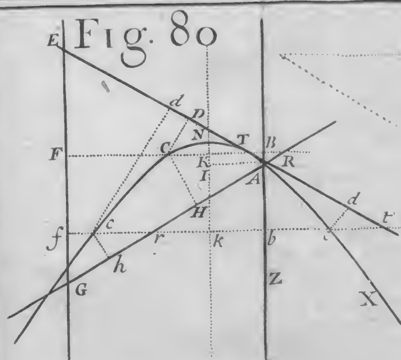
L'angle AGS eſt droit, donc $AS = \sqrt{2}$, que je nomme $2m$; & $SR = 2m + nx = RH$. On aura donc $CH = RH - CR = 2m + 2nx - y$.

3. L'équation ſera $yy - 2my - 2nxy = -2mnx - 2nnxx$ dont les racines ſont $y = m + nx \pm \sqrt{mm - nnxx}$, ou $y = m + \frac{n}{z}x$, $\pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$, en ſuppoſant $nn = \frac{p}{m}$, ou $p = mnn$.

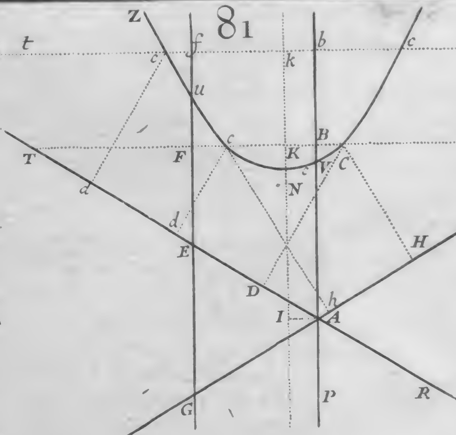
4. Parcequ'il y a $+m$, je coupe $BK = m$, de ſorte que le point K tombe entre B & C, Art. 2. par le point K je mene IK parallele & égale à AB. Enſuite je fais, $z = 1 : n :: IK, x : KL$, $\frac{n}{z}x = IL = \frac{a}{z}x$ en faiſant $n = a$; & je fais tomber le point L entre K & C, parce qu'il y a $+\frac{n}{z}x$.

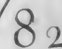
Maintenant le centre M eſt en I Regle 2. parceque la quantité ω eſt nulle; & par la même raiſon le parametre eſt $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, Regle 8. le diametre eſt dans IL, & CL une de ſes appliquées, Regle 9. ſi l'on fait $pzz : aam : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre, Regle 10. dont la moitié $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} = MN$ le demi-diametre, & N le ſommet qui ſe prend ſur la partie de IM, où eſt L, Regle 11. Enfin l'angle CLN des abſciſſes & des ordonnées eſt droit, & $aam = pzz$. La courbe eſt donc un cercle, qui ſe décrira du centre I ou M & du rayon $MN = IN$. C'eſt le lieu cherché, qui ſatisfait à la queſtion dans tous ſes points.

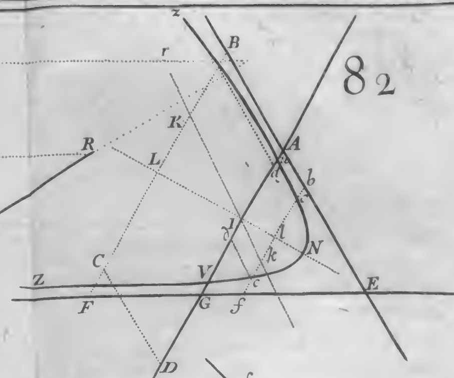


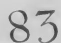


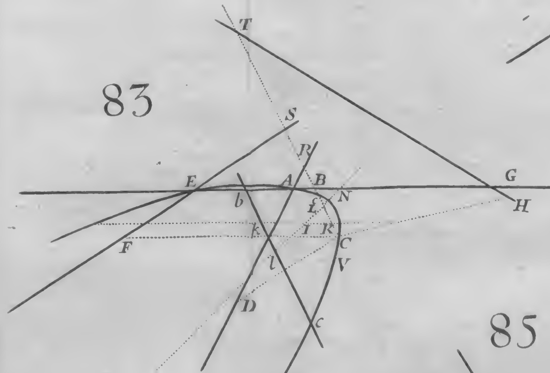




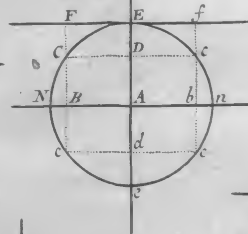


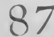


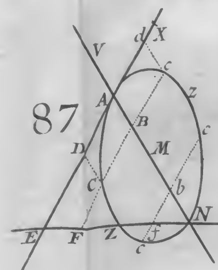




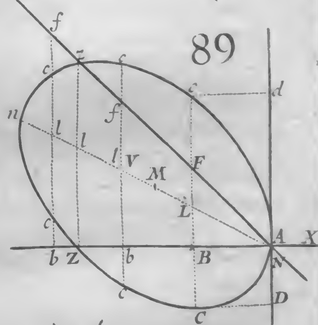




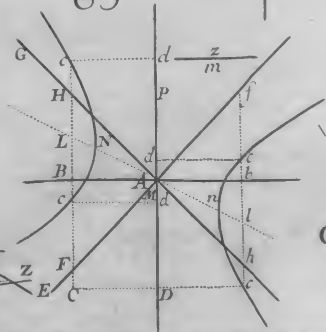


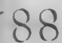


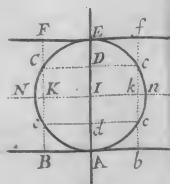




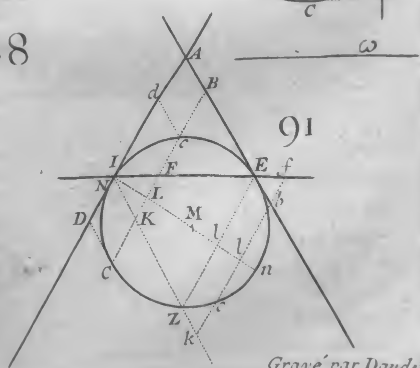


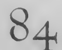


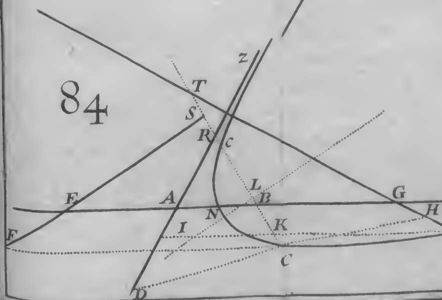




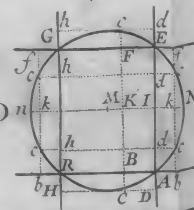












Gravé par Daudet.

Dém. $IN = m$ puiſque elle eſt $= \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} = \sqrt{\frac{nnm^3}{nnmzz}}$ donc $IN = IA, IG$, FIG. 92.
$IE = \frac{1}{2}\sqrt{2} = m$, donc le cercle qui paſſe par N, paſſe auſſi par A, G, E.

Maintenant le rectangle ſous les ſegmens GL, LN du diametre eſt $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$, valeur de tous les rectangles ſous les ſegmens. Or par la nature du cercle, $aam : pzz ::$ le rectangle $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ des ſegmens : $mm - \frac{p}{m}xx = \overline{CL}^2$ quarré de l'appliquée : c'eſt pourquoi toutes les appliquées CL, cl ſont $\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

Enſuite 1° au point C pris ſur l'arc NE, je trouve $CB = BK + KL + LC$, $y = m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$: & c'eſt au point C que le calcul a donné l'équation de n. 3. 2° Au point c pris ſur l'arc NA, j'aurai la racine negative de n. 3. De plus les triangles qui ſe font à ce point c étant ſemblables à ceux que l'on a examinez au point C, & les valeurs de x & de y étant poſitives aux deux endroits, l'on viendra à la même équation de n. 3. 3° Au point c pris ſur l'arc EG, j'aurai la racine poſitive, & l'équation de n. 3. 4° Au point c pris ſur l'arc AG on a une valeur negative & l'équation de n. 3.

Le Cercle CNc eſt donc le lieu cherché qui ſatisfait à la queſtion dans tous ſes points.

5. L'on fera évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy - 2my - 2nxy = -2mnx - 2nnxx$; ſi l'on fait $y - m - nx = v$, $y = v + m + nx$; la ſubſtitution donnera pour reduite $vv = mm - nnxx$; $vv = mm - \frac{p}{m}xx$, $\frac{m}{p}vv = \frac{m^3}{p} - xx$.

Le terme vv, qui dans ces ſortes de reduites, Regle 13. eſt le quarré de l'appliquée, nous apprend que CL, $v = CB - BK - KL$, $y - m - nx$ eſt l'appliquée de l'équation, & par conſequent IL le diametre. Le terme xx eſt le quarré de la partie du diametre pris depuis le centre I juſqu'à l'appliquée : mais IK, x, ne peut être cette appliquée, puis qu'elle ne ſe termine pas au point L; il faut donc Regle 13. ſubſtituer IL $\frac{ax}{z}$ à la place de IK, x; & $\frac{aaxx}{zz}$ à la place de xx : & afin que l'égalité ſubſiſte, il faut multiplier auſſi tous les termes de l'équation par $\frac{aa}{zz}$, comme l'on multiplie xx : ainſi la nouvelle équation, qui doit être conſtruite eſt $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Dans le premier terme $\frac{aam}{pzz}vv$, l'on voit que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de aam à pzz. Dans le terme $\frac{aam^3}{pzz}$, qui eſt toûjours le quarré du demi-diametre, l'on connoît que ce demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, & le diametre $2\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} = \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$. Et ſi l'on fait $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre. Enſuite dans cette ſorte d'équation le ſecond membre $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ eſt le rectangle ſous les ſegmens $NL \times LG$, $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} + \frac{ax}{z} \times \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} - \frac{ax}{z}$, étant l'origine des $\frac{ax}{z}$ au centre. Ainſi $IL = \frac{ax}{z}$ apprend que le point I eſt le

centre, & que $IM = o$. Enfin si l'on change aam en mnn, parceque $n = a$; & pzz en $mnnzz$, ou en mnn, parceque $mnn = p$, $z = 1$: on verra que $aam = pzz$. Et comme l'angle CLN est droit, on conclurra que la ligne cherchée est un cercle.

EXEMPLE X. $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. COmme n. 1. Exemple 9. excepté que l'on demande $CB \times CF + \frac{\overline{AE}^2}{2n} = CD \times CH + \frac{AE \times AB}{2}$.

2. Comme n. 2. Ex. 9. & $AE = AS = \sqrt{2} = 2m$.

3. Comme n. 3. Ex. 9. excepté que $CB \times CF + \frac{\overline{AE}^2}{2n} = CD \times CH + \frac{AE \times AB}{2}$ s'exprime ainsi $xy + \frac{2mm}{n} = \frac{2my + 3nxy - yy - 2mnx - 2nnxx}{n} + mx$; qui se reduit à $yy - 2my - 2nxy = -2mm - mnx - 2nnxx$. Dont les racines sont en faisant $mn = \omega$, $nn = \frac{p}{m}$; $p - mnn$, $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Equation au cercle ou à l'ellipse.

4. Pour la construction, elle sera la même que Exemple 9. n. 4. pour $m + \frac{n}{z}x$; & l'on trouvera comme là IL, $\frac{n}{z}x$, ou $\frac{a}{z}x$. Le parametre Regle 6. est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, où il est évident qu'il faut selon la Regle 12. que $\omega\omega$ soit plus grand que $4mp$, afin que le Problême soit possible; mais étant $\omega = mn$, & $p = mnn$; $\omega\omega$ est $mmnn$, $4mp$ est $4mmnn$: ainsi $\omega\omega$ étant plus petit que $4mp$, le parametre est une racine imaginaire, & le Problême impossible.

5. Mais si l'on demandoit $CB \times CF + \frac{\overline{AE}^2}{2n} = CD \times CH + \frac{3}{2} AE \times AB$; l'équation de n. 3. sera $xy + \frac{2mm}{n} = \frac{2my + 3nxy - yy - 2mnx - 2nnxx}{n} + 3mx$; qui se reduira à $yy - 2my - 2nxy + mm + 2mnx + nnxx = -mm + 3mnx - nnxx$; dont les racines sont, après avoir posé $3mn = \omega$, $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$ au cercle, ou à l'ellipse, Fig. 93.

FIG. 93. 6. Pour le commencement de la construction, l'on fera comme n. 4. Le parametre $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ est une grandeur réelle, puisque $\omega\omega = mmnn$ est plus grand que $4mp = 4mmnn$. Le centre se trouve sur IL, en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. Le point M se prend sur IL en allant de I vers L, parcequ'il y a $+\omega x$, Regle 3. Faisons $pzz : aam :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme est le diametre, Regle 10. Ce diametre est dans IL, & LC est son appliquée Regle 9. NM est la moitié du diametre, c'est-à-dire, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}}$, & le sommet N se prend en

en allant de M vers L, Regle 11. Parceque la quantité aam eſt égale à pzz; de plus l'angle CLN des coordonnées eſt droit ; ainſi la ligne cherchée eſt un cercle, qui ſe décrira du centre M, & du rayon MN. C'eſt le lieu cherché. Fig. 93.

Dém. Le rectangle $NL \times nL$ ſous les ſegmens du diametre eſt $-\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Or comme aam eſt à pzz ; ainſi le rectangle $NL \times Ln$, $-\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ eſt au quarré de l'appliquée CL, $-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$; & $CL = \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Maintenant au point C on a la racine vraye & l'équation de n. 5. Au point c on a la racine fauſſe & l'équation de n. 5. parce qu'on y a des triangles ſemblables à ceux qui ſe font par les lignes tirées du point C. Ainſi le cercle CNc eſt le lieu cherché.

7. Remarquez que ſi le calcul avoit été fait au point V & que L eût été en u, le ſommet N auroit dû ſe prendre du côté où L n'étoit pas.

8. L'on fera évanoüir les ſeconds termes, en faiſant $y = v + m + nx$, & la ſubſtitution donnera $vv = -mm + 3mnx - nnxx$; $xx - \frac{\omega mx}{p} = -\frac{m^3}{p} - \frac{m}{p}vv$.

Pour faire évanoüir le ſecond terme qui reſte, ſoit $s + \frac{\omega m}{2p} = x$: la ſubſtitution donne $\frac{m}{p}vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p} - ss$.

Le terme $\frac{m}{p}vv$ fait connoître que $v = y - m - nx = CB - BK - KL = CL$ eſt l'appliquée, & que le diametre eſt dans IL. D'où Reg. 13. il ſuit que AB, x, ne peut pas faire partie de l'abſciſſe NL ; mais que c'eſt IL, $\frac{a}{z}x$: c'eſt pourquoi au lieu de $x - \frac{\omega m}{2p} = s$, il faut mettre $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{as}{z}$, afin que l'égalité demeure. Ainſi ss de la derniere équation ſe changera en $\frac{aass}{zz}$, & pour conſerver l'égalité, l'on multipliera tous les autres termes par $\frac{aa}{zz}$, & l'on aura $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aass}{zz}$. Où l'on voit d'abord que le rapport du diametre au parametre eſt le même que de aam à pzz ; que le diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$; & faiſant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, que ce quatriéme terme eſt le parametre. Puiſque $aam = pzz$, & que l'angle CLN eſt droit, c'eſt un cercle. Enfin dans cette eſpece d'équation le ſecond membre eſt le rectangle ſous les ſegmens du diametre, $NL \times nL$, ou ſous $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}} + \frac{as}{z}$, & $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}} - \frac{as}{z}$, étant l'origine des $\frac{as}{z}$ au centre M. Mais $\frac{as}{z} = \frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$ ou $= \frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$ donc IM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$ afin que ML ſoit, comme elle doit l'être, $\frac{as}{z} = IM - IL$, $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$. C'eſt Mu, qui eſt Iu, IM, $\frac{ax}{z} - \frac{\omega\omega m}{2pz}$.

EXEMPLE XI. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 94. 1. FIg. 94. comme n. 1. Exemple 3. excepté que l'on demande que ce qui est produit par la multiplication de CB & CF, soit égal au quarré de CD.

2. Comme n. 2. Ex. 3. excepté $AE = 2\omega = 1$.

3. Par la supposition $CB \times CF = \overline{CD}^2$, $yy - 2\omega y + xy = -xx$; dont les racines sont $y = \omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega\omega - \omega x - \frac{3}{4}xx}$, ou $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$, en posant $m = \omega$, $z = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{8}$.

4. Parcequ'il y a $+m$, sur BC nous couperons $BK = m$. Par le point K nous menerons l'infinie IK parallele & égale à AB. Ensuite nous ferons $KL = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}x = \frac{n}{z}x$; & nous ferons tomber le point L entre K & B, parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$. Dans le triangle IKL, IK est double de KL donc leurs sinus sont doubles l'un de l'autre; donc l'angle IKL étant de 60. degrez, l'angle ILK est droit donc $IL = x\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{ax}{z}$ en faisant $\frac{a}{z}\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Maintenant le centre M est sur la ligne IL, & se trouve en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. parcequ'il y a $-\omega x$, le centre M se prend sur la partie de la ligne IL sur laquelle le point L n'est pas, Regle 4. le parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$, Regl. 5. Le diametre est dans IL, & CL une de ses appliquées, Regl. 9. faisons $pzz : aam :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme est le diametre, Reg. 10. sa moitié est MN, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$, le point N se prend sur IL du même côté où est L, Regl. 11.

Parceque $aam = pzz = \frac{3}{8}$, & que l'angle CLN des coordonnées est droit, la ligne cherchée est un cercle.

Le rectangle $NL \times Ln$ des segmens du diametre sera $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Or comme le diametre est au parametre, ce rectangle est au quarré de l'appliquée CL, & $CL = \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$, valeur de tous les cl.

Maintenant 1° au point C nous avons CB la racine vraye de n. 3. Et l'équation $2\omega y - xy - yy = xx$. 2° Au point c pris sur l'arc NA, nous avons la racine fausse. 3° Au point c pris sur l'arc Hn, la racine positive au point c pris sur l'arc An, la racine negative, & sur tous ces points l'équation de n. 3.

EXEMPLE XII. $y = -m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 95. 1. FIg. 95. Comme Exemple 8. n. 1. excepté qu'il faut trouver dans un des angles exterieurs BAD le point C.

2. Nommez AE, ω & chaque autre côté connu du triangle; AB, $x = CD$; CB, y, $DF = \omega + y$; $CF = x + \omega + y$.

3. L'équation sera $yy + 2\omega y + xy = -\omega\omega - 2\omega x - xx$, dont les racines sont $y = -\omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\omega x - \frac{3}{4}xx}$, imaginaires & le Problême est impossible dans l'angle exterieur BAD. Mais il est possible aillleurs. Voyez Ex. 8.

4. Mais s'il falloit que $\overline{CB \times CD} - \frac{3}{4}\overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{AE}^2$, $yy + 2\omega y + xy = -2\omega x - \frac{7}{4}xx$; dont les racines sont $y = -\omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega\omega - \omega x - \frac{3}{2}xx}$, ou $y = -m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$, en supposant $m = \omega = z = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{2}$. Equation au cercle, ou à l'ellipse.

5. Parcequ'il y a $-m$ Art. 2. ajoûtez BK, m à CB, & par le point K menez l'infinie KI parallele & égale à AB, le point I tombe sur le point E, coupez KL, $\frac{1}{2}x$, mettez le point K entre L & C, tirez l'infinie $IL = \frac{ax}{z}$.

Prenez $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & faites tomber le centre M sur la partie de IL, sur laquelle le point L n'est pas, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 4. le parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$, Regle 5.

Le diametre est dans IL, & CL son appliquée, Regle 9. faites $pzz : aam :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, qui est le diametre, Regle 10. dont la moitié est NM, le sommet N se prend du côté, où L se trouve, Regle 11. & parceque aam, $\frac{3}{4}$ n'est pas égal à pzz, $\frac{3}{2}$, la ligne est une ellipse, le lieu cherché est dans l'arc NC.

Le rectangle $NL \times Ln$ sous les segmens du diametre est $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$.

Or par la nature de l'ellipse $aam : pzz :: NL \times Ln$, $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz} : \overline{CL}^2$, quarré de l'appliquée $mm - \omega x - \frac{p}{m}xx$; & $CL = \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Maintenant au point C vous avez la racine positive. De plus c'est au point C que le calcul de n. 4. a été fait.

Au point c vous avez la racine negative, & l'équation $yy + 2\omega y + 3xy = -\frac{7}{4}xx - 2\omega x$, differente de celle de n. 4. L'ellipse est le lieu cherché dans les arcs, où l'on a ensemble $+x$, $+y$; ou $-x$, $-y$.

EXEMPLE XIII. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. Fig. 69. Exemple de M. DESCARTES. Soient AB, AD, EF, GH, plusieurs lignes données par position, & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF, & CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, soient donnez CBA de 120. degrez, CDA de 35°. 15'. 50''. CFE de 30. degrez, CHT de 48°. 35'. 27''. & que CB multipliée par CF produise une somme égale à CD multipliée par CH. FIG. 69. 38.

FIG. 69. 38. 2. Supposons la chose faite, & examinons d'abord ce que la position des lignes nous fait connoître. 1° Les lignes EF, DA, GH coupent la ligne AB aux points E, A, G. Ainsi les segmens EA, AG sont connus, je les mesure, & je trouve que la raison de EA à AG est celle de 3 à 5, je nomme $EA = 3$; & $AG = 5$; & l'unité, que je nomme z, est égale au tiers de EA, ou à la cinquiéme partie de AG. 2° Je mesure aussi les angles que les lignes données font par leur intersection, & je trouve BAR de 60. degrez, AES de 30, AGT de 30.

Ensuite je nomme les inconnuës AB, x; CB, y; & je prolonge CB jusques à ce qu'elle coupe toutes les données. Voyez le calcul, qui est Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. & à chaque endroit joignez ce que je dirai ici qui lui convient.

L'on a trouvé là que les trois angles du triangle ARB étoient égaux, c'est pourquoi quand on a dit, que $z : b :: AB, x : BR, \frac{bx}{z}$; z est aussi égal à b, & $b = 1$, $\frac{bx}{z} = x$.

Là même dans le triangle CDR, $CR : CD :: z : c$. ou comme le sinus de l'angle CDA au sinus de l'angle CRD. Et $57734 : 86602 : z = 1 : \frac{86602}{57734} = \frac{3}{2}$ environ $= c$. & $CD = \frac{czy + bcx}{zz} - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}CR$.

Là même, dans le triangle ESB, $BE : BS :: z : d$. ou comme le sinus de BSE au sinus de BES, c'est-à-dire, comme $1 = z$ à $\frac{1}{2} = d$. & $BS = \frac{dk + dx}{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}BE$.

Là même, dans le triangle FSC, $CS : CF :: z : e$. ou comme le sinus de CFS au sinus de CSF, donc $e = 2$, & $CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz} = 2y + 3 + x = 2CS$.

Là même, dans le triangle GBT, $BG : BT :: z : f$. mais $BG = BT$, donc $f = z = 1$.

Là même, dans le triangle TCH, $CT : CH :: z : g$. ou comme le sinus de CHT au sinus de CTH. Ce qui fait $\frac{2}{3} = g$, & $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz} = \frac{2}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}CT$.

3. Après cela voyez la suite de la resolution de ce Problême L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. Il sera aisé d'appliquer ce que je vais dire ici à ce qui se lit en cet endroit.

$CB \times CF = CD \times CH$ donne cette équation

$$yy = \frac{-dekzzy \quad -dezzxy \quad +bcfglx \quad -cfgzxy \quad +cfglzy \quad +bcgzxy \quad -bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$$

Au lieu des quantitez $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz} = 2$, l'on écrit $2m$, au lieu des quantitez $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz} = 1$, l'on écrit $\frac{2n}{z}$, & l'équation precedente se change en $yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$.

$a = \sqrt{\frac{3}{4}}$
$b = 1$
$c = \frac{3}{2}$
$d = \frac{1}{2}$
$e = 2$
$f = 1$
$g = \frac{2}{3}$
$k = 3 = AE$
$l = 5 = AG$
$m = 1$
$n = \frac{1}{2}$
$\omega = 4$
$p = \frac{3}{4}$
$z = 1$.

On tire les racines $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$. Alors au lieu de $\frac{-2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} = 4$, l'on a écrit ω, & au lieu de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz} = \frac{-3}{4}$ l'on a écrit $-\frac{p}{m}$. Et l'on a fait $y = m - \frac{n}{z}x, \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$; $y = 1 - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$.

4. L'on a déja conſtruit $m - \frac{n}{z}x$, Liv. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 2. où l'on a tiré les lignes IK parallele à AB, & IL, étant $BK = m$; $IK = AB$, x; $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$. Pourſuivons.

Dans le triangle IKL, il eſt aiſé de voir que $IL = x\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{ax}{z}$ auſſi bien que tous les Il.

Je prends $IM = \frac{a\omega m}{2pz} = \sqrt{\frac{16}{3}}$, Regle 1. & je fais tomber le point M du côté où L ſe trouve, parcequ'il y a $+ \omega x$, Regle 3. le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+ mm$, Regle 5. le diametre eſt dans IL, & LC eſt une de ſes appliquées, Regle 9. $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ le diametre, Regle 10. dont la moitié $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}} = \sqrt{\frac{19}{3}}$ eſt NM, qui eſt plus grande que IM, & l'on mettra le ſommet N ſur la partie de IM, où L ſe trouve Regle 11. l'angle CNL des appliquées avec les abſciſſes eſt droit, & $aam = pzz = \frac{3}{4}$: ainſi la ligne eſt un cercle qu'il eſt aiſé de décrire du centre M & du rayon NM. Il ſatisfait à la queſtion.

Le rectangle ſous les ſegmens du diametre eſt $\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Et par la nature du cercle CL, ou $cl = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Maintenant 1° au point C on a la racine poſitive. Au point c pris au deſſus de A, la negative, & dans ces deux points la même équation, d'où l'on peut conclurre que le cercle CNc ſatisfait au Problême.

5. L'on fait évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, en prenant $v + m - \frac{nx}{z} = y$; & ſi l'on écrit ω pour $\frac{-2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$, & $-\frac{p}{m}$ pour $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ l'équation deviendra $xx - \frac{\omega mx}{p} = \frac{m^3}{p} - \frac{mvv}{p}$.

Prenez encore $s + \frac{\omega m}{2p} = x$, la reduite ſera $\frac{m}{p}vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p} - ss$.

Je commence la conſtruction ſur BC, en prenant $BK = m$; par le point K je mene la ligne indefinie IK parallele à AB, & je détermine $IK = AB$, x. je coupe $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$; & par les points I, L, je tire l'infinie IL. Je trouverai comme n. 4. que IL eſt $\frac{ax}{z}$. J'ai donc $CL = CB - BK + KL$, $y - m + \frac{n}{z}x = v$. Et parceque dans l'équation derniere le terme $\frac{m}{p}vv$ m'apprend Regle 13. que vv eſt le quarré de l'appliquée, CL ſera cette appliquée, qui eſt terminée à la ligne IL, laquelle par conſequent eſt le diametre de la courbe cherchée. Le terme ss me marque le quarré de l'abſciſſe, mais inutilement prendrai-je $Am = \frac{\omega m}{2p}$, pour avoir $mB = Am - AB$, $\frac{\omega m}{2p} - x = s$. Puiſque l'abſciſſe ne doit pas être ſur AB, ſur la-

FIG. 96. 96. *a* quelle le diametre n'est pas. C'est pourquoi à la place de AB, x; je substituë IL, $\frac{ax}{z}$ qui est sur le diametre IL, qui fait un angle avec CL, qui fera partie de l'abscisse, & qui contient l'inconnuë x. Mais afin que l'égalité demeure dans $\frac{\omega m}{2p} - x = s$, je multiplie tous les termes par $\frac{a}{z}$, pour faire $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z} = \frac{as}{z}$. Ensuite dans l'équation $\frac{p}{m}vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p} - ss$, à la place de ss je substituë $\frac{aass}{zz}$, & afin de conserver encore l'égalité, je multiplie aussi tous les termes par $\frac{aa}{zz}$, ce qui donne enfin $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aass}{zz}$.

Cette derniere reduite fait connoître dans le terme $\frac{aam}{pzz}vv$, que la raison du diametre au parametre est celle de aam à pzz, car dans ces sortes de reduction, ce qui multiplie le quarré de l'appliquée marque ce rapport.

Dans le terme $\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}$, qui est toûjours le quarré du demi-diametre, je vois que le demi-diametre MN est $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$; & le diametre $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; & faisant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme est le parametre. Dans le terme $\frac{aass}{zz}$ qui est toûjours dans ces sortes de reduites le quarré de la ligne ML prise entre l'appliquée CL & le centre M, je découvre que ML étant $\frac{as}{z} = \frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$, & IL étant $\frac{ax}{z}$, LM est $IM - IL$, $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$, & par consequent IM doit être prise égale à $\frac{a\omega m}{2pz}$. Et le point M pris du côté de L; & parceque il vient toûjours $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$, lorsqu'il y a $+\omega x$ dans $\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, c'est pour cela que Mr DESCARTES a donné la Regle 3. Enfin étant $aam = pzz$, c'est un cercle.

Toutes ces choses étant connuës, il n'est pas difficile de poursuivre le reste de la construction comme n. 4.

* Tom. 3. Lett. 82. 6. M. DESCARTES assure dans une de ses Lettres, * que dans la Figure 69. *On voit à l'œil, que puisque* CB *multipliée par* CF *doit produire une somme égale à* CD *multipliée par* CH *; le point* C *se rencontre necessairement en quatre intersections des lignes données. A sçavoir en l'intersection* A *parcequ'alors les lignes* BC, CD *sont nulles, & par consequent étant multipliées par les deux autres, elles composent deux riens, qui sont égaux entr'eux. Tout de même en l'intersection* G *les lignes* CH *&* CB *sont nulles. Et ainsi en l'une des deux autres, qui ne sont pas marquées dans la Figure 69.* CD *&* CF, *& dans l'autre* CH *&* CF *sont nulles.*

La Figure doit donc être telle qu'on la voit, Fig. 96. dans laquelle le cercle passe par les points d'intersection A, G, X, Y. Au point Y, CD, CF sont nulles, au point, X, CH, CF le sont.

FIG. 96. 96. *a* Au point A, Fig. 96. *a.* la ligne AD, à laquelle les CD se terminent, coupe la ligne AB, à laquelle les CB se terminent, & par consequent les lignes CB, CD sont nulles au point A. Pour prouver que le cercle passe par l'intersection A, Fig. 96. *a.* menez AI parallele à CB, AI sera une

appliquée égale à BK, m. Au point A les x ſont nulles, c'eſt pourquoi effacez les termes où x, ſe trouve dans $\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m} xx}$, valeur des appliquees ; il reſtera $\sqrt{mm} = m = AI$. D'où il ſuit que AI eſt veritablement une appliquée, & que le cercle paſſe par l'interſection A. Fig 95. 96. a

Ce qui ſe peut encore prouver de cette ſorte. Suppoſons que le cercle paſſe par le point A ; $AI = m$ ſera une appliquée. Le rectangle $IN \times In$ eſt $\frac{aam^3}{pzz} = mm$ quarré de l'appliquée AI, qui ſera donc m. D'où il ſuit que le cercle paſſe par le point A.

Au point G la ligne AB, coupe la ligne GH, & par conſequent les lignes CB, CH ſont nulles au point G. Pour prouver que le cercle paſſe par le point G, menez l'appliquée Gl paralelle à AI, AI, $m = \frac{1}{2} Az$; donc $Az = 2m$, & $zG = 3$: donc Az, $2 : AI$, $m = 1 :: zG$, $3 : Gl$, $\frac{3}{2}$.

Suppoſons à preſent que le cercle paſſe au point G, AG eſt $x = 5$. Subſtituons cette valeur de x dans la valeur de l'appliquée Gl ; ce ſera $\frac{3}{2} = Gl$, comme on doit le trouver, ſi le cercle paſſe au point G : ainſi il eſt certain qu'il y paſſe.

Au point Y les lignes CD, CF ſont nulles. Pour prouver que le cercle paſſe au point Y, menez l'appliquée Ytv, qui fera l'angle YvA de 60. degrez, donc $AY = Yu = AE = 3$, & $zv = 1$. Donc Az, $2 : AI$, $1 :: zv$, $1 : vt$. $\frac{1}{2}$; & l'appliquée $Yt = \frac{5}{2}$.

Suppoſons à preſent, que le cercle paſſe au point Y ſubſtituons 3 valeur de x, l'on fera $\frac{5}{2} = Yt$, telle qu'on doit la trouver, le cercle paſſant au point Y.

Au point X les CF, CH ſont nulles. Pour prouver que le cercle paſſe au point X, 1° menez l'appliquée Xrp ; & $Xp = pG$. 2° Abbaiſſez la perpendiculaire XB ; $EB = BG = 4$. 3° Dans le triangle XBG, le côté XG eſt double du côté XB. Nommons XG, f ; XB eſt $\frac{1}{2}f$ & $f = \sqrt{\frac{64}{3}}$. 4° Diviſez XG en deux parties égales au point S, & joignez pS : les angles en S ſont droits. 5° Dans le triangle pXS le côté pX eſt double du côté pS. Nommons pX, u ; pS ſera $\frac{1}{2}v$; $SX = \frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{16}{3}}$; $u = \frac{8}{3} = Xp = pG$. & $Ap = \frac{7}{3} = x$; & $zp = \frac{1}{3}$. 6° Dans les triangles équiangles AzI, rzp l'on fera, Az, $2 : AI$, $1 :: zp$, $\frac{1}{3} : pr$, $\frac{1}{6}$. Et l'appliquée Xr eſt $= \frac{5}{2}$. 7° Subſtituons la valeur $\frac{7}{3}$ de x, nous aurons $\frac{5}{2}$ valeur de l'appliquée Xr. Ainſi le cercle paſſe au point X.

On demande que $CB \times CF$ ſoit égal à $CD \times CH$. Le cercle paſſe par les interſections, dans leſquelles ces deux rectangles deviennent $o = o$, c'eſt ce qui arrive au point A, au point G, au point X, au point Y ; & l'équation $o = o$ eſt réelle. Mais aux deux autres interſections E, u, l'équation devient impoſſible, ainſi le cercle ne peut pas y paſſer. En effet au point E, où CB, CF ſont zero ; l'équation eſt $o = CD \times CH$,

De même au point u, ou CD, CH ſont zero ; l'équation eſt $CB \times CF = o$. On peut dans les Exemples qui precedent, & dans ceux qui ſuivent, examiner de la même maniere, par quelles interſections les courbes paſſent.

EXEMPLE XIV. $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 69. 1. FIg. 69. de M. DESCARTES. Si l'on avoit demandé que $\overline{CB} \times \overline{CF} + 2zz = \overline{CD} \times \overline{CH} + \frac{1}{2}\overline{AB}^2$, & le reſte comme Ex. 13. n. 1.

2. Comme Ex. 13. n. 2.

3. Voyez Ex. 13. n. 2. l'équation ſera

$$yy = -2zz \frac{-dekzzy - dezzxy + bcfglx - cfgzxy - bcfgxx + cfglzy + bcgzxy + \frac{1}{2}xx}{ez^3 - cgzz}$$

qui ſe reduit à $yy = 2my - \frac{2nxy}{z} - \frac{2zz + bcfglx - bcfgxx + \frac{1}{2}xx}{ez^3 - cgzz}$.

& à ces racines $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - 2zz - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx + \frac{1}{2}xx}{ez^3 - cgzz}}$. Mettons $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} = \omega = 4$, $-\frac{bcfg + \frac{1}{2}}{ez^3 - cgzz} + \frac{nn}{zz} = -p = -\frac{1}{4}$. Et parceque $z = m = 1$, ce ſera enfin $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, au cercle ou à l'ellipſe, qui ſe conſtruira de cette façon.

4. Comme Ex. 13. n. 4. l'on conſtruira $m - \frac{n}{z}x$, & l'on trouvera $IL = \frac{a}{z}x$. Enſuite on prendra $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$ Regle 1. & le centre M ſera mis ſur la partie de IL, où le point L eſt, Reg. 3. le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ parcequ'il y a $-mm$, Regle 6. $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$ eſt le diametre, Regle 10. qui ſera ſur IL, & LC ſera une appliquée Regle 9. & NM la moitié du diametre ſe prendra ſur IL en allant de M vers L, Regle 11. la quantité $\omega\omega = 16$ eſt plus grande que $4mp = 1$. Ainſi le parametre eſt une grandeur réelle, & le Problême eſt poſſible, Reg. 12. parceque $aam = \frac{3}{4}$ n'eſt pas égal à $pzz = \frac{1}{4}$, la ligne eſt une ellipſe, Art. 4. Regle 2. qu'on décrira, puiſqu'on a ſon ſommet, ſon diametre, ſon parametre. C'eſt le lieu cherché. La Figure 96. peut ſervir à la démonſtration.

Le rectangle ſous les ſegmens eſt $-\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$, & le quarré de l'appliquée eſt $-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$ donc $CL = \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Au point C on a la racine vraye, au point c la racine fauſſe, & dans tous les deux la même équation.

ARTICLE

ARTICLE VII.

Construction particuliere à l'Hyperbole considerée par rapport à ses diamêtres.

LE Texte de M. DESCARTES rapporté au commencement de l'Article VI. contient plusieurs choses, qui regardent l'hyperbole : lisez-le. Voici ce qui suit.

M. DESCARTES.

Mais quand cette Section étant une hyperbole, on a $+ mm$; & quantité $\omega\omega$ est nulle, ou plus petite que $4mp$, on doit tirer Fig. 97. du centre M la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM; & faire MO égale à $\sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$; ou bien la faire égale à m, si la quantité ωx est nulle. Puis considerer le point O comme le sommet de cette Hyperbole, dont le diametre est OP, & CP la ligne, qui lui est appliquée par ordre, & son côté droit est $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$, & son côté traversant est $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$. Excepté quand ωx est nulle; car alors le côté droit est $\sqrt{\frac{2aamm}{pzz}}$, & le traversant est $2m$. Et ainsi il est aisé de la trouver par le second Problême du premier Livre d'Apollonius. Fig. 97.

Le Problême second du Livre premier d'Apollonius est la Proposition cinquante-troisiéme du même Livre, où il enseigne la maniere de décrire une hyperbole, étant donnez le diametre déterminé avec son sommet, le parametre, & l'angle que les appliquées font avec les abscisses. L'on a donné, Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. la maniere de décrire une hyperbole, en cherchant plusieurs de ses points sur un plan. D'où l'on peut conclurre que les Problêmes, qui se construisent avec une hyperbole sont plans, parcequ'on ne se sert dans cette description que de la Regle & du Compas.

REGLE I.

LE centre M est sur la ligne IL, il se trouve en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$. Cette Regle suppose m, $\frac{n}{z}x$ & ωx dans l'équation.

REGLE II.

SI la quantité ω est nulle, le point M est le même que le point I. Cela suppose m dans l'équation.

Fig. 69.

REGLE III.

LOrsqu'il y a $- \omega x$, l'on prend le point *M* du même côté que le point *L* par rapport au point *I*, c'est-à-dire, que l'on prend *IM* sur *IL*, en allant de *I* vers *L*. Ce qui suppose m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE IV.

LOrsqu'il y a $+ \omega x$, l'on prend le point *M* de l'autre côté que le point *L*, par rapport au point *I*, c'est-à-dire, que l'on prend *IM* sur *IL* prolongée en allant de *I* vers le côté où le point *L* n'est pas. Cela suppose m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE V.

LOrsqu'il y a $- mm$, le côté droit ou parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Cela suppose encore $\frac{n}{z}x$ & ωx dans l'équation.

REGLE VI.

LOrsqu'il y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega$ est plus grande que $4mp$, le côté droit ou parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Cela suppose aussi $\frac{n}{z}x$, & ωx dans l'équation.

REGLE VII.

LOrsque la quantité mm est nulle, le parametre est $\frac{\omega z}{a}$. Cela suppose $\frac{n}{z}x$ dans l'équation.

REGLE VIII.

LOrsque la quantité ωx est nulle, le parametre est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Cette Regle suppose $\frac{n}{z}x$ & $- mm$ dans l'équation.

REGLE IX.

DAns tous ces cas le diametre est dans la ligne *IM*, & *CL* est une de ses appliquées. Ce qui suppose m & $\frac{n}{z}x$.

REGLE X.

APrès que le côté droit ou parametre a été déterminé, pour avoir son côté traversant ou diametre déterminé; l'on fait comme pzz à aam: ainsi le parametre a un quatriéme terme, qui est le diametre cherché, cette Analogie suppose que le parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} \mp \frac{4mpzz}{aa}}$, ou $\frac{\omega z}{a}$, ou $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$.

Fig. 98.

REGLE XI.

LA ligne MN est toûjours égale à la moitié du diametre, & l'on prend le sommet N sur IM du même côté du point M, qu'est le point L, c'est-à-dire, que l'on prend MN en allant du point M vers le côté où le point L est déja. Tout cela suppose $\frac{n}{z}x$.

REGLE XII.

MAis Fig. 97. lorsqu'il y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega$ n'est pas plus grande, que $4mp$, ou qu'elle est nulle : l'on doit tirer du centre M la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM. Cette Regle suppose m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation.

Dans ce cas l'on suit les Regles 1. 2. 3. 4.

M. DESCARTES dit qu'il faut que la quantité $\omega\omega$ ne soit pas nulle ou plus petite que $4mp$; mais il me semble qu'il faut qu'elle soit plus grande, car si elle étoit égale, le parametre $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ se reduiroit à zero.

REGLE XIII.

DAns ce même cas, lorsque la quantité ωx se trouve dans l'équation, l'on fait $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$, qui est le demi-diametre déterminé ; & le diametre est $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, & le côté droit ou parametre, $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$. Cela suppose m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE XIV.

DAns le même cas, lorsque la quantité ωx est nulle ; l'on fait le demi-diametre déterminé $MO = m$; & le diametre est $2m$, & le parametre $\frac{2aamm}{pzz}$. Cette Regle suppose m, $\frac{n}{z}x$ dans l'équation.

REGLE XV.

DAns le même cas le diametre est sur la ligne OP, dans le point O est le sommet, & CP une de ses ordonnées. Cela suppose m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE XVI.

LA raison du parametre au diametre déterminé est dans ce cas comme aam à pzz. Ce qui suppose m, $\frac{n}{z}x$.

M. Schooten, qui a fait des Commentaires sur la Geometrie de M. DESCARTES, lui écrivit sur le dessein, qu'il avoit de changer la position des lignes de la Figure 69. lorsqu'elle est appliquée à l'hyperbole.

Mais M. DESCARTES, lui répondit * ainsi. *On sçait bien que les lignes droites étant posées, & la question n'étant point changée, le lieu ne peut pas être tout ensemble au cercle & à l'hyperbole... Cela n'empêche pas, que voulant user de brieveté, & rapporter tous les cas à un seul exemple, comme j'ai fait en la Fig. 38. je n'aye eû raison, après avoir donné le vrai lieu de cet Exemple, qui est un cercle, d'y appliquer aussi l'hyperbole, afin que toutes les Lettres I, K, L, B, C, D, &c. s'y trouvant au même lieu qu'auparavant, on pût entendre le peu, que j'en voulois dire, plus facilement qu'on n'eût fait, si la figure eût été changée. Il me semble donc que vous ne devez point y mettre d'autre figure, car il faudroit aussi changer le discours, & la solution en seroit plus embroüillée... C'est aussi pour user de brieveté qu'on ne parle point ici des hyperboles opposées, mais il faut remarquer, que les choses aisées ont été negligées dans cette Geometrie; mais qu'on n'a rien omis de ce qu'il y avoit de plus difficile dans les matieres, que l'on y a traitées.*

*Tom. 3. Lett. 82.

L'on a choisi la position des lignes à laquelle le cercle convient, plûtôt que celle à laquelle l'ellipse ou l'hyperbole conviendroit, parcequ'il y a une difficulté particuliere à trouver le cercle.

Je ne vois point de difficulté particuliere pour le cercle, si ce n'est qu'il faut que aam soit égal à pzz & que l'angle des coordonnées soit droit.

La difficulté pour l'hyperbole, qui est contenuë, Regle 12. 13. & suivantes, me paroît bien plus considerable.

Sans changer la position tant des lignes données, que des cherchées, l'on peut avoir un lieu à la parabole, Voyez Exemple 8. 9. à l'ellipse, Voyez Ex. 14. à l'hyperbole par rapport à ses diametres, ainsi que M. DESCARTES le remarque dans la même Lettre, Voyez Ex. 9. 13. 16. à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, Voyez Ex. 5.

L'on cherchera la solution du même Problême sur les hyperboles opposées. Voyez Ex. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 14. 15.

M. DESCARTES assure dans une autre Lettre, * que les deux constructions qu'il a données de l'hyperbole, se pourroient expliquer par une seule.

** Tom. 3. Lett. 71.

La seconde construction commence Regle 12. Voici comment elle auroit pû se reduire à la premiere. Après la Regle 6. l'on pourroit ajoûter ces mots, Mais lorsqu'l y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega$ n'est pas plus grande que $4mp$, l'hyperbole, qui resout le Problême est sur le diametre conjugué de celui dont on se serviroit, si $\omega\omega$ étoit plus grande que $4mp$, par exemple sur le diametre conjugué de celui, qui est sur IL; & ce diametre conjugué est à son parametre, comme pzz est à aam. En effet de ce peu de mots l'on conclud, tout ce qu'on lit depuis la Regle 12. Car le diametre conjugué est, comme on l'enseigne dans les Traitez des Sections coniques, moyen proportionel entre le premier diametre, dont il est conjugué, & le parametre de ce premier diametre. Ainsi Regle 6. Lorsqu'il y a $+ mm$

& que la quantité $\omega\omega$ eſt plus grande que $4mp$; le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, & Regle 10. le diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$, que je nomme premier diametre : multipliez ce diametre premier par ſon parametre, le produit $\sqrt{\frac{\omega^4 mm}{pp} - \frac{8\omega\omega m^3}{p} + 16m^4}$ eſt le quarré de la moyenne proportionelle, dont la racine $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$ eſt la moyenne proportionelle, qui ſera le diametre conjugué cherché ; & ſa moitié $\sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$ ſera le demi-diametre MO. Maintenant ſi vous faites $pzz : aam :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre du diametre conjugué. Et voilà ce qu'apprend la Regle 13. qui ſuppoſe ωx dans l'équation. Le produit $\sqrt{\frac{\omega^4 mm}{pp} - \frac{8\omega\omega m^3}{p} + 16m^4}$ a deux racines $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, & $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm}$, je n'ai pas pris la ſeconde, parcequ'elle eſt imaginaire dans le cas, que l'on examine à preſent, & qui ſuppoſe que la quantité $\omega\omega$ n'eſt pas plus grande que $4mp$.

Pour avoir ce qui eſt contenu dans la Regle 14. qui ſuppoſe que la quantité ωx eſt nulle. Je prends Regle 8. le parametre $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, qui convient au premier diametre ; & Regle 10. je fais $pzz : aam :: \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme eſt le premier diametre. Je multiplie ce diametre par ſon parametre, le produit $\sqrt{16m^4}$ eſt le quarré de la moyenne proportionelle ; dont la racine $\sqrt{4mm} = 2m$ eſt la moyenne proportionelle, ou le diametre conjugué cherché ; & ſa moitié m eſt le demi-diametre MO. Maintenant ſi je fais $pzz : aam :: 2m : \frac{2aamm}{pzz}$; c'eſt le parametre du diametre conjugué.

La Regle 16. eſt évidente par la maniere dont les parametres viennent d'être trouvez.

Les Traitez des Sections coniques apprennent, que le diametre conjugué MOP eſt tiré par le centre M du premier diametre, qu'il eſt parallele aux appliquées CL de ce premier diametre, qui devoit être ſur IL; & que mutuellement les appliquées CP au diametre conjugué MOP ſont paralleles au premier diametre IL. Ce qui explique clairement les Regles 12. 15.

La ligne MO étant le demi-diametre cherché, & M ſon centre ; le point O ſera ſon ſommet, Regle 15.

De ſorte que l'on a reduit la ſeconde conſtruction que M. DESCARTES donne, à la premiere, avec le peu, que j'avois dit, que l'on pouvoit ajoûter à la Regle 6.

REGLE XVII.

J'Ajoûte comme une regle, 1° Fig. 99. ſoit $Nn = 2a$ le diametre, A le centre, $AN = An = a$ le demi-diametre, $CB = y$ une appliquée, $NB = x$ une abſciſſe, nB ligne compoſée du diametre nN & de l'abſciſſe Fig. 99.

FIG. 99. $NB = 2a + x$. Tous les lieux à l'hyperbole ſont fondez ſur cette proprieté ; comme le diametre eſt au parametre , ce qui s'exprime ainſi , comme d eſt à p : de même le rectangle $nB \times BN = 2ax + xx$ ſous la coupée & ſous la compoſée du diametre & de la coupée , eſt à yy quarré de l'appliquée correſpondante CB. D'où l'on forme l'équation $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$. Que ſi l'on avoit pris le centre A pour l'origine des x , & que AB fût x ; nB ſeroit $BA + An$, $x - a$; NB ſeroit $AB - AN$, $x - a$; le rectangle $nB \times BN$ ſeroit $xx - aa$, & l'équation auroit été $\frac{d}{p}yy = xx - aa$.

2° Dans ces deux équations , & dans celles qui ſont reduites à ces formules ; yy , ou vv quarré de l'inconnuë , en laquelle y a été changée , eſt toûjours le quarré de l'appliquée au diametre dont il faut ſe ſervir. Les connuës quelconques $\frac{d}{p}$ qui multiplient yy ou vv expriment toûjours le rapport du diametre au parametre. L'inconnuë x ſe prend ſur le diametre : dans l'équation $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$, l'inconnuë x commence au ſommet N, & la connuë $2a$ eſt la valeur du diametre : dans l'équation $\frac{d}{p}yy = xx - aa$, l'inconnuë x commence au centre A , & la connuë aa eſt le quarré exprimé negativement du demi-diametre $AN = a$.

3° De ſorte que , comme le diametre , dont il faut ſe ſervir pour conſtruire une équation , doit toûjours être la ligne droite , à laquelle ſe terminent ou y , ou v inconnuë en laquelle y a été changée : il ſuit , que ſi l'autre inconnuë quelconque x n'étoit pas ſur ce diametre , il faudroit lui ſubſtituer une ligne , pour le diametre , & faire enſuite les changemens dont il eſt parlé, Regle 10. Sect. 4. Liv. 1. & tels qu'on les verra , Exemp. 5. 6. 15.

4° Lorſque l'équation ſe reduit à $\frac{d}{p}yy = xx + aa$, où le quarré du demi-diametre eſt exprimé affirmativement ; le diametre $Nn = 2a$, que j'appelle premier , ne ſert plus , mais c'eſt ſon diametre conjugué , & l'on ſe ſert de la Regle 12. & des ſuivantes , qui ſont fondées ſur ces proprietez des hyperboles. 1. Le diametre conjugué paſſe par le centre du premier diametre , & il eſt parallele aux appliquées du premier diametre ; & mutuellement les appliquées du diametre conjugué ſont paralleles au premier diametre. 2. Le diametre premier , le diametre conjugué , le parametre du premier diametre ſont en proportion continuë ; comme auſſi le diametre conjugué , le diametre premier, le parametre du diametre conjugué. Enfin, s'il eſt beſoin , l'on ſubſtituera auſſi une ligne à la place de x , & l'on fera dans l'équation les changemens , que l'on verra , Ex. 7. 10. 11. 13.

On n'a pas cité ici à la fin de chaque Regle les Exemples, où elle eſt employée , ni les exceptions qu'elle y ſouffre ; une ſimple lecture fait aſſez appercevoir l'un & l'autre.

EXEMPLE I. $y = + \sqrt{mm + \frac{p}{m} xx}$. FIG. 98.

1. FIg. 98. Soient données de position les trois lignes AB, AD, EF, dont AB, EF sont paralleles, & AD les coupe à angles droits : & qu'il faille trouver plusieurs points, tels que C, duquel ayant tiré les droites CB, CD, CF perpendiculaires sur les données; ce qui est produit par la multiplication de CB & CF, moins le quarré de EA, soit égal au quarré de CD, plus ce qui est produit par la multiplication de EA & CB.

2. Nommons la donnée $EA, m = BF$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y; $CF = y + m$.

3. L'équation sera $yy = mm + xx$; dont les racines sont $y = \pm \sqrt{mm + xx}$, ou en faisant $p = m$, $y = \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m} xx}$.

4. La construction se fera ainsi. Parceque la quantité ω est nulle, le centre est au point A, Regle 2. le parametre est $\frac{2mm}{p}$, & faisant Regle 16. $m : p :: \frac{2mm}{p} : 2m$, ce dernier terme est le diametre, dont la moitié $m = AO = AE$, donne les deux sommets O, E du diametre determiné EO, qui est sur la ligne OD, & CD, est une de ses ordonnées, aussi-bien que cd parallele à CD, Regle 15. L'angle droit CDO est celui que les coupées & les ordonnées doivent faire. Ainsi l'on peut décrire les hyperboles opposées COc, CEc; & trouver tous leurs points C, c, en ne faisant qu'extraire la racine quarrée de $mm + \frac{p}{m} xx$, aprés avoir determiné la valeur de x. Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

L'on a $AD = CB$, y; $Ad = cB$, $-y$. L'hyperbole COc satisfait au Problême.

Le rectangle $ED \times DO$ est $yy - mm$. Or $p : m :: yy - mm : xx$. Regle 16. $myy - m^3 = pxx$; $y = \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m} xx}$, racine que l'on trouve sur les deux hyperboles opposées. Mais l'équation $yy - mm = xx$ ne se trouve que sur l'hyperbole ZOz; car sur l'hyperbole YEy on a $yy + 2my = mm + xx$.

La racine qui est positive sur ZOz est negative sur YEy.

5. Il faut remarquer que le centre A n'est pas sur IL, mais sur AB, Regle 1. le point M ou centre est en A, Regle 2. le parametre est $\frac{2mm}{p}$, le diametre $2m$, la raison de l'un à l'autre comme m à p, Regle 14. 16. le diametre est sur OD menée par le centre A, & parallele à CB; AO & AE sont demi-diametres, & les points O, E les sommets; CD parallele à AB est une ordonnée, Regle 12. 15. parceque $p = m$, l'hyperbole est équilatere, Art. 4. Regle 2.

EXEMPLE II. $y = \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 99. 1. FIg. 99. comme n. 1. Exemp. 1. excepté $\overline{CB \times CF} + \overline{EA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{EA \times CB}$.

2. Comme n. 2. Ex. 1.

3. Léquation est $yy + my + mm = xx + my$; $yy = -mm + xx$; dont les racines sont $y = \pm\sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$, en mettant $p = m$. Equation à l'hyperbole rapportée à ses diametres.

4. La construction sera telle. Le centre est en A, parceque la quantité ω est nulle, Regle 2. le parametre est $\sqrt{4mp}$, Regle 8. le diametre est dans AB, & CB une appliquée, Reg. 9. faisons $p : m :: 4mp : \sqrt{\frac{4m^3}{p}}$, ce quatriéme terme est le diametre déterminé, Regle 10. dont la moitié $AN = An$ est $\sqrt{\frac{m^3}{p}}$ demi-diametre; N, n les sommets des hyperboles opposées; le sommet N se prend en allant du centre A vers B, Regle 11. l'angle des coordonnées est CBA, ainsi l'on peut décrire les deux hyperboles opposées, comme on a dit Ex. 1. les deux hyperboles satisfont au Problême sur les arcs NX, nx.

Dém. Les rectangles $Nb \times nb$, $nB \times NB$ sont $xx - \frac{m^3}{p}$, d'où l'on forme l'équation $myy = pxx - m^3$, $y = \pm\sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Maintenant aux points C, c pris sur les arcs infinis NX, nx on a l'équation de n. 3. sur les arcs finis NZ, nz l'équation $yy = mm - xx$ au cercle. Sur les arcs ZY, zy l'équation $y + m = x$ à la ligne droite. Donc, &c.

5. Il faut remarquer que le centre A n'est pas sur IL, mais sur AB, Regle 1. 2. le parametre est $\sqrt{4mp}$, parceque la quantité ωx est nulle, Regle 8. le diametre est sur la ligne AB, & CB est une de ses appliquées, Regle 9. faisons $p : m : \sqrt{4mp} : \sqrt{\frac{4m^3}{p}}$, ce quatriéme terme est le diametre déterminé, Regle 10. dont les moitiez AN, An donnent les sommets N, n des deux hyperboles opposées; le point N se prend du côté, où le point B se trouve: mais on auroit pû aussi le mettre de l'autre côté, puisque les deux hyperboles satisfont également, Regle 11. l'hyperbole est équilatere, parceque $p = m$.

6. L'équation $yy = xx - mm$ est un lieu à l'hyperbole équilatere, qui peut se construire, comme dans les lieux Geometriques, en prenant $AN = An = m$; & par la nature de cette hyperbole, l'on a $nB \times BN = \overline{CB}^2$, $xx - mm = yy$.

EXEMPLE III. $y = -m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 100. 1. COmme n. 1. Exemple 1. excepté que l'on demande, que ce qui est produit par la multiplication de CB & CF, soit égal au quarré de CD, Figure 100.

2. Comme

2. Comme n. 2. Ex. 2. excepté $AE = 2m$; & $CF = y + 2m$.

3. L'équation est $yy + 2my = xx$; dont les deux racines sont $y = -m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$, en posant $p = m$. Equation à l'hyperbole.

4. Parcequ'il y a $-m$, au dessus de AB, coupez $BK = m$; par le point K menez l'infinie IK parallele à AB; IA est m. Parceque la quantité ω est nulle, le centre est en I, Reg. 2. parcequ'il y a $+mm$ & que la quantité ωx est nulle, le parametre est $\frac{2mm}{p}$; & faisant $m : p :: \frac{2mm}{p} : 2m$, qui est le diametre determiné EA, que l'on mene par le centre I parallele à CB; & CD parallele à AB est une appliquée; $IA = IE = m$, donnent les sommets A, E, Regle 12. 14. 15. l'angle CDI est celui que les coordonnées doivent faire, ainsi l'on peut décrire les deux hyperboles opposées CAc, cEc, comme Ex. 1. Elles sont le lieu cherché. L'on a $AD = BC$, y; $Ad = cB$, $-y$.

Dém. Les rectangles $ED \times DA$, $Ed \times Ad$ sont $yy + 2my$; d'où l'on forme l'équation $yy + 2my = \frac{p}{m}xx$, dont les racines sont $y = -m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$. Cette équation se trouve sur les deux hyperboles opposées. La racine vraye se prend sur l'hyperbole CAc. & la fausse sur l'hyperbole cEc.

5. L'on fera évanoüir le second terme de l'équation $yy + 2my = xx$, en prenant $y + m = v$, $y = v - m$; & la substitution donne $vv - mm = xx$, $vv = xx + mm$, à l'hyperbole équilatere. Les Traitez de lieux Geometriques apprennent que lorsque mm a $+$, étant joint au quarré de x, qui devroit être l'abscisse, alors x est l'appliquée, & v l'abscisse; ainsi le diametre doit être parallele à CB, y, qui fait partie de v; de plus ce diametre doit être conjugué de celui qui auroit servi, si l'on avoit trouvé $xx - mm$. Mais comme l'hyperbole est équilatere, le diametre conjugué est le même, que le premier diametre, $2m$. Il faut construire l'équation $xx = vv - mm$, en regardant x comme l'ordonnée, v comme l'abscisse qui part du centre.

EXEMPLE IV. $y = \pm\sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 101. Comme n. 1. Ex. 1. excepté que l'on demande $\overline{CD} \times \overline{CF} - \overline{CD} \times \overline{CB} = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2$. Fig. 101.

2. Comme n. 2. Ex. 1. excepté $AE = \omega$; $CF = y + \omega$.

3. L'équation sera $xy + \omega x - xy = yy - xx$; $yy = \omega x + xx$; dont les racines sont $y = \pm\sqrt{\omega x + xx}$, ou $y = \pm\sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$, en faisant $p = m$. L'équation est à l'hyperbole équilatere, qui se construira de cette sorte.

4. Le centre M est dans la ligne AB, & se trouve en prenant $AM = \frac{\omega m}{2p}$; Regle 1, parcequ'il y a $+\omega x$, le point M se prend du côté où B n'est

pas, Regle 4. parceque la quantité mm est nulle, le parametre est ω; le diametre est dans AM, Regle 9. si l'on fait $p : m :: \omega : \frac{\omega m}{p}$, ce quatrième terme est le diametre nA Regle 10. dont la moitié $MA = Mn$, $\frac{\omega m}{2p}$ est égale à AM, ainsi les sommets sont A, n; Regle 11. L'angle CBA des ordonnées avec les coupées est droit : l'on peut donc décrire les deux hyperboles opposées.

Dém. Les rectangles $nB \times AB$, $Ab \times bn$ sont $xx + \frac{\omega m x}{p}$ d'où l'on forme l'équation $yy = \omega x + \frac{pxx}{m}$ dont les racines sont $y = \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$.

Maintenant 1° sur les arcs infinis AZ de l'hyperbole CAc, yx de l'hyperbole cNc on a l'équation de n. 3. $yy = \omega x + xx$. 2° Sur les arcs infinis zX de l'hyperbole CAc, nY de l'hyperbole cNc on a l'équation $yy = -\omega x + xx$. 3° Sur l'arc fini Az on a l'équation $yy - 2xy = \omega x + xx$. 4° Sur l'arc fini ny on a l'équation $yy + 2xy = -\omega x + xx$.

EXEMPLE V. $y = \frac{n}{z} x \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$.

Fig. 102. 1. Fig. 102. comme n. 1. Ex. 1. excepté que l'on demande, que CD multipliée par CF, soit égal au quarré de CB.

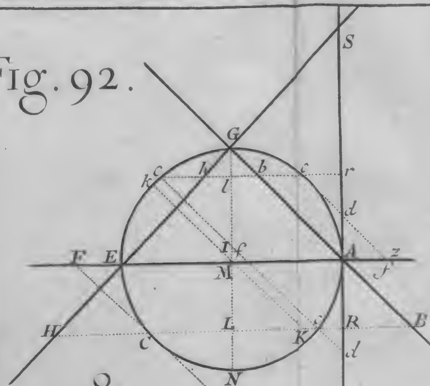
2. Comme n. 2. Ex. 1. excepté $AE = \omega$; $CF = y + \omega$.

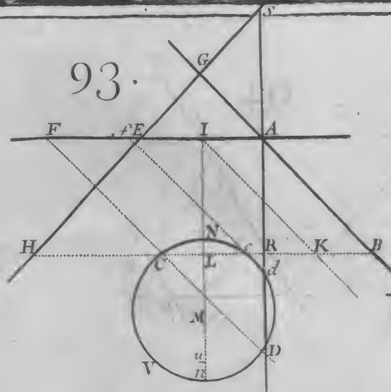
3. $CD \times CF = \overline{CB}^2$ s'exprime ainsi $xy + \omega x = yy$; dont les racines sont $y = \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\omega x + \frac{1}{4} xx}$; ou $y = \frac{n}{z} x \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$, en faisant $z = 1 = \omega$; $n \frac{1}{2}$; $p = 1$; $m = 4$. équation à l'hyperbole, & par rapport à ses diametres, & par rapport à ses asymptotes. On la construira par rapport à ses asymptotes. Art. 8. Exemp. 3. Ici on va la construire par rapport à ses diametres.

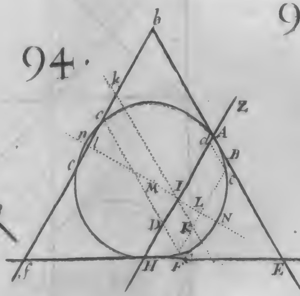
4. Pour la construction, parcequ'il y a $+ \frac{n}{z} x = \frac{1}{2} x$, je coupe $BL = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} x$; & je mets le point L entre B & C; par les points L, A je tire l'infinie AL. Dans le triangle ABL rectangle en B, $AL = x\sqrt{\frac{5}{4}}$, ou $\frac{ax}{z}$, en nommant a, $\sqrt{\frac{5}{4}}$. Ensuite sur AL je prends $AM = \frac{a\omega m}{2pz}$, & le point M est le centre des hyperboles, Regle 1. parcequ'il y a $+ \omega x$, le point M tombe du côté où L n'est pas, Regle 4 parceque mm est nul, le parametre est $\frac{\omega z}{a}$, Regle 7. le diametre est sur AM, & CL une de ses appliquées, Regle 9. je fais $pzz : aam :: \frac{\omega z}{a} : \frac{am\omega}{pz}$, qui est le diametre nA double de AM, Reg. 10. sa moitié donc $AM = Mn$ est le demi-diametre, les sommets sont A, n; le sommet A se prend du côté, où est L, par rapport au centre M, Reg. 11. l'angle CLA est celui des coordonnées. L'on peut donc décrire les deux hyperboles CAc, cnc. Elles satisfont au Problême.

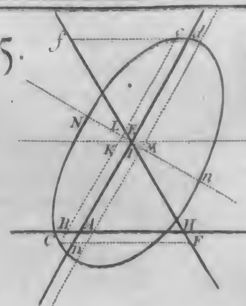
5. Dém. Le rectangle $nL \times AL$, est $\frac{aam}{pz}\frac{\omega x}{z} + \frac{aaxx}{zz}$ d'où par la nature de l'hyperbole on aura $CL = \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$.

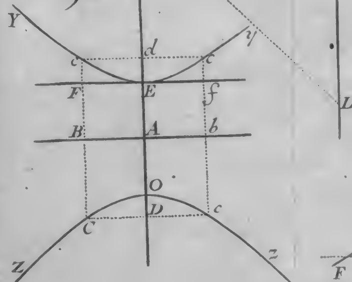
La racine negative se trouve sur les arcs ny, Az; la racine positive sur les arcs AC, nY & sur tous la même équation $xy + \omega x = yy$.

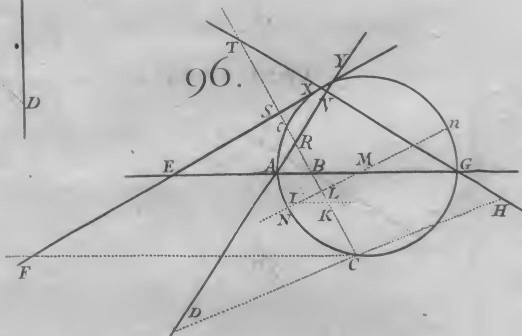


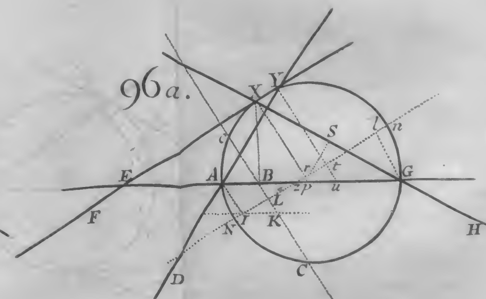


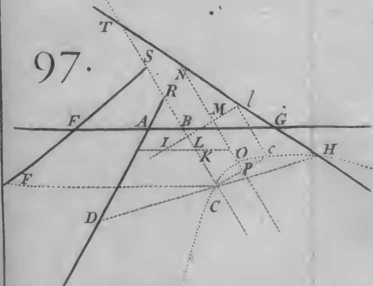


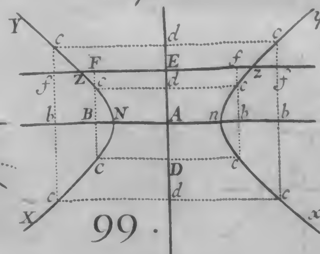


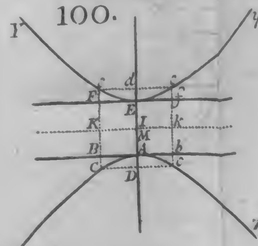


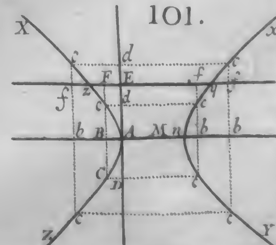












Gravé par Daudet



Le centre M eſt ſur la ligne FE, car dans les triangles équiangles MEA, ABL, AB, $x : BL$, $\frac{1}{2}x :: ME : EA$, $\omega = 1$. Donc $ME = 2$, & $AM = \sqrt{s} = \frac{a\omega m}{2pz}$.

Parceque $aam = s$ eſt plus grand que pzz, les hyperboles ne ſont pas équilateres.

6. Je fais évanoüir les ſeconds termes, en prenant, $y = v + \frac{1}{2}x$, & par la ſubſtitution l'on trouve $vv - \frac{1}{4}xx = \omega x$, $xx + \frac{\omega mx}{p} = \frac{m}{p}vv$; & prenant encore $x + \frac{\omega m}{2p} = ſ$, $x = ſ - \frac{\omega m}{2p}$, la ſubſtitution fournira encore $ſſ - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{m}{p}vv$. A preſent je conſidere que Reg. 17. dans cette ſorte de reduites vv eſt le quarré de l'appliquée, & que $CL = CB - BL$, $y - \frac{1}{2}x = v$ eſt cette appliquée, d'où il ſuit que AL, avec qui CL fait un angle, eſt le diametre. Enſuite je coupe $AM = \frac{\omega m}{2p} = 2$, & j'ai $MB = MA + AB$, $\frac{\omega m}{2p} + x = ſ$; mais dans cette ſorte de reduite $ſſ$ eſt le quarré de l'abſciſſe, & l'abſciſſe doit être ſur le diametre, & le diametre ne peut pas être ſur AB, puiſqu'il eſt ſur AL. C'eſt pourquoi pour AB, x je mets AL, $\frac{ax}{z}$. Et je change $x + \frac{\omega m}{2p} = ſ$, en $\frac{ax}{z} + \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{aſ}{x}$, ce qui ſe fait en multipliant tous les termes par $\frac{a}{z}$, afin de conſerver l'égalité. Après cela dans la reduite $\frac{m}{p}vv = ſſ - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, pour $ſſ$ je mets $\frac{aaſſ}{zz}$, & je multiplie tous les autres par $\frac{aa}{zz}$ pour que l'égalité ſubſiſte, & la derniere reduite eſt $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aaſſ}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$, qui me fait connoître 1° dans le terme $\frac{aam}{pzz}$, que le rapport du diametre au parametre eſt celui de aam à pzz, car la quantité connuë qui multiplie vv exprime cette raiſon. 2° Dans le terme $\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$, qui eſt le quarré du demi-diametre, que ce demi-diametre eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$; le diametre $\frac{a\omega m}{pz}$, en faiſant $aam : pzz :: \frac{a\omega m}{pz} : \frac{\omega z}{a}$, que ce quatriéme terme eſt le parametre. 3° Le ſecond membre $\frac{aaſſ}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$ eſt le rectangle ſous $\frac{aſ}{z} + \frac{a\omega m}{2pz}$ & $\frac{aſ}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$, étant le centre M l'origine des $\frac{aſ}{z}$, qui ſeront par conſequent les ML. Mais $\frac{aſ}{z} = \frac{ax}{z} + \frac{a\omega m}{2pz}$: donc étant $AL = \frac{ax}{z}$, AM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$, & le point M doit ſe prendre du côté où L n'eſt pas.

EXEMPLE VI. $y = -\frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

1. SOient Fig. 85. AB, AD, EF, GH, quatre lignes droites données de poſition, & qui font autour du point A huit angles de 45. degrez chacun. Il faut trouver un point c dans l'angle BAF, duquel ayant tiré d'autres lignes cB, cd, cF, cH, en ſorte que les angles cBA, cdA ſoient droits; les angles cFA, cHA de 45. degrez; & que ce qui eſt produit de la multiplication de cB par cd ſoit égal à ce qui eſt produit de la multiplication de cF par cH, moins le quarré d'une ligne donnée $z = 1 = m$. Fig. 85.

2. Nommez AB, $x = cd$; cB, y; $HB = BF = AB$, x; $cF = x - y$; $cH = y + x$.

FIG. 85. 3. L'équation sera $yy + xy = -mm + xx$, dont les racines sont $y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-mm + \frac{5}{4}xx}$, ou $y - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$; en faisant $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{5}{4}$, à l'hyperbole.

4. Je coupe $BL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$, je fais tomber le point B entre L & c; par les points L, A je tire l'infinie $AL = x\sqrt{\frac{5}{4}}$ ou $\frac{a}{z}x$. Après cela parcequ'il y a $-mm$, & que la quantité ωx est nulle, le parametre est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, Regle 8. & faisant $pzz :: aam :: \sqrt{\frac{4pmzz}{aa}} : \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$, l'on a le diametre Nn, Regle 10. dont les moitiez MN, Mn donnent les sommets N, n, le point N êtant pris du côté de L, Regle 11. car le diametre est sur AL, & cL est une de ses appliquées, Regle 9. & le centre est le point A, parceque la quantité ω est nulle, Regle 2. l'angle cLA est celui que les ordonnées doivent faire avec les appliquées.

5. Dém. Dans les deux hyperboles opposées, les rectangles $nL \times NL$, $NL \times ln$ sont $\frac{aaxx}{zz} - \frac{aam^3}{pzz}$ d'où par la nature de l'hyperbole on tire la valeur des appliquées cL, $cl = \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Au point c dans l'angle BAF on a la racine vraye, & l'équation de n. 3. dans l'angle HAP on a la racine fausse & l'équation $yy + xy = mm + xx$ differente de n. 3. dans l'angle fAb on a la racine fausse, mais l'équation de n. 3. dans l'angle DAh on a la racine vraye, mais l'équation $yy + xy = mm + xx$. Donc, &c. Parceque $pzz = aam$, l'hyperbole est équilatere.

6. L'on fait évanoüir les seconds termes de l'équation $yy + xy = xx - mm$.

Si l'on fait $v - \frac{1}{2}x = y$, la substitution donnera $vv = \frac{5}{4}xx - mm$, ou $vv = \frac{p}{m}xx - mm$. Je commence à construire cette premiere reduite, en prenant $BL = \frac{1}{2}x$; & j'ai $cL = cB + BL$, $y + \frac{1}{2}x = v$; qui doit être Reg. 17. l'appliquée de l'équation, & qui est terminée à la ligne LA que je tire par les points L, A, d'où je conclus, que AB, x ne pouvant pas être l'abscisse, il faut prendre à sa place, AL, $\frac{ax}{z}$ & la mettre dans l'équation $vv = \frac{p}{m}xx - mm$, c'est-à-dire, le quarré $\frac{aaxx}{zz}$ pour xx, & afin que l'égalité subsiste, multiplier tous les autres termes de la même équation par $\frac{aa}{zz}$, ce qui produit $\frac{aa}{zz}vv = \frac{aapxx}{mzz} - \frac{aamm}{zz}$, en multipliant par m & divisant par p, $\frac{aam}{pzz}vv = -\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aaxx}{zz}$.

Par cette équation je connois 1° que la raison du diametre au parametre est celle de aam à pzz. 2° Que le demi-diametre est $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$; parceque le terme $\frac{aam^3}{pzz}$ est ici le quarré de ce demi-diametre; ainsi le diametre est $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$; & faisant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme est le parametre. 3° Le second membre $\frac{aaxx}{zz} - \frac{aam^3}{pzz}$ est le rectangle sous $\frac{ax}{z} + \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, & $\frac{ax}{z} - \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, les $AL = \frac{ax}{z}$ ayant leur commencement au centre: donc le point A est ce centre. Et faisant AN

$= An = \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, vous avez les sommets N, n. Ce qui montre, comment Mr DESCARTES a trouvé les Regles, qu'il nous a données.

EXEMPLE VII. $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. SOient Fig. 103. données de position les quatre lignes AB, AD, EF, GH, qui font un parallelogramme. Il faut trouver au dedans de ce parallelogramme une infinité de points C, desquels ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH, sur les données; & dont CD, CH, soient paralleles à AB, EF; & CB, CF à AD, GH; ce qui est produit par la multiplication de CB, CF, soit égal à ce qui est produit par la multiplication de CD, CH. Fig. 103.

2. Nommez les connuës $AG = ER = DH = dh = m = \omega = 1$; $AR = GE = BF = bf$, $2m$; les inconnuës $AB = CD$, x; CB, y; $CF = 2m - y$; $CH = \omega - x$.

3. L'equation sera $yy - 2my = - \omega x + xx$, dont les racines sont $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + xx}$, ou $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, en faisant $p = m$. Equation à l'hyperbole.

4. Entre B & C coupez $BK = m$; prenez IK parallele à AB. Faites $IM = \frac{\omega m}{2p}$ pour avoir le centre M Regle 1. qui se prend de I vers K à cause de $- \omega x$, Regle 3. I est le milieu de AR; M est le milieu de Ii. Ensuite parcequ'il y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega = 1$ n'est pas plus grande que $4mp = 4$; l'on doit Regle 12. tirer par le centre M la ligne MOP parallele à CK, & CP parallele à KM; parceque ωx se trouve dans l'équation; vous faites $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$ qui est le demi-diametre déterminé Mn; & le diametre déterminé. nO est $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$; & le parametre sera $\sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^3}{p^3}}$, Regle 13. la raison du diametre au parametre est celle de p à m; car ces quatre termes sont proportionels, $p : m :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^3}{p^3}}$, Regle 16. le diametre déterminé est sur OP, les points O, n les sommets, CP une ordonnée, Regle 15. l'angle CPO est l'angle des coordonnées; ainsi l'on peut décrire les deux hyperboles, comme il a été dit, Ex. 1. n. 4. qui seront le lieu cherché.

5. Dém. 1° Pour l'hyperbole EOR, $\overline{CP}^2$ est $\frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{\omega mx}{p} + xx$; le rectangle $nP \times PO$, $yy - 2my + \frac{\omega\omega m}{4p}$, d'où par la nature de l'hyperbole on tire l'équation $yy - 2my + mm = mm - \omega x + \frac{p}{m}xx$; $y = m + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx} = CB$.

On peut encore trouver la valeur de y par cette Analogie $m : p :: \overline{CP}^2 : nP \times OP$. De plus 6. 2. Eucl. $nP \times OP + \overline{OM}^2 = \overline{MP}^2$; ce qui donne $\overline{MP}^2 = - \omega x + \frac{p}{m}xx + mm$, & $y = m + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$. Ces

Fig. 103. deux manieres de trouver la racine poſitive de y peuvent s'appliquer à tous les points de l'hyperbole EOR.

2° Pour l'hyperbole oppoſée AnG, la valeur de $\overline{cp}^2$ eſt la même que dans l'hyperbole EOR. D'un autre côté vous trouverez, ſoit que cb, y ait une valeur poſitive, ſoit qu'elle en ait une negative, Mp, $m - y$; $np = Mp - Mn$, $m - y - \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$; $Op = Mp + MO$; $m - y + \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$; & le rectangle $np \times pO$, $yy - 2my + \frac{\omega\omega m}{4p}$, comme dans l'hyperbole EOR. Tout le reſte eſt entierement le même, excepté $y = m - \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$. Il eſt aiſé de ſe convaincre ſoi-même que ſur tous les arcs des deux hyperboles oppoſées on a l'équation $yy - 2my = xx - \omega x$ de n. 3. toutes les lignes neceſſaires pour cela ſont tracées ſur la Fig. 103.

6. Vous ferez évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy - 2my = xx - \omega x$, ſi vous prenez $y = v + m$; la ſubſtitution donnera $vv - mm$; $\frac{m}{p}vv - \frac{m^3}{p} = xx - \frac{\omega mx}{p}$. Faites encore, $x = s + \frac{\omega m}{2p}$; la ſubſtitution donnera $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = ss + \frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$. Si la quantité $\omega\omega$ étoit plus grande que $4mp$, le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ ſeroit negatif, & alors l'équation $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ ſe conſtruiroit, comme $\frac{d}{p}yy = xx - aa$ formule ordinaire à l'hyperbole par ſes diametres; c'eſt-à-dire, que le diametre ſe prendroit ſur IK à laquelle ſe terminent les ck ordonnées $= v = cb - bk$, $y - m$. Mais ici $\omega\omega$, 1 n'eſt pas plus grande que $4mp$, 4; ainſi le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ eſt poſitif, & égal à $\frac{3}{4}$. Il faut donc Regle 17. conſtruire les hyperboles conjuguées à celles, dont on ſe ſeroit ſervi.

Car puiſque $\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$ eſt poſitif dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, je la change en celle-ci $\frac{p}{m}ss = vv - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$, en multipliant tout par p & en diviſant tout par m: & cette équation contient le terme connu $-mm + \frac{\omega\omega m}{4p} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ negatif, & elle peut ſe conſtruire ſous cette forme. De plus $\frac{p}{m}$, qui marque le rapport du diametre à ſon parametre, apprend que l'équation doit ſe conſtruire dans les hyperboles conjuguées, parceque $\frac{p}{m}$ exprime le rapport du diametre conjugué à ſon parametre. Ce qui ſe démontre ainſi.

Les Traitez des Sections coniques apprennent, que le diametre conjugué eſt moyen proportionel entre le premier diametre & le parametre de ce premier diametre: donc auſſi le moyen proportionel entre les termes, qui expriment la raiſon du diametre à ſon parametre, exprimera la raiſon de ce moyen proportionel avec les extrêmes. Comme le diametre étant 4, ſon parametre 16; le moyen proportionel 8 eſt le diametre conjugué. De même la raiſon du diametre au parametre étant de 1 à 4, le moyen propor-

tionel 2 exprimera la raiſon du diametre conjugué : car $4 : 8 :: 8 : 16$. & $1 : 2 : 2 : 4$. FIG. 103.

Cela étant ſuppoſé, dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, la raiſon du diametre premier à ſon parametre eſt comme m à p ; & ſuppoſant que la raiſon du diametre conjugué s'exprime par q ; on aura $m : q :: q : p = \frac{qq}{m}$. Mais auſſi le diametre conjugué eſt au premier diametre : comme le premier diametre eſt au parametre ſecond ; & leur raiſon s'exprimera par $q : m :: m : \frac{mm}{q}$ le parametre. Enfin le diametre conjugué q eſt à ſon parametre $\frac{mm}{q}$: comme $p = \frac{qq}{m}$ eſt à m. Donc le diametre conjugué eſt à ſon parametre comme p à m, ce qui eſt exprimé par $\frac{p}{m}$ dans la ſeconde équation $\frac{p}{m}ss = vv - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$.

Dès que vous avez apperçu, que l'équation doit ſe conſtruire avec les hyperboles conjuguées, vous commencez la conſtruction, qu'il vous faudra abandonner enſuite, parcequ'elle doit vous faire connoître le premier diametre, ſes appliquées & le centre. Ainſi ſur CB vous coupez d'abord $BK = m$, & par le point K vous menez l'infinie IK paralelle à AB, & vous avez $CK = CB - BK, = y - m = v$; & parceque $CK = v$ eſt l'appliquée de la reduite, vous connoiſſez que le premier diametre eſt ſur IK, à laquelle les ck, v ſont terminées. Enſuite vous prenez $IM = \frac{\omega m}{2p}$, afin d'avoir $MK = IM - IK$, $\frac{\omega m}{2p} - x$, ou $Mk = Ik - IM$, $x - \frac{\omega m}{2p} = s$, qui eſt la coupée de la reduite, & comme cette coupée a ſon origine au centre du diametre, vous concluez, que le centre eſt en M.

Maintenant on ſçait, que ce centre eſt commun aux hyperboles conjuguées, l'on ſçait, que le diametre conjugué doit paſſer par ce centre & être parallele aux ordonnées CK des premieres hyperboles ; ainſi vous menerez l'infinie MOP parallele à CK, & le diametre conjugué ſera ſur MOP ; l'on ſçait que les ordonnées à ce diametre conjugué doivent être paralleles au premier diametre IM, & qu'elles doivent partir des points C, c ; ainſi vous tirerez l'appliquée CP parallele à IM.

Après cela pour avoir les ſommets O, n des hyperboles conjuguées il reſte à connoître les demi-diametres MO, Mn. Ce que vous ferez ainſi, en ſuppoſant ce que nous avons déja dit, que le diametre conjugué eſt moyen proportionel entre le diametre premier & ſon parametre.

Dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, la quantité $\frac{m}{p}$ montre que la raiſon du diametre au parametre eſt comme m à p ; la quantité $\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$ eſt le quarré du demi-diametre, lequel eſt par conſequent $\sqrt{\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}}$, & le diametre $2\sqrt{\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}} = \sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}}$.

Faites $m : p :: \sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}} : \sqrt{4mp - \omega\omega}$, qui eſt ſon parametre.

Multipliez le diametre $\sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}}$ par ſon parametre $\sqrt{4mp - \omega\omega}$,

le produit eſt $\sqrt{16m^4 - \frac{4\omega\omega m^3}{p} + \frac{\omega^4 mm}{pp}}$ dont les racines $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm}$, $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, ſont moyennes proportionelles entre le premier diametre & ſon parametre ; mais étant $\omega\omega$ moindre que $4mp$ la racine $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm}$ ou $\sqrt{\frac{\omega\omega m - 4mmp}{p}}$ eſt imaginaire ; ainſi vous prendrez $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$ ou $\sqrt{\frac{4mmp - \omega\omega m}{p}}$ pour le diametre conjugué cherché, tel que le donne la Regle 13. De plus, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques, le parametre du diametre conjugué eſt auſſi troiſiéme proportionel de ce diametre & du premier diametre : ainſi quarrez le ſecond terme de la proportion qui eſt le premier diametre $\sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}}$, vous ferez $\sqrt{\frac{16m^6}{pp} - \frac{8\omega\omega m^5}{p^3} + \frac{\omega^4 m^4}{p^4}}$; diviſez ce quarré par le premier terme qui eſt le diametre conjugué $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, le quotient $\sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^3}{p^3}}$ ſera le parametre cherché du diametre conjugué ; ce parametre eſt le même que celui, que vous avez pris n. 4. en ſuivant la Regle 13. & la raiſon du diametre conjugué à ſon parametre eſt comme p à m, car ces quatre termes ſont proportionels $p : m :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^3}{p^3}}$. Après que vous aurez connu toutes ces choſes, vous décrirez les hyperboles oppoſées conjuguées EOR, AnG, & la démonſtration ſera celle de n. 4. Dans tout le n. 6. vous voyez comment M. DESCARTES a trouvé les Regles qu'il a données.

7. Vous pouvez connoître, que les deux hyperboles oppoſées EOR, AGn paſſent par les quatre points d'interſection A, R, E, G ; par la methode donnée, Art. 6. Ex. 13.

On demande ici $CB \times CF = CD \times CH$. Au point A, vous avez $cB = o$, $cd = o$; au point R, $CD = o$, $CF = o$; au point E, $cf = o$, $ch = o$; au point G, $cb = o$, $ch = o$: de ſorte qu'à ces quatre points $CB \times CF = CD \times CH$ ſe reduit a $o = o$.

EXEMPLE VIII. $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 104. Comme Ex. 1. n. 1. excepté $CB \times CD = \overline{CF}^2$.

FIG. 104. 2. Comme Ex. 1. n. 2.

3. L'équation ſera $xy = yy + 2my + mm$ dont les racines ſont $y = -m + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-mx + \frac{1}{4}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-\omega x + \frac{p}{m}xx}$. $z = m = \omega = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$.

4. Sur CB nous coupons $BK = m$, au deſſus de AB, & le point K tombera ſur la ligne EF, parceque $BK = AE$, m. Donc la ligne EF tiendra la place de la ligne IK, qu'il faudroit tirer par le point K parallele à AB.

Enſuite nous prenons $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}IK$; & nous mettons le point L entre K & C, $IL = x\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{ax}{z}$.

Main-

Maintenant nous faiſons $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & nous faiſons tomber le point M en allant de I vers L, parcequ'il y a $-\omega x$, Reg. 3. d'un autre côté, la quantité mm étant nulle, le parametre eſt $\frac{\omega z}{a}$, Regle 7. le diametre eſt dans IM, & CL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. Après cela faiſons $pzz : aam :: \frac{\omega z}{a} : \frac{a\omega m}{pz}$: ce quatriéme terme eſt IN le diametre, Regl. 10. & parceque ſa moitié $\frac{a\omega m}{2pz}$ eſt égal à IM, il ſuit que le point I eſt le ſommet d'une des hyperboles; nous prendrons MN égale auſſi $\frac{a\omega m}{2pz}$ de l'autre côté de M, c'eſt-à-dire, en allant vers L, pour avoir N ſommet de l'hyperbole cherchée, Reg. 11. Enfin nous connoiſſons l'angle CLN que les coupées & les ordonnées doivent faire : ainſi nous décrirons les deux hyperboles, qui ſont le lieu demandé.

Dém. Les rectangles $IL \times LN$, $Nl \times Il$ ſont $\frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz}$ d'où par la proprieté de l'hyperbole on trouve $CL = \sqrt{-\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

On voit à l'œil que la racine vraye ſe trouve ſur les arcs NC, EZ, & la fauſſe ſur les arcs Nc, Ez, & que ſur tous ces arcs on a l'équation de n. 3.

EXEMPLE IX. $y = \frac{bx + xx}{2c - b - 5x}$ ou $x = -m - \frac{n}{z}y + \sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m}yy}$.

1. FIg. 105. qui eſt celle de M. DESCARTES. Soient données de poſition les quatre lignes droites AB, AD, EF, GH, qui ſe coupent, comme on voit dans la Figure. Il faut trouver le point C, duquel on puiſſe tirer d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH ſur les données, de ſorte l'angle CBA ſoit de 120. degrez, l'angle CDA, de 60. l'angle CFE de 90. l'angle CHG de 30. ou, ce qui eſt le même, que ces quatre lignes ſoient ſur une ſeule CB prolongée. Fig. 105.

Il faut encore que ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CH, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD, CF.

2. Soit EA, $b = 3$; AG, $c = 5$; CB, y; AB, x; CD, $y + x$; $BF = \frac{b + x}{2}$ à cauſe du ſinus de 90. degrez double du ſinus de 30. $CF = \frac{2y + b + x}{2}$, $CB + BH = CB + BG = y + c - x$.

3. L'équation ſera $y = \frac{bx + xx}{2c - b - 5x}$ à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, & par rapport à ſes aſymptotes, Art. 4. Reg. 2.

On conſtruira cette équation par rapport à ſes aſymptotes, Art. 8. Ex. 5.

A preſent on va la conſtruire par rapport à ſes diametres, en ſuivant les Regles de M. DESCARTES, & operant à l'égard de x, comme il ordonne d'operer à l'égard de y. Car ici l'on détermine y & l'on cherche x.

Les termes ſe rangeront ainſi $xx + bx + 5yx = 2cy - by$ dont la racine eſt $x = -m - \frac{n}{z}y + \sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m}yy}$ en faiſant $z = 1$; $n = \frac{5}{2}$; $m = \frac{3}{2}$, $\omega = \frac{3}{2}b + 2c = \frac{9}{2} + 10 = \frac{29}{2}$, $p = \frac{75}{8}$.

Ff

FIG. 105. 4. Parcequ'il y a $-m$, ſur BA, l'on ajoûte $AI = m$ au deſſus de A; par le point I l'on mene KI parallele & égale à CB, y; par les points C, K l'on mene encore l'infinie CK parallele à AB; ſur CK l'on prend $KL = \frac{n}{z}y = \frac{5}{2}y = \frac{5}{2}CB$, & l'on fait que le point K ſoit entre L & C, parcequ'il y a $-\frac{n}{z}y$, Art. 2. par les points L, I, l'on tire l'infinie IL. Pour connoître IL, abbaiſſez IV perpendiculaire ſur LK, $VK = \frac{1}{2}IK$ à cauſe de l'angle en I de 30. degrez; donc $\overline{IV}^2 = \frac{3}{4}yy$. $LV = 2y$; donc $IL = y\sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{a}{z}y$ en faiſant $\sqrt{\frac{19}{4}} = a$.

A preſent l'on prend $IM = \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{29}{50}\sqrt{19}$. pour avoir le centre M, Regle 1. le point M tombe ſur la partie de la ligne IL, où le point L n'eſt pas, à cauſe qu'il y a $+\omega x$, Reg. 4. & parceque $\omega\omega = \frac{841}{4}$ eſt plus grande que $4mp = \frac{225}{4}$, y ayant $+mm$; le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, Reg. 6. le diametre eſt dans la ligne IM, & CL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. la raiſon du parametre au diametre eſt celle de pzz, à aam, Regle 10. ainſi ce diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$; dont la moitié $MN = \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam}{pzz}}$ étant pris du côté où eſt L, donnera le ſommet N d'une hyperbole; & $Mn = MN$ donnera tout le diametre Nn, Reg. 11. L'on pourra donc décrire l'hyperbole CN, qui reſout le Problême.

Dém. Le rectangle $nL \times LN$ eſt $\frac{aa\omega my}{pzz} + \frac{aayy}{zz} + \frac{aam^3}{pzz}$, d'où par la proprieté de l'hyperbole on tire la valeur de l'appliquée CL, qui ſera $\sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m}yy}$.

Maintenant menez AZ parallele à CB, vous aurez $CZ = AB$, x, $KZ = AI$, m, & CZ, $x = \sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m}yy} - \frac{n}{z}y - m$, racine de n. 3. Au point C, où le calcul a été fait. Ainſi l'hyperbole NC eſt le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer, que quoique M. DESCARTES n'ait pas parlé du cas, où y n'a point de ſigne radical dans ſa valeur, & quoique les Regles ſemblent n'être que pour la conſtruction de y; cependant elles ont ſervi ici à conſtruire x avec la même facilité & la même juſteſſe; car on a conſtruit $-m - \frac{n}{z}y$ de la même maniere ſur AB, ou ſa parallele CK, qu'on auroit fait ſur CB, Art. 2. L'on a trouvé le centre M ſur IL en coupant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. Le point M a été mis du côté où L n'eſt pas, à cauſe qu'il y a $+\omega x$, Regle 4. Le parametre a été $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$ & que la quantité $\omega\omega$ eſt plus grande que $4mp$, Regle 6. le diametre s'eſt trouvé dans IL & CL a été une de ſes appliquées, Regle 9. La raiſon du parametre au diametre a été priſe comme pzz à aam, Reg. 10. La moitié MN a été priſe du côté, où eſt L & a donné N le ſommet, Regle 11. Enfin parceque $aam = \frac{57}{8}$ n'eſt pas égal à $pzz = \frac{75}{8}$. L'hyperbole n'eſt pas équilatere.

6. On peut auſſi reuſſir par l'évanoüiſſement des ſeconds termes. Repre-

nons l'équation n. 3. $xx + bx + 5yx = 2cy - by$, ou $xx + 2mx + \frac{2nyx}{z} = 2cy - by$.

Soit 1° $x = s - m - \frac{ny}{z}$; la ſubſtitution donne $ss - mm - \frac{2mny}{z} - \frac{nnyy}{zz} = 2cy - by$, $ss - mm = \frac{nnyy}{zz} + \frac{2mny}{z} + 2cy - by$; & faiſant $\frac{nn}{zz} = \frac{p}{m}$, $\frac{2mn}{z} + 2c - b = \omega$, $ss - mm = \frac{p}{m}yy + \omega y$, $yy + \frac{\omega my}{p} = \frac{mss}{p} - \frac{m^3}{p}$.

Soit 2° $y + \frac{\omega m}{2p} = v$, $y = v - \frac{\omega m}{2p}$; par la ſubſtitution vous trouverez $vv - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{mss}{p} - \frac{m^3}{p}$, $\frac{m}{p}ss = vv - \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}$. Et parceque 3° $-\frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}$ eſt Regle 17. le quarré du demi-diametre déterminé, mis negativement, il ſuit que ce demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p}}$ quantité réelle, étant $\omega\omega > 4mp$. 4° Je commence la conſtruction, & je trouve $CL = CZ + ZK + KL = x + m + \frac{ny}{z} = s$ ordonnée de l'équation; d'où je conclus que le diametre eſt ſur IL & non pas ſur AZ, avec qui les CZ, x font un angle. Je tranſporte AZ, y, ou IK ſur IL, comme n.4. & je trouve $IL = \frac{ay}{z}$. Ainſi l'équation de n. 2° $y = v - \frac{\omega m}{2p}$ ſe change en $\frac{ay}{z} = \frac{av}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$, & ſubſtituant $\frac{av}{z}$ à la place de v dans $\frac{m}{p}ss = vv - \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}$, & multipliant tout par $\frac{aa}{zz}$ pour conſerver l'égalité; cette équation devient $\frac{aam}{pzz}ss = \frac{aavv}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}$. Pour la conſtruire, je remarque que le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}}$, le diametre $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$; & parceque $\frac{aam}{pzz}$ donne la proportion du diametre au parametre, ce parametre ſera $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. 5° Le ſecond membre de l'équation, $\frac{aavv}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}$ eſt le rectangle de $\frac{av}{z} + \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}} \times \frac{av}{z} - \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}}$, & $\frac{av}{z} =$ n. 4. $\frac{ay}{z} + \frac{a\omega m}{2pz}$ eſt la ligne priſe depuis L juſqu'au centre M de l'hyperbole : ainſi $IL = \frac{ay}{z}$, il ſuit que IM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$; & il faut prendre IM du côté, où L n'eſt pas, afin que ML, $\frac{av}{z}$ ſoit $IM + IL$, $\frac{a\omega m}{2pz} + \frac{ay}{z}$. 6° Le centre étant trouvé, vous prenez MN, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}} = Mn$, pour avoir les ſommets N, n.

EXEMPLE X. $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 106. Soient données de poſition les lignes AB, EF, GH paral- Fig.
leles entr'elles, & AD qui les coupe en faiſant des angles de 30. degrez. 106.
Il faut trouver le point C, duquel on mene ſur les données les lignes CB, CD, CF, CH, de ſorte que les angles CBT, CFS, CHG ſoient de 60. degrez chacun, ou que les trois lignes CB, CF, CH n'en compoſent qu'une; & que l'angle CDA ſoit de 30. degrez, ou que CD ſoit parallele à AB. De plus il faut que le produit de CB par CH ſoit au produit de CD par CF, comme 1 à 4.

2. Soient BF, 3; BH, 5; AB, x; CB, y; CF; $y + 3$; CH, $y +$

Fig. 106. 5. BR eſt $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}AB$, & $RC = \frac{1}{2}CD = 2y + x$.

3. L'équation ſera $yy + 7y - \frac{1}{2}xy = \frac{3}{2}x$ à l'hyperbole par rapport à ſes diametres & à ſes aſymptotes ; dont les racines ſont $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4}x \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, ſi l'on poſe $\frac{7}{2} = m$, $z = 1$, $\frac{1}{4} = n = \omega$, $p = \frac{7}{32}$. L'équation à l'hyperbole par rapport à ſes diametres ſe conſtruira ainſi.

4. Parcequ'il y a $-m$, il faut prendre $BK = m$ au deſſus de CB ; & par le point K mener KI parallele & égale à AB, x ; enſuite couper $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{4}x$; & faire tomber le point L entre K & C, parcequ'il y a $+ \frac{n}{z}x$, Art. 2. * Pour déterminer la valeur de IL, il faut obſerver que le côté KI eſt quadruple de LK, $\frac{1}{4}x$, & que par conſequent par le Theorême de la Trigonometrie, il faut que le ſinus de l'angle oppoſé à IK ſoit quadruple du ſinus de l'angle oppoſé à KL. Or étant l'angle IKL égal à ABC de 120. degrez à cauſe des paralleles AB, IK ; les deux angles KLI, KIL ſont 60. degrez entr'eux. C'eſt pourquoi l'angle KLI eſt de 49° 6', dont le ſinus eſt 75585, & l'angle KIL de 10. degrez 54', dont le ſinus eſt 18909 ; ce qui manque, afin que le premier ſinus ſoit quadruple du ſecond, pouvant ſe negliger. Le Theorême de Trigonometrie me fournit donc cette Analogie. Comme 75585 ſinus de l'angle KLI eſt à 86602 ſinus de l'angle IKL de 120. degrez ou de IKH de 60. degrez complement de IKL à deux droits : de même IK, x eſt à IL $\frac{86602}{75585}x = \frac{ax}{z}$, en faiſant $\frac{86602}{75585} = a$, étant $z = 1$.

* La Trigonometrie donne la methode de trouver autrement le côté IL, étant connus les côtés IK, KL & l'angle compris IKL.

Maintenant il faut prendre $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & faire tomber le point M du côté où eſt L, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 3. mais parcequ'il y a $+mm$ & ωx, & que la quantité $\omega\omega = \frac{1}{16}$ eſt moindre que $4mp = \frac{49}{16}$, par le centre M il faut tirer MOP parallele à LC, & CP parallele à LM, Regle 12, prendre $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}} = Mn$; le parametre égal à $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$, Regle 13. le diametre eſt dans la ligne OP, les ſommets O, n, Reg. 15. On peut décrire l'hyperbole COc, elle eſt le lieu cherché.

Dém. $\overline{CP}^2 = \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$; $MP = y + m - \frac{n}{z}x$; le rectangle $nP \times OP$, $yy + 2my - \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$. $pzz : aam :: nP \times OP : \overline{CP}^2$; donc $nP \times PO = \frac{pzz}{aam} \times \overline{CP}^2$; donc $yy + 2my - \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = mm - \omega x + \frac{p}{m}xx$, dont la racine eſt $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$. Dans tous les autres points de l'hyperbole OC on aura une des valeurs de y & l'équation de n. 3.

6. Reprenez l'équation $yy + 7y - \frac{1}{2}xy = \frac{3}{2}x$, de n. 3. Faites $y + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x = v$, $v - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}x = y$, ſubſtituez pour y & yy leur valeur, la premiere reduite ſera $vv - \frac{49}{4} + \frac{7}{4}x - \frac{1}{16}xx = \frac{3}{2}x$; $\frac{1}{16}xx - \frac{1}{4}x =$

$vv - \frac{49}{4}$, ou $\frac{p}{m}xx - \omega x = vv - mm$, en faiſant $\frac{1}{4} = \omega$, $\frac{7}{2} = m$, $\frac{7}{32} = p$. Maintenant multipliez par m, diviſez par p, l'équation deviendra $xx - \frac{\omega m x}{p} = \frac{m}{p}vv - \frac{m^3}{p}$. Il faut encore prendre $x - \frac{\omega m}{2p} = s$, $s + \frac{\omega m}{2p} = x$; & la ſubſtitution donnera $ss - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{m}{p}vv - \frac{m^3}{p}$; $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = ss + \frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$. Si la quantité $\omega\omega$ étoit plus grande que $4mp$, le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ ſeroit negatif, parceque dans ce terme, $\frac{mm}{4pp}$ multiplie $\omega\omega$ & $4mp$; & l'équation ſe conſtruiroit comme à l'ordinaire; c'eſt-à-dire, que le diametre ſeroit ſur IK, à laquelle ſe terminent les appliquées CL, $v = y + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x = CB + BK - KL$. Vous voyez la raiſon de la Regle 6. Mais ici $\omega\omega = \frac{1}{16}$ n'eſt pas plus grand que $4mp = \frac{49}{16}$, ainſi le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ eſt poſitif, & il faut Regle 17. conſtruire les hyperboles conjuguées à celles, dont on ſe ſeroit ſervi, ſi $\omega\omega$ avoit été plus grand que $4mp$. Fig. 106.

Avant que de changer l'équation $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, on s'en ſert pour découvrir le centre & le premier diametre. L'on coupe donc $BK = \frac{7}{2} = m$, l'on mene $IK = x$ parallele à AB, l'on prend $KL = \frac{1}{4}x$; l'on tire IL.

L'on a donc $CL = CB + BK - KL$, $y + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x = v$, la ligne CL, qui ſeroit l'appliquée; ſi l'on conſtruiſoit $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$. découvre que le diametre premier ſeroit ſur IL à laquelle cette appliquée ſe termine. Enſuite coupez $Im = \frac{\omega m}{2p}$, par le point m menez l'infinie mM parallele à CL, la ligne MK eſt $IK - Im$, $x - \frac{\omega m}{2p} = s$ qui eſt la ligne laquelle doit ſe prendre ſur le diametre depuis le centre juſqu'à l'appliquée: mais le diametre n'eſt pas ſur IK, puiſqu'il eſt ſur IL; le centre M ſe trouvera donc en faiſant IK, $x : IL$, $\frac{ax}{z} :: Im$, $\frac{\omega m}{2p} : IM$, $\frac{a\omega m}{2pz}$.

Après avoir trouvé le centre M, l'on remarquera que le diametre conjugué dont on a beſoin eſt ſur MO, qui paſſe par le centre, & eſt parallele à CL appliquée au premier diametre IL; & une de ſes appliquées ſera CP tirée parallele à ce premier diametre IL.

D'ailleurs, ſi l'on ſe ſervoit de l'équation $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, parceque ſon diametre ſeroit ſur IL, il faudroit ſubſtituer ML à la place de mK, c'eſt à-dire, $IL - IM$, $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$ à la place de $IK - Im$, $x - \frac{\omega m}{2p}$; & pour s, qui eſt $x - \frac{\omega m}{2p}$, mettre $\frac{as}{z}$, & enfin pour ss, écrire $\frac{aass}{zz}$, Mais l'égalité ne ſubſiſtera pas, à moins que l'on ne multiplie tous les termes par $\frac{aa}{zz}$: ainſi $\frac{m}{p}vv = ss + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$ ſe reduit à $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aass}{zz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$. Et la raiſon du premier diametre à ſon parametre eſt celle de aam à pzz.

Après cela l'on apprend dans les Traitez des Sections coniques, que le diametre conjugué eſt moyen proportionel entre le premier diametre & le parametre de ce premier diametre. Le premier diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - }$

$\frac{4aam^3}{pzz}$, ſon parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, multipliez-les l'un par l'autre, le produit eſt $\sqrt{\frac{\omega^4 mm}{pp} - \frac{8\omega\omega m^3}{p} + 16m^4}$ qui eſt égal au quarré de la moyenne proportionelle, ainſi ſa racine $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$ ſera cette moyenne; & le diametre conjugué qu'on cherche. Il ne faut pas prendre l'autre racine $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm} = \sqrt{\frac{\omega\omega m - 4mmp}{p}}$, parcequ'elle eſt imaginaire, étant $\omega\omega$ moindre que $4mp$. De plus, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques, le parametre de ce diametre conjugué eſt troiſiéme proportionel au diametre conjugué $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, & au premier diametre $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$: il faut donc quarrer ce premier diametre pour avoir $\sqrt{\frac{a^4\omega^4 m^4}{p^4 z^4} - \frac{8a^4\omega\omega m^5}{p^3 z^4} + \frac{16a^4 m^6}{ppz^4}}$; diviſer ce quarré par le diametre conjugué $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, ou $\sqrt{-\frac{\omega\omega m}{p} + 4mm}$, le quotient $\sqrt{\frac{4a^4 m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3 z^4}}$ eſt le parametre du diametre conjugué. Et la raiſon du diametre conjugué à ſon parametre eſt celle de pzz à aam, car ces quatre termes ſont proportionels $pzz : aam :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4a^4 m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3 z^4}}$. Après cela ſi le diametre conjugué eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, ſa moitié MO doit être $\frac{1}{2}\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$.

Vous connoîtrez ces mêmes choſes en changeant l'équation $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aa\int\int}{zz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$, en celle-ci $\frac{pzz}{aam}\int\int = vv - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$; & ce changement doit ſe faire, puiſque $\int$ devient l'ordonnée CP.

Or dans cette nouvelle équation $\frac{pzz}{aam}$ marque la raiſon du diametre au parametre; $-mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$ eſt le quarré du demi-diametre mis negativement; ce demi diametre eſt donc $\sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}} = MO$; & le diametre eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$. Et ſi vous faites $pzz : aam :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4a^4 m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3 z^4}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre du diametre nO. Vous voyez comment M. DESCARTES a trouvé les Regles 12. 13. 15. 16.

EXEMPLE XI. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 107. 1. FIg. 107. comme Ex. 10. n. 1. excepté $CB \times CH = \frac{CD \times CF}{4} + \frac{1}{8}AB$.

2. Comme Ex. 10. n. 2.

3. En ſuivant Exemple 10. n. 3. la premiere équation eſt $yy + 5y = \frac{1}{2}yy + \frac{1}{4}xy + \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x$, & la derniere $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{16}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$; étant $z = 1$, $m = \frac{7}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{7}{32}$.

4. Comme Ex. 10. n. 4. vous conſtruirez $-m + \frac{n}{z}x$, & vous trouverez $IL = \frac{ax}{z}$.

A present parceque la quantité ω est nulle, le centre M est en I, Reg. 2. parcequ'il y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega$ est nulle; par le centre M menez MO parallele à CL, & CP parallele à LM, Regle 12. le demi-diametre MO est $m = Mn$; le diametre On est $2m$, le parametre $\frac{2aamm}{pzz}$, Regle 14. le diametre est sur OP, & CP une de ses appliquées Regle 15. la raison du diametre au parametre est celle de pzz à aam, Regle 16. L'on peut décrire l'hyperbole OC, qui est le lieu cherché. Fig. 107.

Dém. $\overline{CP}^2 = \frac{aaxx}{zz}$; $nP \times PO = yy + 2my - \frac{2nxy}{z} - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz}$. Or $pzz : aam :: nP \times OP : \overline{CP}^2$. $nP \times PO = \frac{pzz}{aam} \times \overline{CP}^2$. $yy + 2my - 2nxy - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = \frac{p}{m}xx$; dont la racine, après avoir mis mm de chaque côté, sera $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

5. L'équation de n. 3. étant reduite à $yy + 7y - \frac{1}{2}xy = \frac{7}{4}x$. Faites $v = y + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x$, la substitution donne $vv = \frac{49}{4} + \frac{1}{16}xx$; $vv = mm + \frac{p}{m}xx$; $\frac{m}{p}vv = \frac{m^3}{p} + xx$. $v = CL$ est l'ordonnée, qui étant terminée à IL, fait voir Reg 17. que IL est le diametre, & que pour IK, x, il faut mettre IL $\frac{ax}{z}$, & $\frac{aaxx}{zz}$ pour xx, & afin que l'égalité demeure, multiplier tout par $\frac{aa}{zz}$; ce qui donne $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aam^3}{pzz} + \frac{aaxx}{zz}$.

Mais parceque $\frac{aam^3}{pzz}$ est positif, la construction doit se faire avec les hyperboles conjuguées. Le centre commun des hyperboles est I à cause que $\frac{aaxx}{zz}$ est le quarré de $\frac{ax}{z} = IL$. Ainsi le diametre conjugué sera sur IO parallele à l'appliquée CL; & CP parallele à IL sera une appliquée au diametre IO. Puisque le diametre conjugué est moyen proportionel entre le premier diametre & le parametre de ce premier diametre; & que $\frac{aam^3}{pzz}$ étant le quarré de la moitié du premier diametre, cette moitié sera $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, & le diametre $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$, dont la raison à son parametre est celle de aam à pzz. C'est pourquoi si l'on fait $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme est le parametre du premier diametre. Maintenant que l'on multiplie $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$ par $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, le produit $\sqrt{16m^4}$ est le quarré du diametre conjugué, qui sera $\sqrt{4mm} = 2m$. De plus le parametre du diametre conjugué est troisiéme proportionel du diametre conjugué & du premier diametre: multipliez donc le premier diametre $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$ par lui-même, son quarré est $\frac{4aam^3}{pzz}$, divisez-le par le diametre conjugué $2m$, le quotient $\frac{2amm}{pzz}$ est le parametre du diametre conjugué. Or la raison de $2m$ à $\frac{2aamm}{pzz}$ est comme pzz à aam. Ces choses expliquent les Regles 12. 14. 15. 16. Après cela l'on construira & l'on démontrera comme n. 4.

EXEMPLE XII. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{-ff - \omega x + \frac{p}{f}xx}$.

1. Fig. 108. comme Ex. 10. n. 1. excepté que l'on demande que $CB \times CH = \frac{CD \times CF}{4} - 7$. Fig. 108.

2. Comme Exemple 10. n. 2.

3. Comme Ex. 10. n. 3. excepté que la premiere équation eſt $yy + 5y = \frac{1}{2}yy + \frac{1}{4}xy + \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}x - 7$, la derniere $yy + 7y - \frac{1}{2}xy + \frac{49}{4} - \frac{7}{4}x + \frac{1}{16}xx = \frac{49}{4} - \frac{7}{4}x + \frac{1}{16}xx + \frac{3}{2}x - 14 = -\frac{7}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xx$, dont la racine eſt $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{-\frac{7}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{-ss - \omega x + \frac{p}{s}xx}$, en faiſant $\frac{7}{2} = m$, $\frac{1}{4} = n = \omega$, $1 = z$, $\sqrt{\frac{7}{4}} = s$, $\sqrt{\frac{7}{1024}} = p$.

4. L'on conſtruira $-m + \frac{n}{z}x$, & l'on trouvera $IL = \frac{ax}{z}$ comme Ex. 10. n. 4. L'on prend $IM = \frac{a\omega s}{2pz}$, Reg. 1. & l'on met le centre M ſur IL, en allant de I vers le côté où L eſt, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 3. parcequ'il y a $-ss$, le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4spzz}{aa}}$, Regle 5. le diametre eſt ſur IL, & CL une de ſes appliquées, Regle 9. l'on fait $pzz : aas :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4spzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega ss}{ppzz} + \frac{4aas^3}{pzz}}$, & ce quatriéme terme eſt le diametre, Regle 10. dont la moitié $\sqrt{\frac{aa\omega\omega ss}{4ppzz} + \frac{aas^3}{pzz}} = MN = Mn$, & l'on fait tomber le ſommet N du côté, où eſt L, Regle 11. l'angle des coupées avec les ordonnées eſt CLN. Toutes ces choſes étant connuës, on peut décrire l'hyperbole NC, qui ſatisfait au Problême.

Dém. Le rectangle $NL \times nL = \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega sx}{pzz} - \frac{aas^3}{pz}$. Or $aas : pzz :: NL \times nL : \overline{CL}^2$, d'où l'on forme $CL = \sqrt{-ss - \omega x + \frac{p}{s}xx}$ & CB, $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{-ss - \omega x + \frac{p}{s}xx}$, Ce qu'il falloit démontrer.

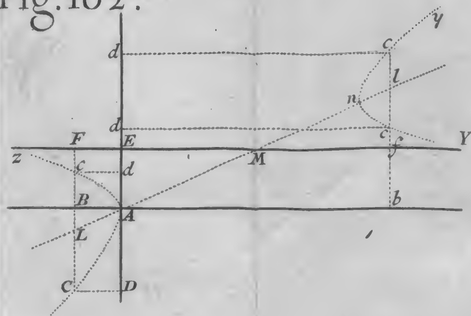
EXEMPLE XIII. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{ss - \omega x + \frac{p}{s}xx}$.

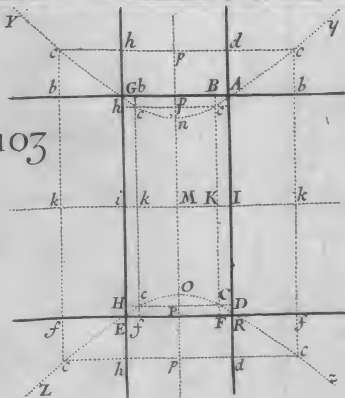
1. SOient Fig. 109. données de poſition les quatre lignes AB, AD, EF, GH, dont les trois AB, EF, GH ſont paralleles, & à diſtances égales entr'elles ; & AD les coupe à angles droits. Il faut trouver un point C, d'où ayant tiré les lignes, CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données CB multipliée par CD faſſe un produit égal au produit de CF multipliée par CH. Fig. 109.

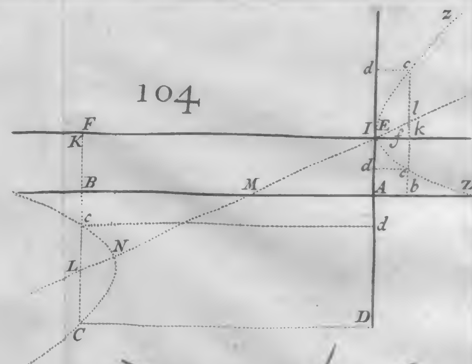
2. Soit $AE = 1$; $AG = 2$; $AB = CD$, x; CF, $y + 1$; CH, $y + 2$.

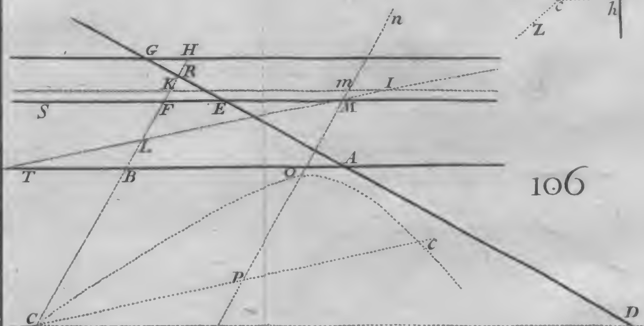
3. L'équation ſera $xy = yy + 3y + 2$, dont les racines ſont $y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{ss - \omega x + \frac{p}{s}xx}$, en faiſant $\frac{3}{2} = m = \omega$; $z = 1$; $\frac{1}{2} = n = s$; $p = \frac{1}{8}$. à l'hyperbole par rapport aux diametres & aux aſymptotes.

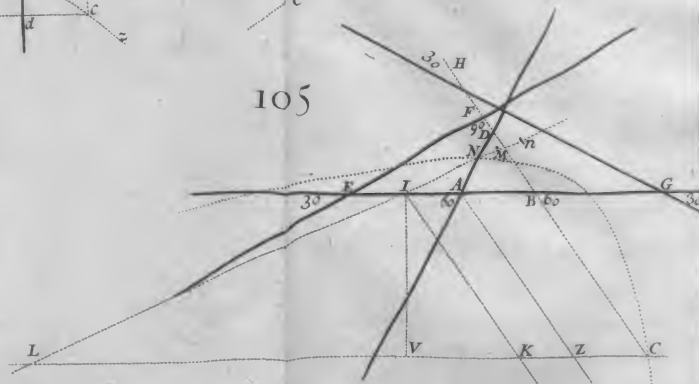
4. Parcequ'il y a $-m$, ſur CB on prendra $BK = m$, par le point K l'on menera KI égale & parallele à AB, x; on coupera $KL = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}x$, & par les points I, L on tirera l'infinie $IL = x\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{ax}{z}$, en mettant $a = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Mais les Il priſes de l'autre côté de I ſont $-\frac{ax}{z}$; ſur IL on prendra $IM = \frac{a\omega s}{2pz}$, Regle 1. & le centre M tombera du côté, où eſt L, parcequ'il

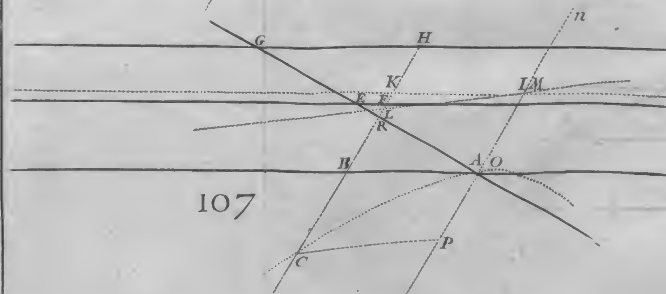


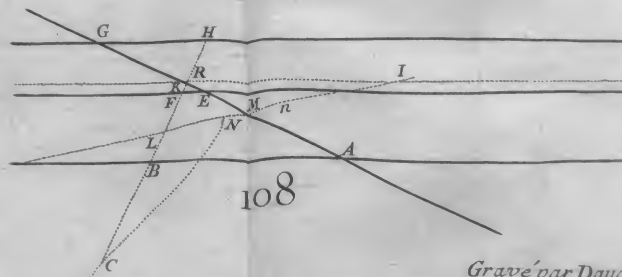












Gravé par Daudet.

qu'il y a $-\omega x$, Regle 3. parcequ'il y a $+ss$, & que $\omega\omega = \frac{9}{4}$ est plus grand que $4ps = \frac{1}{4}$, le parametre est $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4pszz}{aa}}$, Regle 6. le diametre est dans IL, & CL est une de ses appliquées, Regle 9. le parametre est au diametre, comme pzz à aas, Regle 10. sa moitié MN se prend du côté où est L, Regle 11. l'on prend $Mn = MN$ $\sqrt{\frac{aa\omega\omega ss}{4ppzz} - \frac{aas^3}{pzz}}$ pour avoir le sommet n de l'hyperbole opposée ; l'angle CLN est celui que les coordonnées doivent faire. Ainsi l'on peut décrire les deux hyperboles qui satisfont à la question. FIG. 105.

Dém. Le rectangle $NL \times nL$ est $= \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega sx}{pzz} + \frac{aas^3}{pzz}$; ce qui se trouve sur Il comme sur IL. Or $aas : pzz :: NL \times nL : \overline{CL}^2$ donc $CL = \sqrt{ss - \omega x + \frac{p}{s}xx}$.

Maintenant 1° au point C se trouve la racine vraye. 2° Au point c pris sur l'arc Nc la racine fausse. 3° Au point c pris entre Ef & Ab, la racine vraye. 4° Au point c pris audessus de Gh la racine fausse & partout l'équation de n. 3. ce qui arrive dans tous les points des deux hyperboles qui donnent toûjours une des valeurs de y & $xy = yy + 3y + 2$.

Le centre M tombe sur la ligne AB ; car $AI = BK = m = \frac{3}{2}$, & dans les triangles semblables MAI, IKL, LK, $\frac{1}{2}x : KI, x :: IA, \frac{3}{2} : MA, 3$. Et dans le triangle MAI rectangle en A, $IM = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{a\omega s}{2pz}$, & parceque IM, $\frac{3}{2}\sqrt{5} > Mn$, $\sqrt{10}$; le sommet n doit tomber entre I & M.

5. L'équation est n. 3. $yy + 3y - xy = -2$; faites $y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = v$; vous aurez $vv - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}xx - \frac{3}{2}x$, $vv - ss = \frac{p}{s}xx - \omega x$, en supposant $p = \frac{1}{8}$, $s = \frac{1}{2}$, $\omega = \frac{3}{2}$ comme n. 3. $\frac{s}{p}vv - \frac{s^3}{p} = xx - \frac{\omega sx}{p}$.

Faites encore $x - \frac{\omega s}{2p} = r$, & vous trouverez $\frac{s}{p}vv = rr + \frac{s^3}{p} - \frac{\omega\omega ss}{4pp}$. Après avoir connu comme n. 4. que l'ordonnée $CL = v = y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ se termine à IL & que le diametre est sur IL, $\frac{ax}{z}$; vous conclurrez que l'équation $x = r + \frac{\omega s}{2p}$ doit se changer en $\frac{ax}{z} = \frac{ar}{z} + \frac{a\omega s}{2pz}$, & l'équation $\frac{s}{p}vv = rr + \frac{s^3}{p} - \frac{\omega\omega ss}{4pp}$ en celle-ci $\frac{aas}{pzz}vv = \frac{aarr}{zz} + \frac{aas^3}{pzz} - \frac{aa\omega\omega ss}{4ppzz}$, laquelle doit être construite, parceque $\omega\omega > 4mp$.

Dans cette équation, $\frac{aas}{pzz}$ montre la raison du diametre au parametre, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega ss}{4ppzz} - \frac{aas^3}{pzz}}$ est le demi-diametre. $\sqrt{\frac{aa\omega\omega ss}{ppzz} - \frac{4aas^3}{pzz}}$ le diametre, $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4pszz}{aa}}$ le parametre. étant $pzz = \frac{1}{8}$, $aas = \frac{5}{8}$, l hyperbole n'est pas équilatere. Dans cette sorte d'équation à l'hyperbole, le terme $\frac{aarr}{zz}$ est le quarré de la ligne LM, $\frac{ar}{z}$, prise depuis le point L jusqu'au centre M : mais IL, $\frac{ax}{z} = \frac{ar}{z} + \frac{a\omega s}{2pz}$: donc $IM = \frac{a\omega s}{2p}$, & le point M doit se prendre du côté où L est, parcequ'il y a $+\frac{a\omega s}{2p} + \frac{ar}{z} = IL$, $\frac{ax}{z}$. Et parcequ'il y a toûjours $+\frac{a\omega s}{2pz}$ ou $+\frac{a\omega m}{2pz}$, toutes les fois qu'il y a $-\omega x$ dans $\sqrt{ss - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, c'est pour cela que M. DESCARTES a donné la Regle 3.

La démonstration peut se faire, comme n. 4.

EXEMPLE XIV. $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 109. 1. FIg. 109. Comme Ex. 13. n. 1. excepté que l'on demande $CB \times CD = CF \times CH + \frac{5}{2}\overline{AE}^2$.

2. Comme Ex. 13. n. 2.

3. L'équation ſera $yy + 3y - xy = -\frac{9}{2}$ dont les racines ſont $y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{9}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, en faiſant $\frac{3}{2} = m = \omega$, $1 = z$, $p = \frac{3}{8}$. Equation à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, & à ſes aſymptotes.

4. Comme Ex. 13. car IM, $\frac{a\omega m}{2pz}$ eſt égal à $\frac{a\omega s}{2pz}$, $\frac{3}{2}\sqrt{5}$, & le centre M tombe encore ſur AB. Excepté pourtant que le parametre eſt Regle 5. $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$, le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4pp zz} + \frac{aam^3}{pzz}} = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$. C'eſt pourquoi le ſommet n tombe au delà de I, étant $IM < Mn$. De plus $aam = \frac{15}{8}$, $pzz = \frac{3}{8}$.

5. L'on fera évanoüir le ſecond terme ſi l'on prend $v - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x = y$, la ſubſtitution donnera $\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2}x = vv + \frac{9}{4}$; $\frac{p}{m}xx - \omega x = vv + mm$, en ſuppoſant que ces lettres ont les mêmes valeurs que n. 3. Enſuite je multiplie tout par m, & je diviſe tout par p, pour faire $xx - \frac{\omega mx}{p} = \frac{m}{p}vv + \frac{m^3}{p}$. Je fais encore $s + \frac{\omega m}{2p} = x$: la ſubſtitution donnera $ss - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{m}{p}vv + \frac{m^3}{p}$; $\frac{m}{p}vv = ss - \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p}$.

Pour conſtruire cette équation, je prends $BK = m$; par le point K je mene IK égale & parallele à AB, x; je coupe KL égale à $\frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$, $IM = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; par les points I, L je tire l'infinie IL. Cela étant fait, je connois que CL eſt $CB + BK - KL$, $y + m - \frac{n}{z}x = y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = v$: Et comme v eſt l'appliquée, il ſuit que le diametre eſt ſur IL, Regle 17.

Enſuite ſur IK je prends $IV = \frac{\omega m}{2p}$, de ſorte que $VK = IK - IV$, $x - \frac{\omega m}{2p}$ eſt s: ainſi le point V où commencent les s ſeroit le centre des hyperboles, ſi le diametre étoit ſur IK: mais comme il eſt ſur IL, je change l'équation $x - \frac{\omega m}{2p} = s$, en $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{as}{z}$.

Je mets donc dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ss - \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p}$, pour ss la quantité $\frac{aass}{zz}$, & afin que l'égalité ſubſiſte, je multiplie tous les termes par $\frac{aa}{zz}$, ce qui produit la derniere reduite $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aass}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}$.

Dans le terme $\frac{aam}{pzz}vv$ je connois, que le diametre eſt au parametre comme aam à pzz; dans le terme $\frac{aass}{zz}$ quarré de $\frac{as}{z} = ML$, je connois que M eſt le centre; dans le terme $\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}$, qui eſt le quarré du demi-diametre exprimé negativement, je connois que ce demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$, & que le diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; &

faisant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. L'on peut aisément achever la construction & la démonstration ; & reconnoître les Regles de Mr DESCARTES.

EXEMPLE XV. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 97. qui est celle de M. DESCARTES. Comme Ex. 13. n. 1. excepté qu'il faut que $CB \times CH$ soit égal à $CD \times CF - \frac{7}{3}CB$. Fig. 97.

2. Comme Ex. 13. n. 2. où l'on a trouvé $CB = y$; $CD = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x$; $CF = 2y + 3 + x$; $CH = \frac{2}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$.

3. $CB \times CH = CD \times CF - \frac{7}{3}CB$ s'exprime de cette façon, $\frac{2}{3}yy + \frac{10y}{3} - \frac{2}{3}xy = 3yy + \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}xy + \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}xx - \frac{7}{3}y$; $\frac{7}{3}yy - \frac{7}{6}y + \frac{31}{6}xy = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}xx$. Multipliez par 3, divisez par 7, & vous ferez $yy - \frac{1}{2}y + \frac{31}{14}xy = -\frac{27}{14}x - \frac{9}{14}xx$.

4. Coupez $BK = m$, par le point K menez IK égale & parallele à AB, x, prenez $KL = \frac{n}{z}x = \frac{31}{28}x$; par les points I, L tirez l'infinie IL. Dans le triangle IKL, vous connoissez les côtez IK, KL, & l'angle IKL, vous pourrez donc par la Trigonometrie connoître le côté IL, que vous nommerez $\frac{ax}{z}$.

Maintenant parcequ'il y a $+ mm$, & que $\omega\omega$ est moindre que $4mp$; après avoir trouvé le centre M sur IL, en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & mis le point M du côté où est L, parcequ'il y a $- \omega x$, Regle 3. vous tirerez Regle 12. par le centre M, la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM; vous ferez $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}} = MN$, qui sont les demi-diametres ; & le diametre NO est $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$; le parametre $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$, les sommets sont O, N, CP une ordonnée ; & la raison du diametre au parametre est celle de pzz à aam, Regle 13. 15. 16. Après cela vous pouvez décrire l'hyperbole OC, qui est le lieu cherché.

Dém. $\overline{CP}^2 = \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aaxx}{zz}$. $NP \times OP = yy - 2my + \frac{2nxy}{z} - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{\omega\omega m}{4p}$. Or $pzz : aam :: NP \times PO : \overline{CP}^2$. Donc $NP \times PO = \frac{pzz}{aam} \times \overline{CP}^2$, d'où ôtant ce qui s'efface & ajoûtant mm de chaque côté, on forme une équation dont la racine est $y = + m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, &c.

Le Lecteur est averti que du nombre des Exemples le 13e est retranché, ce qui fait que le 15e est le même que le 16e dont il est parlé dans quelques endroits. Le 15e est devenu 14e, & celui-ci 13e.

ARTICLE VIII.

Conſtruction particuliere à l'Hyperbole conſiderée par rapport à ſes Aſymptotes.

IL ne s'agit ici, que de faire voir dans quelques Exemples, que le Problême de Pappus, lorſqu'il eſt propoſé en trois ou quatre lignes, peut quelquefois ſe conſtruire avec l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes.

Fig. 119. J'ajoûterai ceci comme une Regle. 1° Fig. 110. ſoient les lignes droites Nu, Nn les aſymptotes des hyperboles CP, AY; N leur centre; l'abſciſſe $Nu = a$; l'appliquée $uC = b$, parallele à l'autre aſymptote Nn, l'abſciſſe NO priſe ſur une des aſymptotes Nu, l'appliquée OP parallele à l'autre aſymptote Nn; ou Nn abſciſſe priſe ſur une des aſymptotes Nn, $= x$; l'appliquée nC parallele à l'autre aſymptote Nu, $= y$; ou l'abſciſſe Nn priſe en allant de N vers Y, $= - x$, l'appliquée nY paralelle à l'aſymptote $Nu = - y$; parceque les x commencent en N, & que les $+ y$ ſont au deſſous de Nn, les $- y$ au deſſus. Tous les lieux à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, ſont fondez ſur cette proprieté $xy = ab$, le rectangle ſous une coupée $Nu = a$ & ſous une appliquée correſpondante uC, b, eſt égal à un autre rectangle ſous une autre coupée Nn, x & ſous ſon appliquée correſpondante nc, y.

2° Les aſymptotes ſont toûjours les lignes droites, Nu, Nn ſur l'une deſquelles Nn, l'on prend les abſciſſes Nn, Nn; & de laquelle partent les appliquées nC, nc paralleles à l'autre aſymptote Nu. De ſorte que ſi l'appliquée nc, y, ou l'inconnuë v en laquelle y a été changée, ne ſe trouvoit pas parallele à Nu, il faudroit lui ſubſtituer une autre ligne, qui fût parallele à Nu, & faire enſuite dans l'équation les changemens que l'on verra, Ex. 3. 4. 5.

3° Il eſt libre ordinairement de prendre les abſciſſes Nn, Nn ſur l'aſymptote Nn; & alors les nC, nc ſont appliquées; ou bien de prendre les abſciſſes $Nx = nc$, $Nu = nC$ ſur l'aſymptote Nu; & alors les appliquées ſont $uC = Nn$, $xc = Nn$.

EXEMPLE I. $y = \frac{2mx}{2x - a}$.

Fig. 110. 1. FIg. 110. Comme Art. 5. Ex. 2. excepté que l'on demande ici, que ce qui eſt produit par $CB \times CH$ ſoit égal à ce qui eſt produit par $CD \times CF$.

2. Comme Art. 5. n. 2.

3. $CB \times CH = CD \times CF$ s'exprime ainſi en termes analytiques, $ay - xy = xy - 2mx$; $y = \frac{2mx}{2x - a}$.

Pour reduire $2xy - \omega y = 2mx$, divisons par 2, le quotient est xy $\frac{1}{2}\omega y = mx$; prenons $x = z + \frac{1}{2}\omega$; substituons la valeur de x à sa place, nous aurons $zy - mz = \frac{1}{2}\omega m$; faisons encore $y - m = v$, & la substitution donnera la reduite $vz = \frac{1}{2}\omega m$, équation à l'hyperbole par rapport à ses asymptotes. FIG. 110.

4. Pour la construire, sur AG coupons $AU = \frac{1}{2}\omega$, $= VG$: nous aurons $UB = AB - AU$, $x - \frac{1}{2}\omega = z = Cu$; les $Ub = cx$ auront la même valeur, le point b étant pris du côté de G; les $Ub = Yx$, le point b étant pris du côté de Y, auront une autre valeur, car $Ub = UA + Ab$, $\frac{1}{2}\omega - x = - z$.

Par le point U menons UN parallele à AE; sur l'infinie UNu coupons $UN = \frac{1}{2}AE = m = Bn = NO$, parceque AE est $2m$; nous aurons $Cn = CB - Bn$, $y - m = v = Nu$; toutes les cn auront même valeur, les nY seront $nb - bY$, $m - y = - v$, car l'appliquée $Yb = y$. Et parceque $Cu = z$ se termine à UN, sur laquelle on prend $Nu = v$; & que Cu est parallele à Nn; les lignes Nn, Nu seront les asymptotes, dont N est le sommet. Enfin je décris l'hyperbole CP entre les asymptotes Nn, Nu, & par le point P; ensuite son opposée AY, suivant les Methodes que les Traitez des Sections coniques fournissent. Elles sont le lieu de la question.

Dém. Etant $NO = m$, $PO = UG = \frac{1}{2}\omega$. 1° Par la nature de l'hyperbole entre ses asymptotes, nous aurons $Nu \times uC = NO \times OP$, $uz = \frac{1}{2}\omega m$; substituons pour v sa valeur $y - m$, ce sera $yz - mz = \frac{1}{2}\omega m$; substituons encore pour z sa valeur $x - \frac{1}{2}\omega$, nous ferons $y = \frac{2mx}{2x - \omega}$ équation proposée. De plus le calcul a été fait au point C. 2° Au point c pris sur l'arc Pc, nous avons $NO \times OP = Nn \times nc$, $\frac{1}{2}\omega m = uz$. De plus nous avons là cb, y; $cf = fb - cb$, $2m - y$; $cd = Ab$, x; $ch = cd - dh$, $x - \omega$; & $cb \times ch = cd \times cf$, $\omega y - xy = xy - 2mx$, equation de n. 3. 3° Au point Y sur l'hyperbole opposée, nous avons par la nature de l'hyperbole $Nn \times nY = NO \times OP$, $vz = \frac{1}{2}\omega m$. Substituons pour $-v$ sa valeur $m - y$; pour $-z$ sa valeur $\frac{1}{2}\omega - x$, nous ferons $\frac{1}{2}\omega m - mx - \frac{1}{2}\omega y + xy = \frac{1}{2}\omega m$; $y = \frac{2mx}{2x - \omega}$. De plus nous avons là $Yb = y$; $Yf = bf - Yb$, $2m - y$; $Yd = Ab$, $-x$; $Yh = Yd + dh$, $-x + \omega$; & $Yb \times Yh = Yd \times Yf$, $-xy + \omega y = -2mx + xy$; $2xy - \omega y = 2mx$, équation de n. 3. L'on trouvera dans tous les points des deux hyperboles les mêmes choses. Ainsi elles satisfont entierement au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

L'hyperbole opposée AY passe par le point A, car nous avons $NR = VA = \frac{1}{2}\omega$; $AR = VN = m$; & comme auparavant $Nn \times nY = NR \times AR$, $vz = \frac{1}{2}\omega m$.

EXEMPLE II. $y = \frac{bx}{2bx+1}$.

FIG. 111. 1. FIg. 111. Comme Art. 5. Exemp. 5. n. 1. excepté qu'il faut que $CB \times CD$ ſoit égal à $CF \times CH$.

2. Comme n. 2. du même Exemple, excepté qu'on trouvera, en faiſant les mêmes raiſonnemens, $CF = BF - CB$, $1 - y$; $BR = bx$; $CR = BR - CB$, $bx - y$; $CH - \frac{y+bx}{2}$; $CT = CB + BT$, $y + bx$; CD, $\frac{y+bx}{2}$.

3. $CB \times CD = CF \times CH$ fait $\frac{yy+bxy}{2} = \frac{bx-y-bxy+yy}{2}$ qui ſe reduit à $2bxy + y = bx$; $xy + \frac{y}{2b} = \frac{1}{2}x$. Prenez $x + \frac{1}{2b} = z$, $x = z - \frac{1}{2b}$, mettez z pour $x + \frac{1}{2b}$ dans le premier membre, $z - \frac{1}{2b}$ pour x dans le ſecond; l'équation ſera $yz = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4b}$, $\frac{1}{2}z - yz = \frac{1}{4b}$.

Prenez encore $\frac{1}{2} - y = v$, ſubſtituez, la reduite eſt $vz = \frac{1}{4b}$, équation à l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

4. En voici la conſtruction. Sur AB coupez $AU = \frac{1}{2b}$, & UB ſera $UA + AB$, $\frac{1}{2b} + x = z$. Par le point V menez VN parallele à BC; prenez $VN = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, que le point N eſt au milieu de VK, parceque $VK = BF = 1$. Par le point N tirez l'infinie NO parallele à AB, de ſorte que $Cu = Bu - CB$, $\frac{1}{2} - y = v$. Parceque $Cu = v$ ſe termine à la ligne NO, ſur laquelle on prend $Nu = VB = z$; & que Cu eſt parallele à VN; les deux lignes NV, NO ſont aſymptotes, & N leur ſommet. Il reſte à prendre $NO = \sqrt{\frac{1}{4b}}$, & tirer $OP = NO$ & parallele à NV, & décrire l'hyperbole CP par le point P, & entre les aſymptotes NO NV. C'eſt le lieu cherché.

Dém. Par la nature de l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, $Nu \times Cu = NO \times OP$, $vz = \frac{1}{4b}$; mettez pour v & z leur valeur, vous aurez $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4b} - xy - \frac{y}{2b} = \frac{1}{4b}$; $y = \frac{bx}{2bx+1}$. Ce qu'il falloit démontrer.

1° L'hyperbole PC paſſe au point A, parceque là $CB = 0$, $CD = 0$, $CH = 0$; ce qui rend zero les produits $CB \times CD = CF \times CH$. 2° La ſeconde hyperbole paſſe au point E, parceque là $CD = 0$, $CF = 0$; ce qui produit le même effet. 3° Aucune ne paſſe au point G, parceque là $CF = 0$, $CH = 0$; ce qui rendroit $CB \times CD = 0$, & qui eſt faux.

EXEMPLE III. $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 112. Comme Art. 7. Ex. 5. n. 1.

2. Comme n. 2. du même Exemple.

3. Comme n. 3. du même Exemple. Reprenons enſuite l'équation $xy + \omega x = yy$; ſoit $y + \omega = v$, $y = v - \omega$; la ſubſtitution fournira $vx = vv - 2\omega v + \omega\omega$; $vx - vv + 2\omega v = \omega\omega$. Soit encore $x - v +$

$2\omega = z$; la reduite sera $vz = \omega\omega$, équation à l'hyperbole par rapport à ses asymptotes.

4. La construction se fera ainsi. Etant $BF = AE$, ω, CF est $y + \omega = v$. Qu'on prenne $EN = 2AE$, 2ω; que par N on mene NR égale & parallele à CF, v; qu'on prolonge CD en R. Coupez $RS = NR$, & par les points N, S tirez l'infinie NS. Vous avez $RD = NE$, 2ω; donc $CS = CD + DR - RS$, $x + 2\omega - v = z$. Les droites NF, NS sont asymptotes, parceque $CS = z$, 1° est terminée à NS, sur laquelle on prendra les abscisses, 2° elle est parallele à NF. Mais $CF = v$ n'est pas parallele à NS : il faut donc lui substituer CT terminée à NF, & parallele à NS : $CT = v\sqrt{2} = av$ en posant $\sqrt{2} = a$. L'on mettra av pour v dans l'équation $vz = \omega\omega$, & afin que l'égalité subsiste, l'on multipliera le second membre par a; & l'équation sera reduite à $avz = a\omega\omega$. C'est pourquoi si l'on coupe $NO = \omega$, & que l'on mene $OA = a\omega$ parallele à NS, & qu'on décrive l'hyperbole AC, par le point A & entre les asymptotes NF, NS, elle satisfera au Problême.

Dém. OA est $= \omega\sqrt{2}$. Ainsi l'hyperbole cherchée passe par le point A. Or par la nature de l'hyperbole entre ses asymptotes $NS \times CS = NL \times LA$, ou $CT \times CS = AO \times AL$, $avz = a\omega\omega$, $vz = \omega\omega$. Substituez les valeurs de z & de v, vous aurez l'équation $xy + \omega x - yy = 0$ & la racine $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$, &c.

EXEMPLE IV. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{ff - \omega x + \frac{p}{s}xx}$.

1. FIg. 109. Comme Exemple 13. n. 1. Art. 7. FIG. 109.

2. Comme Ex. 13. n. 2. Art. 7.

3. Comme n. 3. du même Exemple. Maintenant reprenons l'équation $-yy - 3y + xy = 2$. & faisons $x - 3 - y = v$, afin que l'équation se change en $vy = 2$. Equation à l'hyperbole prise entre ses asymptotes.

4. L'on a vû Ex. 13. n. 4. que CB est $y = MQ$, $CD = x$, AM est $3 = QD$, le point M est le centre. Soit $QS = MQ$, joignez MS; vous aurez $CS = CD - QD - QS$, $x - 3 - y = v$. Les lignes MS, MB sont asymptotes, parceque $CS = v$ se termine à MS, sur laquelle on prendra les abscisses; 2° elle est parallele à MB. Mais $CB = y$ n'est pas parallele à l'asymptote MS, je lui substituë donc CT parallele & égale à $MS = y\sqrt{2} = ay$. Je mets ay pour y dans l'équation $vy = 2$; & pour conserver l'égalité, je multiplie aussi le second terme par a, & l'équation devient $avy = 2a$. Je coupe $MO = \sqrt{2a}$, je mene OP égale à MO & parallele à MS. On peut décrire l'hyperbole PC par le point P, entre les asymptotes MB, MS, qui sera le lieu cherché.

Dém. Par la nature de l'hyperbole entre ses asymptotes, $MO \times OP = MS \times SC$, $2a = avy$; $vy = 2$. Pour v mettons sa valeur, l'équation

se changera en $-yy-3y+xy=2$. Equation de n. 3. D'où l'on pourra former la racine $y=-m+\frac{n}{z}x+\sqrt{ff-\omega x+\frac{p}{s}xx}$, comme l'on a fait Art. 7. Ex. 13. n. 3. Ce qu'il falloit démontrer.

EXEMPLE V. $y=\frac{bx+xx}{2c-b-5x}$.

FIG. 113. 1. FIg. 113. Comme Ex. 9. n. 1. Art. 7.

2. Là même, n. 2. où l'on a posé EA, $b=3$; AG, $c=5$.

3. Là même, n. 3. Ensuite l'équation $y=\frac{bx+xx}{2c-b-5x}$ se reduit à $2cy-by-5xy=bx+xx$, ou $7y-5xy=3x+xx$, $\frac{7}{5}y-xy=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}xx$. Soit $\frac{7}{5}-x=z$, $x=-z+\frac{7}{5}$: la substitution donnera $yz=\frac{1}{5}zz-\frac{29}{25}z+\frac{154}{125}$, $yz+\frac{29}{25}z-\frac{1}{5}zz=\frac{154}{125}$. Soit encore $y+\frac{29}{25}-\frac{1}{5}z=v$; en substituant on fera $vz=\frac{154}{125}$ à l'hyperbole entre ses asymptotes.

4. La construction se fera de cette maniere. Coupez $AN=\frac{7}{5}$ sur AG, vous aurez $BN=AN-AB$, $\frac{7}{5}-x=z$. Par le point N tirez l'infinie IN parallele à CB; sur CB prenez $BK=\frac{29}{25}$, menez IK égale & parallele à BN, z; prenez $KL=\frac{1}{5}KI=\frac{1}{5}z$, & par les points I, L tirez l'infinie IL: vous aurez $CL=CB+BK-KL=y+\frac{29}{25}-\frac{1}{5}z=v$.

Les droites IN, IL sont les asymptotes, parceque CL, v 1° est terminée à IL; 2° elle est parallele à IN. A present menez CS égale & parallele à BN, $z=KI$. A cause de vz, CS devroit être la coordonnée de CL, v: mais elle n'est pas parallele à l'asymptote IL, il faut donc la transporter sur CR, que vous tirerez parallele à IL. Pour cela vous observerez que les triangles IKL, CSR sont entierement égaux; les angles en K & S de 60. degrez. Ainsi dans le triangle KIL, la somme des deux autres angles L, I est de 120. degrez. Mais la raison des sinus de ces angles est suivant le Problême de Trigonometrie, comme leurs côtez opposez IK; z; KL, $\frac{1}{5}z$, ou comme 5. à 1. c'est ce qui convient au sinus 94485 de l'angle ILK de 109. deg. 7', & au sinus 18880 de l'angle LIK de 10. d. 53', les secondes étant negligées.

On connoîtra donc par le même Problême la valeur du côté IL, que je nomme az, & qui est égal à CS. Il faut encore changer l'équation $vz=\frac{154}{125}$ en $avz=\frac{154a}{125}$.

Enfin coupez $IO=\sqrt{\frac{154}{125}a}$, menez $OP=IO$ & parallele à IL. Décrivez une hyperbole entre les asymptotes IO, IL, & qui passe par le point P, elle est le lieu cherché. Tirez PT parallele & égale à IO; & d'un point quelconque C, CK, CS paralleles chacune à une des asymptotes.

Dém. Par la nature de l'hyperbole entre ses asymptotes, $IO\times OP$ ou $PO\times PT=IR\times CR$ ou $CL\times CR$, $auz=\frac{154}{125}a$, $uz=\frac{154}{125}$; & substituant la valeur de v; $yz+\frac{29}{25}z-\frac{1}{5}zz=\frac{154}{125}$; & substituant la valeur de z, $\frac{7}{5}y-xy=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}xx$, $7y-5xy=3x+xx$, équation de n. 3.

EXEMPLE

EXEMPLE VI. $2bxy - y + bx = 2.$

1\. NOus avons trouvé Art. 5. Exemple 6. dans la démonstration n. 2°, que le point c Figure 81. étant pris dans l'angle EAB, l'équation étoit $2bxy - y + bx = 2$, laquelle nous allons construire Fig. 114. étant $b = \frac{43301}{25000}$ Art. 5. Ex. 5. n. 2. $BF = 1$. Fig. 81. 114.

2\. Changeons l'équation en $xy + \frac{1}{2}x = \frac{yy}{2b} + \frac{1}{b}$; faisons $y + \frac{1}{2} = v$, $y = v - \frac{1}{2}$; la substitution donne $vx = \frac{vv}{2b} - \frac{v}{2b} + \frac{1}{8b} + \frac{1}{b}$, $xv + \frac{v}{2b} - \frac{vv}{2b} = \frac{9}{8b}$. Faisons encore $x + \frac{1}{2b} - \frac{v}{2b} = z$; l'équation est reduite à $vz = \frac{9}{8b}$.

3\. Fig. 114. Prolongez BC, jusqu'à ce que BK soit $\frac{1}{2}$; comme CB est là $-y$, nous aurons $CK = BK - CB$, $\frac{1}{2} + y = v = IN$, étant CN & KI paralleles à AB. Maintenant coupez $AT = \frac{1}{2b}$, menez l'infinie IT parallele à CB. Coupez aussi IV, VS parallele à AB suivant la raison de $2b$ à 1; & par les points S, I tirez l'infinie SIL: dans les triangles semblables ISV, INL, nous avons cette proportion $IV : VS :: 2b : 1 :: IN, v : NL, \frac{v}{2b}$; de plus $NM = AT, \frac{1}{2b}$, $CM = AB, x$: donc $CL = CM + MN - NL = x + \frac{1}{2b} - \frac{v}{2b} = z$.

IL, IK sont les deux asymptotes, parceque CL, z est terminée à IL, & elle est parallele à IK: mais CK, v n'est pas parallele à IL: il faut donc lui substituer CR que nous tirons parallele à IL, & qui sera égale à $IL = \frac{v}{2b}\sqrt{5} = av$ en faisant $\frac{1}{2b}\sqrt{5} = a$. Et enfin l'équation $vz = \frac{9}{8b}$ se changera en $avz = \frac{9a}{8b} = \frac{9}{16bb}\sqrt{5}$.

A présent coupez $IO = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{2b}}$, & menez OP égale à IO & parallele à IL.

Décrivez l'hyperbole CP entre les asymptotes IL, IK, & qui passe par le point P. C'est le lieu cherché.

Dém. Par la nature de l'hyperbole entre ses asymptotes $IL \times LC = IO \times OP$, $azv = \frac{9a}{8b}$, $zv = \frac{9}{8b}$. De plus au point C vous trouverez l'équation proposée, comme on l'a trouvé Art. 5. Ex. 6. dans la démonstration n. 2°. Au point c pris dans l'angle BAH, ou $cb = +y$, vous aurez $ck = cb + bk$, $y + \frac{1}{2} = v$, & $cr = av$; $nl = \frac{v}{2b}$, $cl = cm + mn - nl$, $x + \frac{1}{2b} - \frac{v}{2b} = z$; & $cr \times cl = IO \times OP$, $auz = \frac{9a}{8b}$. Mais on y trouvera une équation differente, à savoir celle qui est Art. 5. Ex. 6. dans la même démonstration.



ARTICLE IX.

Démonſtration que M. DESCARTES *donne du Problême de Pappus appliqué au Cercle de Fig. 69.*

M. DESCARTES.

Fig. 69.

Demonſtration de tout ce qui vient d'être expliqué.

ET les démonſtrations de tout ceci ſont évidentes. Car compoſant un eſpace des quantitez, que j'ai aſſignées pour le côté droit & le traverſant, & pour le ſegment du diametre *NL* ou *OP*, ſuivant la teneur de l'onziéme, du douziéme, du treiſiéme Theorême du premier Livre d'Apollonius ; on trouvera tous les mêmes termes, dont eſt compoſé le quarré de la ligne *CP* ou *CL*, qui eſt appliquée par ordre à ce diametre. Comme en cet Exemple ôtant *IM*, qui eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$ de *NM*, qui eſt $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, j'ai *IN*, à laquelle ajoûtant *IL*, qui eſt $\frac{ax}{z}$, j'ai *NL*, qui eſt $\frac{a}{z}x - \frac{a\omega m}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$; & ceci étant multiplié par $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, qui eſt le côté droit de la figure, il vient $x\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{m\omega\omega}{2p} + 2mm$ pour le rectangle, duquel il faut ôter un eſpace, qui ſoit au quarré de *NL*, comme le côté droit eſt au traverſant. Et ce quarré de *NL* eſt $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aa\omega m}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mm}{2ppzz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, qu'il faut diviſer par aam, & multiplier par pzz; à cauſe que ces termes expliquent la proportion, qui eſt entre le côté traverſant & le droit, & il vient $\frac{p}{m}xx - \omega x + x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{\omega\omega m}{2p} - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp} + mm$. Ce qu'il faut dire du rectangle precedent, & on trouve $mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$ pour le quarré de *CL*, qui par conſequent eſt une ligne appliquée par ordre dans une ellipſe, ou dans un cercle, au ſegment du diametre *NL*.

Et ſi l'on veut expliquer toutes les quantitez données par nombres, un faiſant par exemple $EA = 3$, $AG = 5$, $AB = BR$, $BS = \frac{1}{2}BE$, $GB = BT$, $CD = \frac{3}{2}CR$, $CF = 2CS$, $CH = \frac{2}{3}CT$, & que l'angle *ABR* ſoit de 60. degrez, & enfin que le rectangle des deux *CB* & *CF*, ſoit égal au rectangle des deux autres *CD* & *CH*; car il faut avoir toutes ces choſes, afin que la queſtion ſoit

entierement déterminée. Et avec cela ſuppoſant $AB = x$, & $CB = y$, on trouve par la façon ci-devant expliquée $yy = 2y - xy + 5x - xx$, & $y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$. Si bien que BK doit être 1, & KL doit être la moitié de KI, & pource que l'angle IKL ou ABR eſt de 60. degrez, & KIL qui eſt la moitié de KIB ou IKL de 30. ILK eſt droit. Et pource que IK ou AB eſt nommée x, KL eſt $\frac{1}{2}x$, & IL eſt $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & la quantité qui étoit tantôt nommée z eſt 1, celle qui étoit a eſt $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui étoit m eſt 1, celle qui étoit ω eſt 4, & celle qui étoit p eſt $\frac{3}{4}$. De façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour NM. Et pource que aam qui eſt $\frac{3}{4}$ eſt ici égal à pzz, & que l'angle ILC eſt droit, on trouve que la ligne courbe NC eſt un cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en même ſorte.

1. Le Problême de Pappus, tel que M. DESCARTES l'a reſolu, a été propoſé en quatre lignes, Liv. 1. Part. 3. Sect. 1.

Le calcul a commencé, & la valeur des lignes cherchées CB, CD, CF, CH a été trouvée. Là même, Sect. 3.

La reſolution a été donnée, L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. où l'on a trouvé $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

La conſtruction des quantitez $+ m - \frac{n}{z}x$ s'eſt faite, là même, Art. 2.

La conſtruction de $\sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}xx}$ ſe trouve. Là même, Art. 6. Exemple 13. On y voit auſſi la démonſtration. Il ne reſte plus qu'à expliquer la démonſtration que M. DESCARTES donne en cet endroit.

2. Le demi-diametre, qui juſqu'à preſent a été exprimé par $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$ s'exprime ici par $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$: & ces deux expreſſions ſont la même choſe, comme on l'apprend dans les principes de l'Algebre.

On dira le même du parametre ou côté droit $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, qui auparavant a été exprimé par $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$.

3. La démonſtration, que nous voulons ici expliquer, ſuppoſe deux proprietez de l'ellipſe & du cercle, qu'Apollonius démontre convenir à l'ellipſe dans le Theorême 13. du Liv. 1. Il faut maintenant les expliquer.

Soit Fig. 115. NCR une ellipſe, ou un cercle, dont $NR = d = 2a$ eſt un diametre; M le centre, $MN = MR = a$; $NP = p$ le parametre du diametre NR; $NL = x$ une abſciſſe de ce diametre; $CL = y$ une appliquée à ce même diametre. Joignez RP, prolongez LC juſqu'à ce qu'elle rencontre PG parallelle au diametre NL; menez encore FH parallele au même diametre. Vous âurez $HF = PG = NL$, x. Fig. 115.

F. G. 59 L'eſpace, ou rectangle $HFPG$ eſt au quarré de l'abſciſſe NL, comme le côté droit ou parametre NP eſt au côté traverſant ou diametre. C'eſt la premiere proprieté qu'il faut ici démontrer. RN, $2a : NP, p :: HF, x : FP, \frac{px}{2a}$. De plus le rectangle $HFPG$ eſt $HF \times FP = \frac{pxx}{2a}$; & le quarré de NL eſt xx. Or $p : 2a :: \frac{pxx}{2a} : xx$: donc comme le parametre ou côté droit eſt au diametre ou côté traverſant : de même l'eſpace ou rectangle $HFPG$ eſt au quarré de l'abſciſſe NL.

La ſeconde proprieté eſt que le quarré de l'appliquée CL eſt égal au rectangle $LNPG$ ſous l'abſciſſe LN & le parametre NP, moins le rectangle $HFPG$ compris ſous $FH = LN$ & ſous HG que la ligne RP retranche de $LG = NP$ parametre : en un mot $\overline{CL}^2 = \overline{LN \times NP} - \overline{HF \times HG}$, ce qui ſe démontre ainſi. Etant $NL = x$, RL eſt $RN - NL$, $2a - x$; & le rectangle $NL \times LR$ eſt $2ax - xx$. Or par la nature de l'ellipſe & du cercle, comme le diametre $2a$ eſt au parametre p : de même $2ax - xx$ rectangle des ſegmens $NL \times LR$ du diametre eſt à yy quarré de l'appliquée CL : $2ayy = 2apx - pxx$, & $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$. D'ailleurs le rectangle $NL \times NP$ eſt px; le rectangle $HF \times HG$ eſt $\frac{pxx}{2a}$, comme on l'a vû un peu auparavant. Donc $\overline{NL \times NP} - \overline{HF \times HG} = px - \frac{pxx}{2a} = \frac{2apx - pxx}{2a}$. Mais on vient de voir $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$: donc $\overline{CL}^2$ quarré de l'appliquée CL eſt égal au rectangle $LN \times NP$, moins le rectangle $HF \times HG$.

4. Suivons à preſent la démonſtration de M. DESCARTES. 1° IM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$, Reg 1. Art. 6. 2° Le paramettre NP eſt Regle 5. $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ou $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$; Regle 10. $pzz : aam ::$ le parametre $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp} : \frac{am}{pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, ou $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, qui eſt le diametre NR, dont la moitié MN eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$, ou $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. Ainſi $IN = NM - IM$ eſt $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{a\omega m}{2pz}$. 3° IL eſt $\frac{ax}{z}$, Art. 6. Ex. 13. n. 4. Donc $NL = IL + IN$ eſt $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. 4° Il faut multiplier NL par le parametre NP, pour avoir le rectangle $LN \times NP = x\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{m\omega\omega}{2p} + 2mm$ 5° $\overline{NL}^2$ $\frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. 6° Nous avons démontré, que comme le parametre NP eſt au diametre NR, ou Regle 10. comme pzz eſt à aam : de même le rectangle $HFGP$ eſt au quarré de NL. Donc *convertendo* comme le diametre NR eſt au parametre NP, ou comme aam à pzz : ainſi $\overline{NL}^2 = \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$ eſt à l'eſpace ou rectangle $HFPG = \frac{p}{m}xx - \omega x + x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{\omega\omega m}{2p} + mm - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. 7° Nous avons encore démontré que ſi on ôte ce rectangle $HF \times FP$ du rectangle

$LN \times NP$, qui eſt $x\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{m\omega\omega}{2p} + 2mm$; il reſtera le quarré de l'appliquée CL, $-\frac{p}{m}xx + \omega x + mm$: donc $CL = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Ce que M. DESCARTES ajoûte touchant les valeurs de differentes quantitez ſe trouve Art. 6. Ex. 13.

ARTICLE X.

Des Lieux plans & ſolides, & de la maniere de les connoître.

M. DESCARTES.

AU reſte à cauſe que les équations, qui ne montent que juſques au quarré, ſont toutes compriſes en ce que je viens d'expliquer; non ſeulement le Problême des Anciens en 3. & 4. lignes eſt ici entierement achevé; mais auſſi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la compoſition des lieux ſolides; & par conſequent auſſi à celle des lieux plans, à cauſe qu'ils ſont compris dans les lieux ſolides. Car ces lieux ne ſont autre choſe, ſinon que lorſqu'il eſt queſtion de trouver quelque point, auquel il manque une condition pour être entierement determiné, ainſi qu'il arrive en cet Exemple, tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui eſt demandé. Et ſi cette ligne eſt droite ou circulaire on la nomme un lieu plan. Mais ſi c'eſt une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipſe, on la nomme un lieu ſolide. Et toutesfois & quantes que cela eſt, on peut venir à une équation qui contient deux quantitez inconnuës, & eſt pareille à quelqu'une de celles, que je viens de reſoudre. Que ſi la ligne qui determine ainſi le point cherché, eſt d'un degré plus compoſée que les Sections coniques, on la peut nommer en même façon un lieu ſurſolide, & ainſi des autres. Et s'il manque deux conditions à la determination de ce point, le lieu où il ſe trouve eſt une ſuperficie, laquelle peut être de même ou plate, ou ſpherique, ou plus compoſée.

Quels ſont les lieux plans & ſolides: & la façon de les trouver.

Mais le plus haut but, qu'ayent eu les Anciens en cette matiere, a été de parvenir à la compoſition des lieux ſolides: & il ſemble que tout ce qu'Apollonius a écrit des Sections coniques n'a été qu'à deſſein de la chercher. De plus on voit ici que ce que j'ai pris pour

le premier genre des lignes courbes, n'en peut comprendre aucunes autres, que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'ellipſe. Qui eſt tout ce que j'avois entrepris de prouver.

1. Les lieux Geometriques ſe diviſent en lieux à la ligne, ou à la ſurface, ou au ſolide.

Les lieux à la ligne ſont ou plans, ou ſolides, ou ſurſolides.

Lorſque le lieu eſt une ligne droite, ou une ligne circulaire, il s'appelle plan. Lorſque le lieu eſt une ellipſe, ou une parabole, ou une hyperbole, il s'appelle ſolide. Lorſque le lieu eſt une ligne plus compoſée que les Sections coniques, il s'appelle ſurſolide.

L'on diviſe auſſi les lieux à la ligne courbe en differens genres, Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 1.

La conſtruction des lieux ſolides comprend celles des lieux plans. Car pour conſtruire un lieu au cercle, il ne faut pas tirer d'autres lignes que pour conſtruire un lieu à l'ellipſe: & pour conſtruire un lieu à la ligne droite, il ne faut tirer qu'une partie des lignes, qui ſervent à conſtruire un lieu ſolide, c'eſt-à-dire, dans l'Exemple de M. DESCARTES, il faut tirer les lignes qui conſtruiſent m, $\frac{n}{z}x$, car tous les lieux à la ligne droite ſe reduiſent à la formule $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x$.

2. La difference qu'il y a entre les lieux à la ligne, à la ſurface, au ſolide, eſt telle.

Lorſqu'on cherche un point, qui ſatisfaſſe à la queſtion, & qu'aprés avoir trouvé la derniere équation il ne manque qu'une condition, afin que le point cherché ſoit entierement determiné: le lieu eſt à la ligne droite ou courbe, & tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui eſt demandé. Dans l'Exemple 13. Art. 6. Fig. 69. on cherche le point C; pour déterminer ce point, il y a deux choſes à faire, deux conditions à remplir. La premiere c'eſt de fixer le point B, la longueur de la ligne AB, x, afin de voir en quel point la ligne CB doit couper la ligne AB. La ſeconde c'eſt de déterminer la longueur de la ligne BC. Car ces deux choſes étant connuës, comme d'ailleurs le point A, & l'angle ABC ſont donnez, le point C eſt évidemment trouvé.

Or quand on en eſt venu à cette derniere équation $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, qui nous marque un Problême indeterminé, il ne reſte plus qu'une des deux conditions à remplir, pour rendre le Problême déterminé; il ne reſte plus qu'à prendre à volonté la longueur de la ligne AB, x. Car dès que je l'aurai determinée d'une telle longueur, elle me ſera connuë, & la valeur de CB, $y = m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, ne contenant plus que des grandeurs connuës, elle me ſera auſſi connuë, & je déterminerai aiſément ſa longueur CB, & je ſaurai exactement, où eſt

le point C. On a vû dans tous les Exemples des Articles 3. 5. 6. 7. 8. où il ne manquoit que cette condition au point C, pour être entierement determiné ; que le lieu a été une ligne, & que tous les points de toute cette ligne, ou d'une de ses parties satisfaisoient à la question, & pouvoient être pris pour celui, qui étoit demandé.

Lorsqu'on cherche un point, qui satisfasse à un Problême, & qu'aprés la derniere équation trouvée, il ne manque que deux conditions, afin que le point cherché soit entierement determiné : le lieu est à la surface plane ou courbe, & tous les points d'une surface finie ou infinie peuvent être pris pour celui qui est cherché, parceque tous donnent également la solution du Problême. C'est ce qui se verra dans les Problêmes 1. 2. 3. 4. 5. 6. qui suivent.

Mais lorsqu'on cherche un point, qui satisfasse à un Problême, & qu'après avoir trouvé la derniere équation, il manque trois conditions au point cherché, pour être entierement determiné : le lieu est au solide fini ou infini, & tous les points d'un solide peuvent être pris pour celui qui est cherché. Voyez les Problêmes 7. 8. de cet Article. M. DESCARTES dit dans une de ses Lettres, * que cet endroit de sa Geometrie sert pour les lieux *ad lineas tres & ad superficiem.* * Tom 3. Lett. 69.

Pour les lieux à la surface, cela est clair : mais pour les lieux au solide, ou à la quantité qui se mesure par trois lignes, & qui est de trois dimensions, cet endroit de la Geometrie n'y peut servir, qu'en ce qu'il donne lieu de conclurre, que si les lieux à la ligne demandent, qu'il ne manque qu'une condition ; si les lieux à la surface demandent qu'il ne manque que deux conditions, afin que le point cherché soit entierement determiné ; les lieux au solide doivent supposer qu'il manque trois conditions pour cette entiere détermination.

3. M. DESCARTES conclud 1° qu'il a entierement achevé le Problême des Anciens proposé par Pappus en trois ou quatre lignes, parcequ'il a donné la resolution de tous les Problêmes, dont les équations contiennent le quarré des deux inconnuës, ou de l'une des deux. Il est certain, comme il le reconnoit lui-même, & comme on l'a remarqué, Art. 1. n. 5. qu'il faut encore la resolution des Problêmes, dont l'équation contient le plan des inconnuës, sans avoir aucun de leurs quarrez.

La resolution de tous ces Problêmes étant donnée, il suit que le Problême de Pappus en trois ou quatre lignes est entierement achevé dans les cas, où la raison du rectangle sous deux des lignes cherchées est au quarré de la troisiéme, ou au rectangle sous la troisiéme & une donnée, ou au rectangle des deux autres, comme une grandeur connuë est à une grandeur connuë. Mais comme cette raison peut être differente, le Problême n'est pas, & ne peut pas entierement être resolu, puisque il peut s'étendre à toutes sortes de dimensions. Voyez Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 1. n. 2. 3.

M. DESCARTES conclud 2° qu'il a entierement achevé tout ce qui regarde la compoſition des lieux plans & ſolides. Ce qui ſuppoſe auſſi la compoſition des lieux ſolides , dont l'équation contient le rectangle des inconnuës , ſans avoir aucun de leurs quarrez ; car alors il faut neceſſairement ſe ſervir de l'hyperbole priſe entre ſes aſymptotes.

M. DESCARTES conclud 3° que le premier genre de lignes courbes ne comprend que le cercle , l'ellipſe , la parabole , & l'hyperbole. Cela eſt vrai , & peut ſe connoître par ce raiſonnement. La valeur de y s'exprime ainſi $y = \underset{0}{\pm m} \underset{0}{\pm \frac{n}{z}x} \underset{0}{\pm} \sqrt{\underset{0}{\pm mm} \underset{0}{\pm \omega x} \underset{0}{\pm \frac{p}{m}xx}}$ ou pour renfermer l'hyperbole entre ſes aſymptotes $y = \underset{0}{\pm m} \underset{0}{\pm \frac{n}{z}x} \underset{0}{\pm \frac{nn}{x}} \underset{0}{\pm} \sqrt{\underset{0}{\pm mm} \underset{0}{\pm \omega x} \underset{0}{\pm \frac{p}{m}xx}}$.

Je ſuppoſe 1° que tous les termes ſont nuls , excepté $\frac{nn}{x}$, & que l'équation eſt $y = \frac{nn}{x}$; le lieu eſt à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, Article 8.

Je ſuppoſe 2° que le terme $\frac{nn}{x}$ eſt nul , ce qui renferme pluſieurs cas.

Si ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt nul , ou ſi l'on en peut extraire la racine quarrée ; le lieu eſt à la ligne droite , Art. 3.

Si l'on ne peut pas extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical , & que la quantité $\frac{p}{m}xx$ ſoit nulle ; le lieu eſt à la parabole Article 4. 5.

Si l'on ne peut pas extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical , & qu'il y ait $- \frac{p}{m}xx$; le lieu eſt au cercle ou à l'ellipſe. Art. 4. 6.

Si l'on ne peut pas extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical , & qu'il y ait $+ \frac{p}{m}xx$; le lieu eſt à l'hyperbole , Art. 4. 7. 8.

Je n'ai pas mis le cas où les deux termes $\frac{nn}{x} + \sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}xx}$ ſe rencontrent , parceque $y = \frac{nn}{x} + \sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}xx}$ eſt une équation du quatriéme degré , & du ſecond genre.

Voilà toutes les differentes valeurs poſſibles de y , c'eſt-à-dire , toutes les differentes reſolutions poſſibles des Problêmes , dont les équations ont des inconnuës , qui ne montent enſemble ou ſeparément qu'à deux dimenſions. Or ces équations ne conviennent pas à d'autres courbes , qu'au cercle , ou à l'ellipſe , ou à la parabole , ou à l'hyperbole : & les courbes à qui ces équations conviennent ſont du premier genre , Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 1. Donc le premier genre de lignes courbes ne comprend que le cercle , l'ellipſe , la parabole , & l'hyperbole.

4. Il reſte à apporter des Problêmes à la ſurface & au ſolide , & à montrer qu'il manque deux conditions dans les Problêmes à la ſurface , & trois dans les Problêmes au ſolide. Mais il faut remarquer que ces deux ſortes de

de Problêmes ne sont pas proprement des Problêmes, mais des Theorêmes, suivant ce qui a été dit Liv. 1. Part. 1. Sect. 4. Regle 10. Ainsi le Problême VI. qui sert à l'explication de cette Regle est un Problême à la surface. Venons à d'autres Exemples.

PROBLEME I.

1. ETant donné Fig. 17. le rectangle MR, trouver dans ce rectangle le point A, par lequel ayant tiré la ligne GAH parallele aux côtez MN, PR, & la ligne FAK parallele aux côtez MP, NR; il se fasse quatre rectangles PA, AR, MA, AN, qui soient en proportion Geometrique. Fig. 17.

Nommons MN, $a = PR$; MP, $b = KF = NR$; PF, $x = MK$; FA, $y = PG = HR$; $FR = PR - PF$, $a - x = KN$; $GM = MP - PG$, $b - y = NH$.

L'on demande que $GP \times PF$ soit à $FR \times RH$: comme $GM \times MK$ est à $KN \times NH$, c'est-à-dire en termes analytiques $xy : ay - xy :: bx - xy : ab - bx - ay + xy$. $o = o$, parceque les termes sont les mêmes dans les deux membres de l'équation, & toutes les conditions du Problême étant remplies, les deux inconnuës x, y ne sont point determinées, & demeurent arbitraires. Mais pour resoudre le Problême il y avoit deux choses à faire : la premiere étoit de déterminer le point F, ou la grandeur de $PF = x$, afin qu'on sçût, où l'on devoit élever la ligne FK; la seconde étoit de déterminer le point A, ou la grandeur de $FA = y$, afin qu'on connût par quel point il falloit mener la ligne GAH. Après la resolution du Problême ces deux conditions manquent au point A, afin qu'il soit déterminé; puisque je ne connois ni sur quel point F de la ligne PR il faut élever FK, ni par quel point A de la ligne FK il faut tirer GH. Le lieu est donc à la surface, tous les points de la surface déterminée MR satisfont au Problême, & peuvent être pris pour le point cherché.

En effet il est évident, qu'en quelque endroit du rectangle MR, que l'on fixe le point A, l'on aura toûjours les mêmes quantitez, la même proportion & la même équation.

PROBLEME II.

UN triangle équilateral ABC Fig. 116. étant donné, trouver dans ce triangle un point E, duquel ayant tiré sur chaque côté une perpendiculaire EF, EG, EH; ces trois lignes soient ensemble égales à la perpendiculaire BD, tirée du sommet B sur le côté opposé AC. Fig. 116.

Supposons la chose faite & prolongeons EF jusqu'à ce qu'elle coupe le côté AB en I, & le côté CB prolongé en K. Nommons à present les données AB, $2a = AC = BC$; AD, $a = DC$; BD, b; les inconnuës AF, x; FE, y; $FC = AC - AF$, $2a - x$.

AD, $a : DB$, $b :: AF$, $x : FI$, $\frac{bx}{a}$; & $IE = IF - EF$, $\frac{bx}{a} - y$,

CD, $a : DB$, $b :: CF$, $2a - x : FK$, $2b - \frac{bx}{a}$; & $EK = FK - EF$, $2b - \frac{bx}{a} - y$. Après cela les triangles ADB, GEI sont aussi équiangles, donc AB, $2a : AD$, $a :: IE$, $\frac{bx}{a} - y : EG$, $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Enfin les triangles BDC, KEH sont encore équiangles : donc BC, $2a : CD$, $a :: KE$, $2b - \frac{bx}{a} - y : EH$, $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Maintenant l'on demande $EF + EG + EH = BD$, $y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y + b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y = b$, $b = b$, $o = o$. Car tous les termes s'effacent.

La derniere équation laisse x & y indéterminées ; les deux choses, qui peuvent fixer le point E, manquent donc : & le lieu est à la surface déterminée ABC, tous les points compris dans ce triangle satisfont à la question.

PROBLEME III.

Fig. 117. ETant donné un cercle Fig. 117. & ses deux diametres AB, DE, qui se coupent à angles droits ; trouver dans un des quarts de cercle, le point F, duquel ayant tiré sur AB la perpendiculaire FH, sur ED la perpendiculaire FG ; le rectangle $FG \times GE$ + le rectangle $FH \times HB$ soient égaux au rectangle $FG \times GD$ + le rectangle $FH \times HA$.

Nommez le rayon AC, $a = CB = CE = CD$; FG, $x = HC$; CG, $y = FH$; $AH = AC - CH$, $a - x$; $BH = BC + CH$, $a + x$; $EG = EC - CG$, $a - y$; $DG = CD + CG$, $a + y$.

L'équation se reduira à $o = o$; y & x sont indéterminées, & le lieu est à la surface terminée courbe $EADB$.

PROBLEME IV.

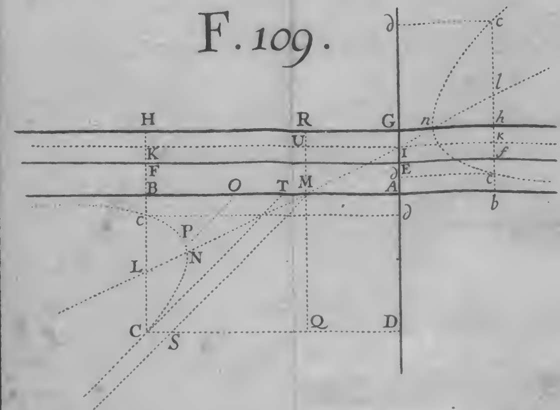
Fig. 118. ETant donné le parallelogramme $ABED$, trouver en dehors de ce parallelogramme un point H, duquel ayant tiré HCF par le point C milieu de la diagonale ; le parallelogramme se trouve partagé en deux parties égales.

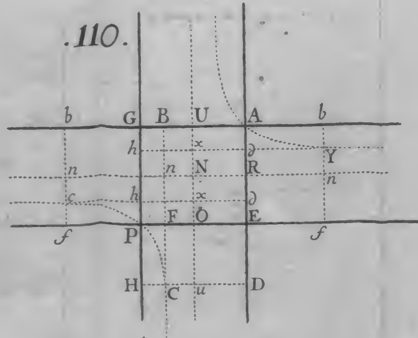
On prolongera AD en M, on menera HL parallele à AD, jusqu'à ce qu'elle coupe les lignes BA, ED prolongées, s'il est necessaire.

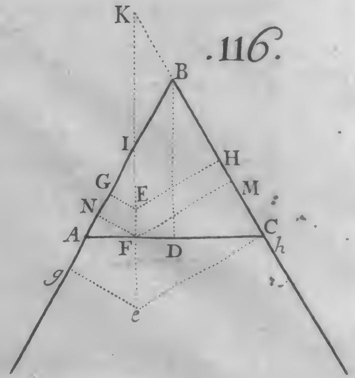
Nommons à present les connuës AB, $a = DE$; AD, $b = BE$; les inconnuës DK, $x = AL$; KH, y ; $HL = HK + KL$, $y + b$; DG, $z = FB$; $LF = LA + AB - FB$, $x + a - z$; $KG = DK + DG$, $x + z$; DM, v.

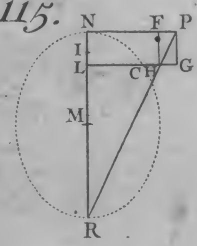
On a ces Analogies $KG : KH :: DG : DM$. $v = \frac{yz}{x+z}$. $DM : DG :: HL : LF$. $v = \frac{yz + bz}{x + a - z} = \frac{yz}{x+z}$, d'où l'on forme $z = \frac{ay - bx}{2y + b}$. De plus $KH : KG :: LH : LF$. $z = \frac{ay - bx}{2y + b} = \frac{ay - bx}{2y + b}$. Les deux quantitez x, y demeurent inconnuës ; le Problême est donc à la surface infinie ; la solution seroit la même si l'on avoit fait le calcul au point h.

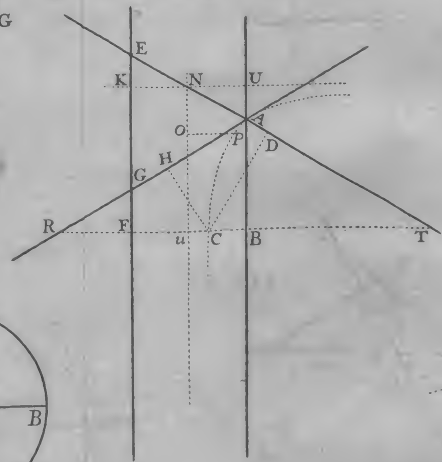
Pl. 9.

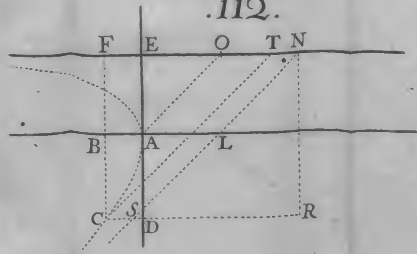


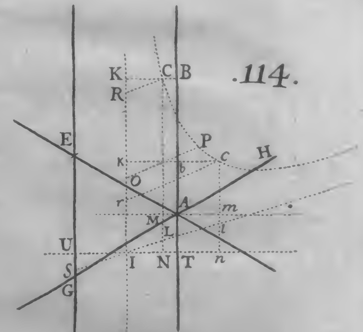


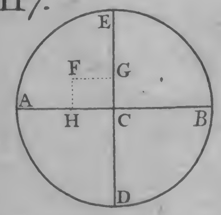


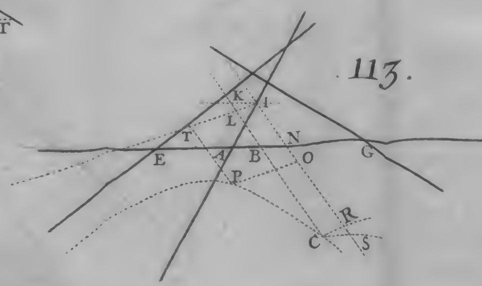


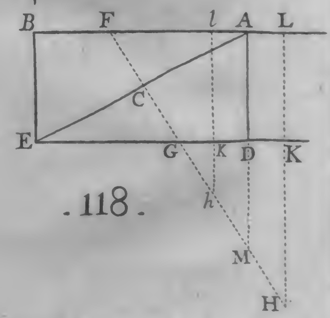




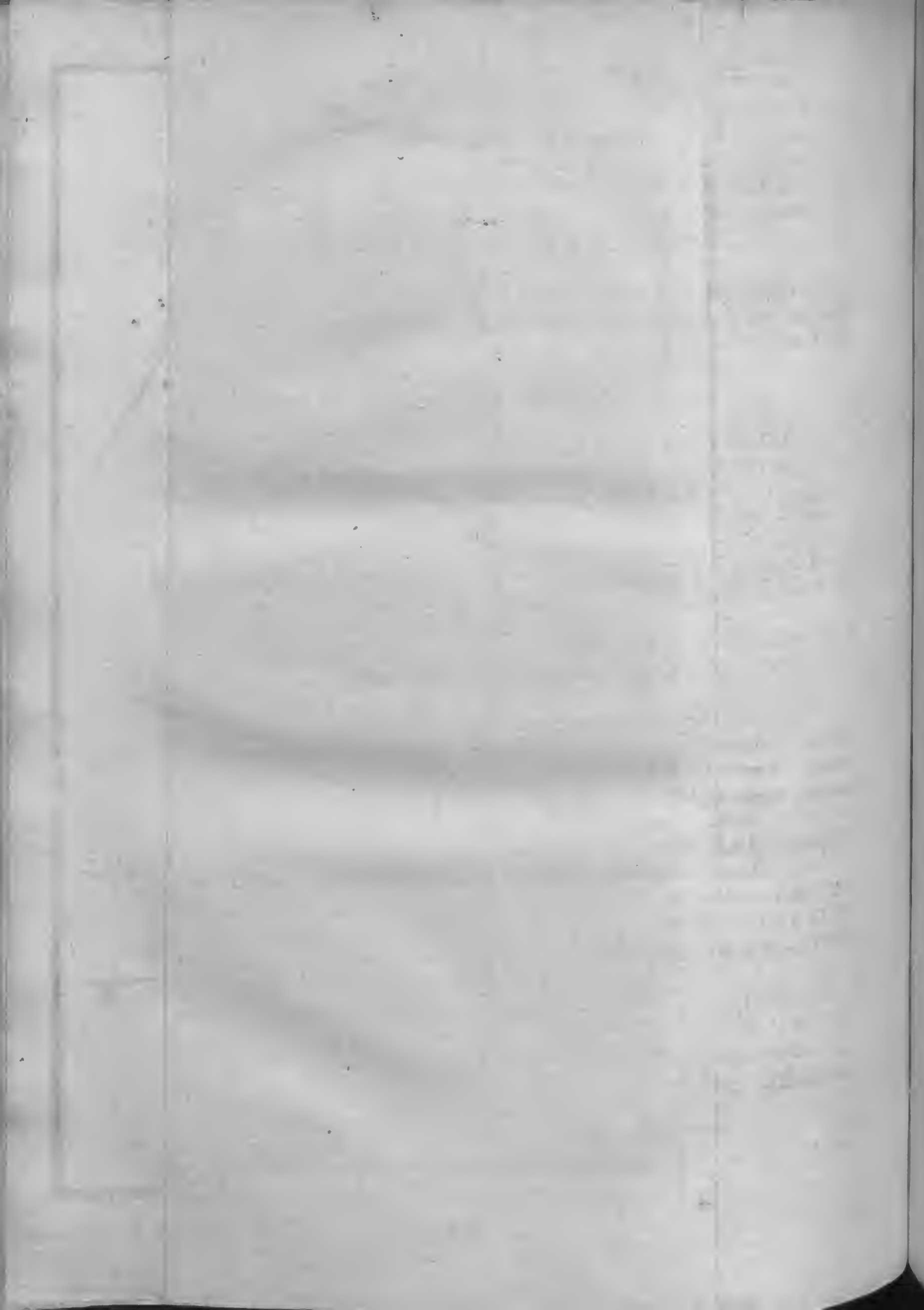








Foex. Fecit.



PROBLEME V.

TRouver sur la surface convexe d'un cylindre droit *ABCD*, Fig. 119. un point *E*, par lequel faisant passer un plan *ENH*, qui ne soit pas parallele à la base *CYD*; la section *ENHM* de ce plan avec le cylindre soit une ellipse. Fig. 119.

1. Par le point *E* & par l'axe *XY* du cylindre faisons passer le plan *ABCD* : ce plan est évidemment un parallelogramme par l'axe du cylindre.

2. Soit la ligne *EH* la commune Section du parallelogramme par l'axe & de la Section cherchée *ENHM*. Les lignes *EH*, *XY* sont dans le plan du parallelogramme. Menez *EG*, *FH* paralleles aux diametres paralleles *AB*, *CD* des cercles, qui terminent le cylindre : les lignes *GE*, *FH* seront paralleles ; & les lignes *EV*, *AX*; *ZH*, *YD* sont égales. Ainsi les triangles *ELV*, *LZH*, qui ont les angles en *L* égaux, les angles *LEV*, *LHZ* égaux, les côtez *EV*, *ZH* égaux, seront égaux. Donc $EL = LH$, & *EH* est divisée en deux parties égales au point *L*.

3. Supposons que le plan *ENHM* est droit au plan du parallelogramme *ABCD* par l'axe ; c'est-à-dire que *pr* commune Section du plan prolongé *ENHM* avec *CD* base prolongée du parallelogramme *ABCD* par l'axe, fasse les angles *Dpr*, *Hpr* droits.

4. Par le point *L* faisons aussi passer le plan *INKM* parallele à la base, cette Section est un cercle par la nature du cylindre, & *L* est son centre, & $IL = LK$. De plus *NM* commune Section de ce cercle, & de la Section cherchée *ENHM*, passe par le centre *L*, & est un diametre.

5. Les plans *INKM*, *CcD* sont paralleles & coupez par le plan prolongé *ENHM*: donc 16. 11. Eucl. les Sections, *NL*, qui est dans le plan *INKM*, *pr*, qui est dans le plan *Ccd* prolongé sont paralleles. Mais les angles *Hpr*, *Dpr* sont droits : donc les angles *ELN*, *ILN* sont aussi droits, 29. 1. Eucl. & *NL* est une appliquée à l'axe *EH* de la Section cherchée, & au cercle *INK*.

6. Après avoir tiré *AR* parallele à *EH*, faisons passer par le point *R* le plan *PTR* parallele à la base ; ce sera un cercle, dont la commune Section avec la Section *ENHM* soit *TSQ*. L'on démontrera, comme dans le cercle *INKM*, que les angles *TSE*, *TSP* sont droits, & que *TS* est une appliquée & à *EH* axe de la Section cherchée, & à *PR* diametre du cercle.

7. Nous pouvons maintenant appeller les connuës *AB*, $2a = PR = IK$; *IL*, $a = LK$; les inconnuës *AE*, x; *EF*, y; *EH*, $2z$; *EL*, $z = LH$. Les triangles *APR*, *EFH* sont équiangles, & ils ont les côtez $AR = EH$: donc $AP = EF$, y; & $EP = AP - AE$, $y - x$. Les triangles *EPS*, *EFH* sont aussi équiangles ; donc *EF*, y : *EP*, $y - x$ ::

EH, $2z$: ES, $\frac{2zy-2xz}{y}$; & $SH = EH - ES$, $2z - \frac{2yz+2xz}{y} = \frac{2xz}{y}$. Les triangles EPS, ELI ſont encore équiangles ; donc EL, z : LI, a :: ES, $\frac{2yz-2xz}{y}$: SP, $\frac{2ay-2ax}{y}$; & $SR = PR - PS$, $2a - \frac{2ay+2ax}{y} = \frac{2ax}{y}$.

8. A preſent par la nature de l'ellipſe $\overline{TS}^2$: $\overline{NL}^2$ :: $ES \times SH$: $EL \times LH$, & par la nature du cercle $\overline{TS}^2 = PS \times SR$, $\overline{NL}^2 = IL \times LK$.

Il faut mettre dans la premiere Analogie $PS \times SR$ pour $\overline{TS}^2$, $IL \times LK$ pour $\overline{NL}^2$: l'on aura $PS \times SR$, $\frac{4aaxy-4aaxx}{yy}$: $IL \times LK$, aa :: $ES \times SH$, $\frac{4xyzz-4xxzz}{yy}$: $EL \times LH$, zz. Donc $\frac{4aaxyzz-4aaxxzz}{yy} = \frac{4aaxyzz-4aaxxzz}{yy}$. $o = o$. Le lieu eſt à la ſurface courbe infinie du cylindre, & tous les points de cette ſurface peuvent être pris pour celui qu'on cherche : pourveu que les points E, H, ſoient pris ſur les deux côtez oppoſez du parallelogramme par l'axe, l'un plus près que l'autre de la baſe ; & que par ces points E, H, on faſſe paſſer un plan $ENHM$ perpendiculaire au parallelogramme. Il manque deux conditions pour déterminer le Problême : la premiere eſt le point E, ou la longueur AE, x ; la ſeconde eſt le point H, ou la longueur de GH, ou de EF, y.

PROBLEME VI.

FIG. 116. ETant donné Fig. 116. le triangle équilateral ABC, trouver au dehors de ce triangle le point e, duquel ayant tiré ſur les côtez prolongez, où il le faut, les perpendiculaires eF, eg, eh ; la difference de la perpendiculaire eF tirée ſur AC & de la ſomme des deux autres eg, eh ſoit égale à la perpendiculaire BD abbaiſſée du ſommet B ſur le même côté AC.

Après avoir donné les mêmes lettres aux lignes qui ſont ici les mêmes qu'au Problême II. l'on aura $FI = \frac{bx}{a}$; mais Ie ſera ici $\frac{bx}{a} + y$; on aura $FK = 2b - \frac{bx}{a}$; mais eK ſera ici $2b - \frac{bx}{a} + y$. Les triangles ſemblables BDA, Ieg donnent cette Analogie, Ab, $2a$: AD, a :: Ie, $\frac{bx}{a} + y$: eg, $\frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y$. Et les triangles équiangles BDC, heK celle-ci, BC, $2a$: DC, a :: Ke, $2b - \frac{bx}{a} + y$: eh, $b - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y$. Maintenant l'on demande $eh + eg - eF = BD$, c'eſt-à-dire en termes Algebriques $b - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y - y = b$; $b = b$, $o = o$, Et le Problême eſt à la ſurface plane infinie hors du triangle, & tous les points de cette ſurface peuvent être pris pour celui qu'on cherche. Deux conditions $AF = x$, $eF = y$ reſtent indéterminées.

PROBLEME VII.

FIG. 120. ETant donné Fig. 120. un parallelepipede droit $uyhk$, trouver dans ce ſolide un point a, par lequel faiſant paſſer trois plans $ſtqr$, $ixCm$, $nAzp$ paralleles chacun à deux ſurfaces oppoſées du parallelepipede : il reſulte huit nouveaux parallelepipedes, qui faſſent quatre à quatre deux proportions, c'eſt-à-dire, que $acft$: $aefl$ :: $aegD$: $aegq$. & $adfb$: $adfr$ :: $adgſ$: $adgr$.

Supposons la chose faite, & nommons les connuës Hl, $a = pn = kh = rq = de = ft = uy = zA = BD$. lh, $b = im = Hk = qt = cb = rs = yD = xC = uB$. hD, $c = mC = kB = nA = fg = pz = ly = ix = Hu$. Et les inconnuës mh, $z = fn = il = bt = ac = cq = DC = gA = xy$. $mk = kh - mh$, $a - z = fp = iH = rc = da = sb = BC = zg = xu$. th, $y = bm = sk = en = af = dp = ql = ci = rH$. $tD = Dh - th$, $c - y = Cb = Bs = Ae = ga = zd = yq = xc = ur$. hn, $x = fm = pk = te = ab = ds = DA = Cg = zB$. $ln = lh - nh$, $b - x = if = Hp = qe = ca = rd = yA = xg = uz$.

De sorte que les parallelepipedes seront 1° $aeft = xzy$, 2° $aefl = bzy - xzy$, 3° $aegD = cxz - xyz$, 4° $aegq = bcz - bzy - czx + xyz$, 5° $adfb = axy - xzy$, 6° $adfr = aby - axy - bzy + xzy$, 7° $adgs = -axy + xyz + acx - cxz$, 8° $adgr = -aby + axy + bzy - xzy + abc - acx - bcz + cxz$.

Les deux proportions Geometriques donneront $o = o$. Le lieu est au solide fini $uyhk$, de sorte que tous les points du parallelepipede proposé peuvent être pris pour celui qui est demandé, & satisfont au Problême. Les trois conditions qui manquent pour déterminer le point a sont celles-ci. 1. Il faut déterminer $hm = z$, & le point m, par lequel le plan $ixCm$ doit passer. 2. Il faut déterminer $ht = y$, & le point t, par lequel le plan $tqrs$ doit passer. 3. Il faut déterminer $hn = x$, & le point n, par lequel le plan $nAzp$ doit passer. Car ces trois plans n'ont que le point a de commun, & le déterminent par leurs intersections.

PROBLEME VIII.

ETant donnée la Sphere BGD Fig. 121. trouver un point C hors de cette Sphere, & un diametre EG dans la Sphere, tels, qu'ayant tiré la perpendiculaire CFD; on ait $CB \times CD = \overline{CF}^2 - \overline{FB}^2$. Fig. 121.

Je suppose la chose faite, & parceque 2. 11. Eucl. les lignes BD, EG sont dans un même plan, je fais passer un plan par ces lignes, qui sera le cercle $BGDE$, car toute Section d'une Sphere est un cercle par la Proposition 1. du Liv. 1. des Spheriques de Theodose, & le centre de ce cercle sera A centre de la Sphere. Je tire les rayons AB, AD.

Je nomme les connuës $AB = AD$, a; les inconnuës AF, y; CB, x. BF est égal à FD. De plus $\overline{BF}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AF}^2 = aa - yy$; & $BF = \sqrt{aa - yy} = FD$; $BD = 2\sqrt{aa - yy}$; $CF = CB + BF$, $x + \sqrt{aa - yy}$; $CD = CB + BD$. $x + 2\sqrt{aa - yy}$.

Par la supposition $CB \times CD = \overline{CF}^2 - \overline{FB}^2$. Ce qui s'exprime ainsi $xx + 2x\sqrt{aa - yy} = xx + 2x\sqrt{aa - yy} + aa - yy - aa + yy$; $o = o$. Le Problême est donc au solide infini, qui entoure la Sphere donnée BGD. Car le diametre GE, le point F de ce diametre, la longueur

de la perpendiculaire *FC* demeurent inconnuës ; trois choſes qu'il auroit fallu déterminer afin que le point *C* & le Problême euſſent été déterminez. Il eſt donc libre, de tirer le diametre *GE* tel qu'on voudra dans la Sphere, de choiſir le point *F* tel qu'on voudra ſur ce diametre, de faire la perpendiculaire *FC* de la longueur qu'on voudra : le point *C* ſatisfera toûjours à la queſtion. C'eſt la propoſition ſixiéme du Liv. II. des Elemens d'Euclide.

SECTION III.

Solution particuliere du Problême de Pappus, lorſqu'il eſt propoſé en cinq lignes.

M. DESCARTES.

Quelle eſt la premiere & la plus ſimple de toutes les lignes courbes, qui ſervent en la queſtion des Anciens, quand elle eſt propoſée en cinq lignes.

QUe ſi la queſtion des Anciens eſt propoſée en cinq lignes, qui ſoient toutes paralleles ; il eſt évident que le point cherché ſera toûjours en une ligne droite. Mais ſi elle eſt propoſée en cinq lignes, dont il y en ait quatre, qui ſoient paralleles, & que la cinquiéme les coupe à angles droits, & même que toutes les lignes tirées du point cherché les rencontrent auſſi à angles droits, & enfin que le parallelepipede compoſé de trois des lignes ainſi tirées ſur trois de celles qui ſont paralleles, ſoit égal au parallelepipede compoſé des deux lignes tirées, l'une ſur la quatriéme de celles qui ſont paralleles, & l'autre ſur celle qui les coupe à angles droits, & d'une troiſiéme ligne donnée. Ce qui eſt ce ſemble le plus ſimple cas qu'on puiſſe imaginer après le precedent ; le point cherché ſera en la ligne courbe, qui eſt décrite par le mouvement d'une parabole en la façon * ci-deſſus expliquée.

* Part 1. Sect. 4. §.2. n.6.

Fig. 122.

Soient par exemple Fig. 122. les lignes cherchées *AB*, *IH*, *ED*, *GF*, & *GA*, & qu'on demande le point *C*, en ſorte que tirant *CB*, *CF*, *CD*, *CH* & *CM* à angles droits ſur les données, le parallelepipede des trois *CF*, *CD*, & *CH* ſoit égal à celui des deux autres *CB* & *CM*, & d'une troiſiéme qui ſoit *AI*. Je poſe $CB = y$; $CM = x$; *AI* ou *AE*, ou $GE = a$; de façon que le point *C* étant entre les lignes *AB* & *DE*, j'ai $CF = 2a - y$; $CD = a - y$, & $CH = y + a$; & multipliant ces trois l'une par l'autre,

j'ai $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ égal au produit des trois autres, qui est axy. Après cela je considere la ligne courbe CEG, que j'imagine être décrite par l'intersection de la parabole CKN, qu'on fait mouvoir en telle sorte que son diametre KL est toûjours sur la ligne droite AB, & de la Regle GL, qui tourne cependant autour du point G, en telle sorte qu'elle passe toûjours dans le plan de cette parabole par le point L. Et je fais $KL = a$, & le côté droit principal, c'est-à-dire, celui qui se rapporte à l'aissieu de cette parabole aussi égal à a, & $GA = 2a$; & CB ou $MA = y$, & CM ou $AB = x$. Puis à cause des triangles semblables GMC, & CBL; GM qui est $2a - y$ est à MC qui est x, comme CB qui est y est à BL qui par consequent est $\frac{xy}{2a-y}$. Et pourceque LK est a, BK est $a - \frac{xy}{2a-y}$ ou bien $\frac{2aa - ay - xy}{2a-y}$.

Et enfin pourceque ce même BK étant un segment du diametre de la parabole est à BC qui lui est appliquée par ordre, comme celle-ci est au côté droit, qui est a, le calcul montre que $y^3 - 2ayy - ayy + 2a^3$ est égal à axy; & par consequent que le point C est celui qui étoit demandé. Et il peut être pris en tel endroit de la ligne CEG qu'on veuille choisir, ou aussi en son adjointe $cEGc$, qui se décrit en même façon, excepté que le sommet de la parabole est tourné vers l'autre côté, ou enfin en leurs contreposées NIo, nIO, qui sont décrites par l'intersection que fait la ligne GL en l'autre côté de la parabole KN.

Or encore que les paralleles données AB, IH, ED, & GF ne fussent point également distantes, & que GA ne les coupât point à angles droits, ni aussi les lignes tirées du point C vers elles; ce point C ne laisseroit pas de se trouver toûjours en une ligne courbe, qui seroit de cette même nature. Et il s'y peut aussi trouver quelquefois, encore qu'aucune des lignes données ne soient paralleles. Mais lorsqu'il y en a quatre ainsi paralleles, & une cinquiéme qui les traverse: & que le parallelepipede de trois des lignes tirées du point cherché, l'une sur cette cinquiéme, & les deux autres sur deux de celles qui sont paralleles, soit égal à celui des deux tirées sur les deux autres paralleles, & d'une autre ligne donnée: ce point

cherché est en une ligne courbe d'une autre nature, à savoir en une qui est telle, que toutes les lignes droites appliquées par ordre à son diametre étant égales à celles d'une Section conique, les segmens de ce diametre, qui sont entre le sommet & ces lignes, ont même proportion à une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux segmens du diametre de la Section conique, ausquels les pareilles lignes sont appliquées par ordre. Et je ne saurois veritablement dire que cette ligne soit moins simple, que la precedente, laquelle j'ai crû toutesfois devoir prendre pour la premiere, à cause que la description, & le calcul, en sont en quelque façon plus faciles.

Les choses dont nous parlerons ici sont 1. la solution du Problême de Pappus, lorsque les cinq lignes données sont toutes paralleles à une seule. 2. Lorsque il y a quatre lignes données paralleles, & une cinquiéme qui les coupe. 3. Quelle est la ligne la plus simple, qui satisfasse au Problême de Pappus, lorsqu'il est proposé en cinq lignes. 4. Parceque M. DESCARTES, Liv. 1. Part. 3. Sect. 2. a dit, que le Problême de Pappus étant proposé en cinq lignes, les points cherchez peuvent se trouver en une ligne droite, en un cercle, & en une des Sections coniques, nous en donnerons quelques Exemples. Bien plus trois ou quatre lignes étant données, nous montrerons que ces points peuvent être sur une courbe d'un genre plus élevé. 5. Avant que de finir cette seconde Partie nous examinerons si la question de Pappus peut être proposée d'une maniere entierement impossible. 6. Nous ajoûterons ce que M. DESCARTES dit encore ici touchant les differentes especes de courbes & leur description.

ARTICLE I.

Les cinq lignes données sont paralleles à une seule.

LOrsque les cinq lignes données sont toutes paralleles à une seule, Mr DESCARTES dit dans cette Section, qu'il est évident que le point cherché est dans une ligne droite. C'est ce qui se conclurra de la construction des Exemples qu'on apportera. Et il a dit Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. que ce point ne peut être trouvé avec la Regle & le Compas, à *cause que la quantité* x *ne se trouvant point en toute l'équation, il ne sera plus permis de prendre une quantité connuë pour celle qui est nommée* y *; mais ce sera elle qu'il faudra chercher ; & pour ce qu'elle aura trois dimensions, on ne la pourra trouver, qu'en tirant la racine d'une équation cubique ; ce qui ne se peut generalement faire, sans qu'on y employe pour le moins une Section conique.* La racine cubique sera extraite

extraite sans le secours d'aucune Section conique, Ex. 1. 2. & par le moyen d'une telle Section, Exemple 3.

EXEMPLE I. $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = 64a^3$.

SOient données Fig. 124. les cinq lignes paralleles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff: il faut trouver un point C, duquel ayant tiré sur les données les perpendiculaires CA, CB, CD, CE, CF; le parallelepipede sous CB, CD, CE soit égal au parallelepipede sous CA, CF, & la donnée $BD = a = 1$. FIG. 124.

La distance des paralleles est connuë : que DE soit $2a$; AB, $\sqrt{65aa} = BF$; CB, y; $CD = CB - BD$; $y - a$; $CE = CB - BE$, $y - 3a$; $CA = CB + BA$, $y + \sqrt{65aa}$; $CF = BF - CB$, $\sqrt{65aa} - y$.

Puisque l'on demande $CB \times CD \times CE = CA \times CF \times a$; l'équation sera $y^3 - 4ayy + 3aay = - ayy + 65a^3$; $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = 64a^3$, ou $y^3 - 3ayy + 3aay - 65a^3 = 0$. Extrayez la racine cubique de $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = 64a^3$ selon la methode ordinaire de l'Algebre, vous aurez $y - a = 4a$; $y = 5a$. Que si vous extrayez les racines de $y^3 - 3ayy + 3aay - 65a^3 = 0$. Selon la methode de Liv. 3. Part. 3. Sect. 2. en divisant par $y - 5a = 0$; le quotient est $yy + 2ay + 13aa = 0$, dont les racines sont $y = - a \pm \sqrt{- 12aa}$: ainsi vous trouvez trois racines, la premiere $y - 5a = 0$, ou $y = 5a$; la seconde $y = - a + \sqrt{- 12aa}$, la troisiéme $y = - a - \sqrt{- 12aa}$; les deux dernieres sont imaginaires; la premiere, qui est la même, que la methode ordinaire avoit trouvée, se construit ainsi.

Faites $BC = 5a$, par le point C menez la ligne Cc parallele à Bb, elle est le lieu cherché. Au point c tirez des lignes paralleles aux autres cb à CB, cd à CD, &c.

Dém. Vous avez $cb = CB$, y; $cd = CD$, $y - a$; $ce = CE$, $y - 3a$; $ca = CA$, $y + \sqrt{65aa}$; $cf = CF$, $\sqrt{65aa} - y$: & l'équation $y^3 - 4ayy + 3aay = - ayy + 65a^3$, comme auparavant au point C.

EXEMPLE II. $y^3 - 14ayy + 20aay + 224a^3 = 0$.

SOient données, Fig. 125. les cinq lignes paralleles entr'elles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff: il faut trouver un point C, duquel ayant tiré les lignes CA, CB, CD, CE, CF, faisant avec les données un angle droit; le parallelepipede sous CB, CE, CF soit égal au parallelepipede sous CA, CD & une donnée $BF = 4a$. FIG. 125.

Parcequ'on connoît les distances des lignes données : que BA soit $8a$; BD, $7a$, DE, a; EF, $2a$; BF, $4a$; BE, $6a$; CB, y; donc CA, $y + 8a$, CD, $y - 7a$; CE, $y - 6a$, CF, $y - 4a$.

L'équation sera $y^3 - 14ayy + 20aay + 224a^3 = 0$ dont les racines sont $y = 8a$, $y = 3a \pm \sqrt{37aa}$.

La racine $y = 8a$ se construit en prenant $BC = 8a$ & menant Cc parallele à Bb.

La racine $y = 3a + \sqrt{37aa}$ se construit en prenant $BK = 3a + \sqrt{37aa}$, & la racine $y = 3a - \sqrt{37aa}$ en prenant $Bk = - 3a + \sqrt{37aa}$: les lignes qui seront tirées par K, k paralleles à Bb satisferont au Problême.

1° Au point K, nous trouvons les mêmes valeurs, qu'au point C, donc l'équation sera la même. 2° Au point k nous avons kB, $-y$; kA, $8a + y$; kF, $-y + 4a$; kE, $-y + 6a$; kD, $-y + 7a$, & la même équation qu'auparavant.

Dans ces deux Exemples l'on ne s'est pas servi d'aucune Section conique, mais la division a suffit. La construction de ces deux Exemples vous montre que les lieux cherchez peuvent être dans une ligne droite, lorsque les lignes données sont toutes paralleles à une seule.

EXEMPLE III. $y^3 - 6ayy + 9aay + 2a^3 = 0$.

FIG. 126. SOient Fig. 126. données les cinq lignes toutes paralleles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff. Il faut trouver le point C d'où ayant tiré sur les données les lignes CA, CB, CD, CE, CF, faisant avec elles des angles de 60. degrez; le parallelepipede sous CA, CD, CE soit égal au parallelepipede sous CB, CF, & une ligne donnée égale à $4a$.

Supposez la chose faite, & parcequ'on connoît les angles que les cherchées font avec les données, l'on connoît aussi les lignes AB, BD, $DE = a$; $EF = \frac{1}{2}a$; CB, y; CA, $y + a$; CD, $y - a$, CE, $y - 2a$; CF, $y - \frac{5}{2}a$.

L'équation sera $y^3 - 6ayy + 9aay + 2a^3 = 0$.

Si vous voulez la construire, & pour cela connoître ses racines; la Methode, dont je me suis servi aux deux Exemples precedens ne suffit pas; il faut par l'intersection d'un cercle & d'une parabole découvrir la seule racine CB de l'équation, comme on le fera Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. La ligne Cc parallele à Bb est le lieu cherché.

Dém. Comme aux Exemples 1. 2.

ARTICLE II.

Quatre lignes sont paralleles, & une cinquiéme les coupe.

FIG. 122. 123. 57. LE cas le plus simple, après le precedent, dans lequel le Problême de Pappus a été proposé en cinq lignes toutes paralleles à une seule; c'est selon M. DESCARTES, le cas dans lequel ce Problême est proposé en cinq lignes, dont quatre sont paralleles à une seule, & la cinquiéme les coupe; comme Fig. 122. 123. 57.

Les deux differentes combinaiſons, qu'on peut faire des lignes cherchées qui ſe multiplient avec une donnée, fourniſſent deux courbes de nature differente.

1. Si l'on demande que le parallelepipede composé par la multiplication de trois des lignes cherchées tirées ſur trois des données qui ſont paralleles, ſoit égal au parallelepipede composé 1° des deux autres lignes cherchées, tirées l'une ſur la quatriéme donnée parallele, l'autre ſur celle qui coupe les paralleles; 2° d'une troiſiéme ligne donnée : alors le point cherché eſt ſur la courbe décrite, Part. 1. Sect. 4. §. 2. n. 6. que nous appellons ici la premiere eſpece de courbes. Au reſte en gardant cette condition dans la multiplication des lignes, l'on fait quatre combinaiſons differentes que l'on conſtruira dans les quatre premiers Exemples. La premiere que M. DESCARTES a conſtruite, eſt, $CD \times CF \times CH = CB \times CM \times a$; la ſeconde $CB \times CF \times CH = CD \times CM \times a$; la troiſiéme $CB \times CD \times CF = CH \times CM \times a$; la quatriéme $CB \times CD \times CH = CF \times CM \times a$.

Toutes ces choſes étant ſuppoſées, il peut encore arriver, ou en premier lieu que les quatre paralleles ſoient également éloignées l'une de l'autre, que la cinquiéme les coupe à angles droits, que les lignes cherchées ſoient perpendiculaires ſur les données, comme Ex. 1. 2. 3. 4. Ou en ſecond lieu que, tout le reſte demeurant le même, la diſtance des paralleles ſoit differente, comme Exemple 5. ou en troiſiéme lieu, que la cinquiéme ligne ne coupe pas les quatre paralleles à angles droits, comme Exemple 6. ou en quatriéme lieu que les lignes cherchées ne ſoient pas perpendiculaires aux données, comme Exemple 6. Dans tous ces cas la courbe cherchée eſt de même nature. Il peut auſſi arriver en cinquiéme lieu qu'aucune des données ne ſoit parallele à une autre, & que les cherchées faſſent differens angles avec les données, & que la courbe ſoit encore de même nature, comme Exemple 7.

2. Lorſqu'il y a quatre lignes ainſi paralleles, & une cinquiéme qui les traverſe; & que le parallelepipede de trois des lignes tirées du point cherché, l'une ſur cette cinquiéme, & les deux autres ſur deux de celles qui ſont paralleles; ſoit égal à celui des deux tirées ſur les deux autres paralleles, & d'une autre ligne donnée : ce point cherché eſt ſur une ligne courbe d'une autre eſpece, que M. DESCARTES explique ainſi. *Toutes les lignes droites appliquées par ordre à ſon diametre étant égales à celles d'une Section conique, les ſegmens de ce diametre, qui ſont entre le ſommet & ces lignes, ont même proportion à une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux ſegmens du diametre de la Section conique, auſquels les pareilles lignes ſont appliquées par ordre.* M. DESCARTES n'oſe pas aſſurer que cette ligne courbe ſoit moins ſimple que la precedente. Au reſte en gardant la condition, dont on vient de parler, dans la multiplication des lignes, on peut faire ſix combinaiſons differentes, que l'on conſtruira dans les ſix derniers Exemples. La

premiere eſt $CM \times CB \times CD = CF \times CH \times a$; la ſeconde $CM \times CB \times CF = CD \times CH \times a$; la troiſiéme $CM \times CB \times CH = CD \times CF \times a$; la quatriéme $CM \times CD \times CF = CB \times CH \times a$; la cinquiéme $CM \times CD \times CH = CB \times CF \times a$; la ſixiéme $CM \times CF \times CH = CB \times CD \times a$. L'ordre n'eſt pas le même dans les Exemples.

3. La differente nature de ces deux eſpeces de courbes conſiſte en ce que dans l'équation de la premiere eſpece l'une des inconnuës y monte au troiſiéme degré y^3, & que les deux enſemble font un plan xy; mais dans l'équation de la ſeconde eſpece y ne monte ſéparément qu'au quarré yy, & que les deux enſemble font le ſolide xyy.

EXEMPLE I. $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

Fig. 122. 123. 57. C'Eſt l'Exemple de M. DESCARTES, Fig. 122. Tout ce que nous liſons dans ſa Géometrie touchant le calcul, la conſtruction, & la démonſtration faite au point C eſt fort clair. Ce qu'il omet à la fin du calcul, eſt aiſé : car ſi BK eſt $\frac{2aa - ay - xy}{2a - y}$, & que le parametre de la parabole ſoit a; on aura par la nature de la parabole $\frac{2a^3 - aay - axy}{2a - y} = yy$; $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

Le point C, ajoûte M. DESCARTES, peut être pris en tel endroit de la ligne CEG, qu'on veüille choiſir, ou auſſi en ſon adjointe cEe, ou enfin en leurs contrepoſées NIo, nIO. Ces quatre lignes ſe décrivent de cette maniere. La premiere CEG qui eſt renverſée Fig. 123. & ſa contrepoſée NIo ſe décrivent par le même mouvement de la Regle GL, qui coupe les deux côtez de la parabole renverſée CKN. L'une CEG eſt tracée par l'interſection de la Regle GL & de la portion KC infinie de la parabole ; l'autre NIo eſt tracée par l'interſection de la Regle GL & de l'autre portion infinie KN de la même parabole. La courbe GCE Fig. 57. & ſa contrepoſée OIn ſont décrites par un même mouvement de la Regle GL, qui coupe les deux côtez de la parabole droite CKO. L'une GCE eſt tracée par l'interſection de la Regle GL & de la portion infinie KC de la ligne parabolique ; l'autre OIn eſt tracée par l'interſection de la même Regle GL, & de l'autre portion infinie KO de la même ligne parabolique.

Pour connoître ſi le point C peut ſe prendre ſur ces quatre courbes, il faut examiner, ſi tous leurs points donnent la même équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$. Soit 1° par la valeur des lignes tirées du point C ſur les lignes données ; ſoit 2° par la conſideration des triangles ſemblables formez dans la generation de la courbe.

1. Au point c de la courbe CEc renverſée Fig. 122. L'on a cB, y; cm, x; $cF = y - 2a = mG$; $cD = y - a$; $cH = y + a$. Et l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, même équation qu'au point C.

Mais pour examiner plus aiſément les triangles cmG, cbl paſſons à la

Figure 123. où ils sont formez. On a cette Analogie $Gm, y - 2a : mc, x :: cb, y : bl, \frac{xy}{y-2a}$; donc $bk = a + \frac{xy}{y-2a} = \frac{ay - 2aa + xy}{y-2a}$; & par la nature de la parabole, $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, même équation qu'au point C.

Au point c pris au dessous de la ligne GA, Fig. 122. comme Fig. 123. on a cb, y; $cm, -x$. Les autres lignes qui ne sont pas tirées sont $cf, 2a - y = Gm$; $cd, y - a$; $ch, y + a$, ce qui donne l'équation du point C. De plus dans les triangles Gmc, cbl; $Gm, 2a - y : cm, -x :: cb, y : bl, \frac{-xy}{2a-y}$; & $bk, a \frac{-xy}{2a-y}$ d'où par la nature de la parabole on a l'équation du point C.

2. Au point N de la courbe NIo, contreposée de la courbe renversée CEc, on a Nm, x qui n'est pas tirée, $Nb, -y$, $Nf, -y + 2a = Gm$, $Nd, y + a$; $Nh, -y - a$; d'où l'on à l'équation du point C. Dans les triangles GmN, NbL, Fig. 123. $Gm, -y + 2a : Nm, x :: Nb, -y : bL, \frac{-xy}{-y+2a}$; donc $bK = a \frac{-xy}{-y+2a}$ d'où par la nature de la parabole, on a encore l'équation comme auparavant.

Au point o de la même contreposée, entre les paralleles IH, AB, Fig. 122. on a $om, -x$; $ob, -y$; $of = Gm, -y + 2a$; $od, -y + a$; $oh, a + y$ & même équation qu'au point C. & Fig. 123. aux triangles $Gmo, obl, Gm : om :: ob : bl$. Dessors bk est $a \frac{-xy}{-y+2a}$, qui donne encore l'équation du point C.

3. Au point c de la courbe droite cEc, pris entre les paralleles AB, ED; si les lignes étoient tirées on auroit $cm, -x$; cb, y; $cf, 2a - y, = Gm$; $cd, a - y$; $ch, y + a$; & l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$ & Fig. 57. dans les triangles $Gmc, cbl, Gm, 2a - y : mc, -x :: cb, y : bl, \frac{-xy}{2a-y}$ & $bk, a \frac{+xy}{2a-y}$ d'où par la nature de la parabole on a la même équation differente de celle qui s'est trouvée au point C de la courbe renversée.

Au point c de la courbe cEc pris au dessus de AG, on aura cm, x; cb, y; $cf, 2a - y = GM$, $cd, y - a$; $ch, y + a$, & l'équation de n. 3. qu'on aura encore par la nature de la parabole, Fig. 57. dans les triangles GMC, CBL, où $GM : CM :: CB : BL$. & $BK = KL + LB = a \frac{+xy}{2a-y}$.

Au point c pris hors des paralleles on aura $cm, -x$; cb, y; $cf, y - 2a = Gm$; $cd, y - a$; $ch, y + a$, & l'équation de n. 3.

En suite si l'on suppose Fig. 57. la ligne Gl, & les autres qui conviennent, on fera les deux triangles équiangles Gmc, cbl, dans lesquels on trouvera cette proportion $Gm, y - 2a : cm, -x :: cb, y : bl, \frac{-xy}{y-2a}$. Donc $kb = kl + bl, a \frac{-xy}{y-2a}$; & par la nature de la parabole $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$, comme auparavant.

4. Au point O, Fig. 122. de la courbe OIn contreposée de la courbe cEc, on a Om, qui n'est pas tirée $= x$; $Ob, -y$; $Of, -y + 2a =$

Gm; Od, $-y+a$, Oh, $a+y$; ce qui donne l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$, qu'on trouvera encore Fig. 57. dans les triangles GmO, ObL; car $Gm : Om :: Ob : bL$. & $Kb = a \frac{+xy}{-y+2a} \times$ le parametre $a = yy$. Equation cherchée.

Au point n de la même courbe OIn, vous avez nm, $-x$, nb, $-y$; nf, $-y+2a = Gm$, nd, $-y+a$; nh, $-y-a$ & l'équation cherchée, & Fig. 57. aux triangles Gmn, nbl; $Gm : mn :: nb : bl$. & $bk = a \frac{+xy}{-y+2a}$ comme auparavant.

Si les appliquées des deux contreposées avoient été $+y$ l'équation de NIo auroit été $y^3 + 2ayy - aay - 2a^3 = axy$ & l'équation de OIn $y^3 + 2ayy - aay - 2a^3 = -axy$. Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 2. n. 6.

Mais on ne trouve pas sur ces deux courbes l'équation, qu'on a trouvée au point C, qui est $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$. M. DESCARTES suppose Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 3. que l'équation de la conchoïde droite cEc est $y^3 - 2ayy - ayy + 2a^3 = -axy$.

5. Cependant on peut faire en sorte que la même équation se trouve à tous les points de ces quatre courbes, qu'on peut appeller conchoïdes paraboliques, afin que le point C puisse être pris sur toutes ces courbes, ainsi que M. DESCARTES l'assure. Il faut 1° supposer, comme on l'a fait, que les appliquées à l'axe, qui se prennent de A vers G sont $+y$, celles qui se prennent de A vers I sont $-y$; & cela pour les quatre courbes. 2° Il faut, comme on l'a aussi fait, pour la conchoïde renversée CEc, & pour sa contreposée NIo, que les $+x$ se prennent de A vers L en montant, & les $-x$ de l'autre côté du point A en descendant. 3° Il faut pour la conchoïde droite cEc & pour sa contreposée OIn, qu'au contraire les $+x$ se prennent en allant de A vers n, & les $-x$ de A vers L.

FIG. 63. 6. Vous pourrez voir Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Fig. 63. la maniere de décrire la conchoïde renversée avec sa contreposée, en cherchant differens points de ces courbes. Par la même methode vous pourriez chercher les differens points de la conchoïde droite & de sa contreposée.

Selon la Regle 2. de cette Methode je change l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$ de la conchoïde renversée & de sa contreposée en celle-ci $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, & l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$ de la conchoïde droite & de sa contreposée en celle-ci $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{-ay}$.

FIG. 122. Faisons selon la Regle 5. $y = o$, les équations precedentes sont $x = \frac{2a^3}{o}$, ce qui marque selon la Reg. 4. que l'axe AB Fig. 122. auquel les y se terminent, est asymptote des quatre courbes. Je fais ensuite $x = o$, les équations se reduisent à $y^3 - 2aay - aay + 2a^3 = o$. Dont les racines sont $y = a$, $y = 2a$ positives, $y = -a$ negatives, ce qui fait voir que les

courbes passent par le point G, étant $GA = 2a = y$; par le point E, étant $EA = a = y$; par le point I, étant $AI = a = -y$. Ainsi les courbes, CEc, cEc conchoïdes droite & renversée se coupent aux points G, E; & leurs contreposées au point I. Tout cela est expliqué dans les endroits qu'on vient de citer.

EXEMPLE II. $y^3 - ayy - 2aay = axy - aax$.

1. APrès avoir supposé Fig. 122. la même position des lignes tant données que cherchées, & la même valeur des cherchées que M. DESCARTES leur a determinée dans sa Geometrie. On demande, que $CB \times CF \times CH$ soit égal à $CD \times CM \times a$: ce qui donne l'équation $y^3 - ayy - 2aay = axy - aax$. Fig. 122.

2. Pour construire cette équation Fig. 127. je mets l'axe KL de la parabole kn, dont le parametre est a, sur la ligne ED: étant $KL = a$, je fais passer la Regle IL par les points I, L; elle tourne autour du Pole I, passe toûjours par le point L, & fait mouvoir l'axe KL toûjours sur ED. L'intersection de la Regle IL & de la ligne parabolique CKN décrira les deux courbes IAC, NGo, qui satisfont au Problême. Fig. 127.

Dém. 1° C'est au point C que l'on suppose que le calcul s'est fait. De plus les triangles IMC, CDL équiangles donnent cette Analogie $GM = CH, y + a : MC, x :: CD, a - y : DL, \frac{ax - xy}{y + a}$; qui étant ôtée de KL, donne $KD = a \frac{-ax + xy}{y + a}$. D'où par la proprieté de la parabole on forme encore l'équation à construire.

2° Au point N on a Nm, x; Nb, y; $Nf = y - 2a$; $Nd = y - a$; $Nh = y + a = Im$. Les triangles équiangles ImN, NdL donnent, $Im, y + a : mN, x :: Nd, y - a : dL, \frac{xy - ax}{y + a}$, qui étant ajoûtée à KL, fait $Kd = a \frac{+xy - ax}{y + a} = \frac{ay + aa + xy - ax}{y + a}$. Or par la nature de la parabole, on aura l'équation cherchée, qui se forme aussi par $Nb \times Nf \times Nh = Nd \times Nm \times a$. On trouvera aussi de même maniere la même équation dans tous les autres points de la conchoïde renversée IAC, & de sa contreposée NGo, qui par consequent satisfont au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Changez l'équation $y^3 - ayy - 2aay = axy - aax$ en celle-ci, $x = \frac{y^3 - ayy - 2aay}{ay - aa}$. Soit 1° $y = 0$; l'équation devient $x = \frac{0}{-aa}$, ainsi comme c'est au point A que les x & les y commencent, & sont nulles, la courbe passe par le point A, Reg. 4. §. 3. Art. 3. Sect. 4. Part. 1. Liv. 2. Soit 2° $x = 0$; l'équation se change en $y^3 - ayy - 2aay = 0$. Qui se divise juste par $y = 0$, & le quotient est $yy - ay - 2aa = 0$, lequel se divise encore par $y - 2a = 0$, & le nouveau quotient est $y + a = 0$; de sorte que les trois racines sont $y = 0$, $y = 2a$, $-y = a$, lorsque $x = 0$. Et comme x est nul dans la ligne IG, il suit que la courbe ou les courbes cherchées

Regle 4. coupe IG en trois points ; au point A, ou $y = o$, ainſi qu'on l'a déja dit ; au point I, ou $-y = IA = a$; au point G, ou $y = AG = 2a$. Soit 3°, parmi pluſieurs valeurs qu'on peut donner à y, $y = a$; l'équation ſe change en $x = \frac{a^3 - 2a^3 - a^3}{aa - aa} = \frac{-2a^3}{o}$, ce qui fait voir Regle 4. 5. que la droite ED, ſur laquelle DB, y ſeroit a, eſt aſymptote des deux conchoïdes IAC, NGo.

La parabole KC eſt ici renverſée : vous pourriez la mettre droite, & vous décririez les deux autres conchoïdes de Fig. 122. Vous pourriez auſſi poſer la parabole droite dans tous les Exemples ſuivans.

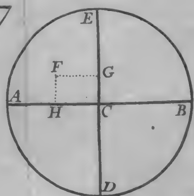
EXEMPLE III. $y^3 - aay = axy - 2aax$.

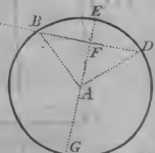
Fig. 122. 123. 1. Après avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur a données dans ſa Geometrie : on demande $CB \times CD \times CH = CF \times CM \times a$, ce qui produit l'équation $y^3 - aay = axy - 2aax$.

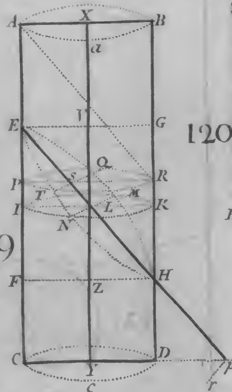
2. Pour conſtruire cette équation Fig. 128. la Regle GL tourne autour du Pole G, & paſſe toûjours par le point L de l'axe KL de la parabole KC, étant $KL = a$, & fait gliſſer cet axe ſur la Regle immobile AB. Une autre Régle AC tourne autour du Pole A. On conduit les Regles GL, AC avec un poinçon S ſur la Regle immobile ED, de ſorte qu'elles s'y coupent continuellement. L'interſection continuelle de la ſeconde Regle mobile AC avec la ligne parabolique KC décrit la courbe $NECAIT$, qui donne dans tous ſes points l'équation propoſée.

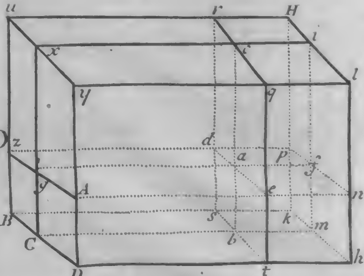
Dém. 1° Prolongez CM en R, où elle coupera la Regle GL, menez RP parallele à CB ; vous aurez $RP = CB = MA$; $RM = AP$. Et les triangles AES, GES égaux. 2° Les triangles AMC, GMR ſont équiangles, donc $AM = CB$, $y : MC, x :: GM = CF$, $2a - y : MR$, $\frac{2ax - xy}{y} = AP$. 3° Les triangles RLP, CAB ſont égaux, donc la ligne LB ſera égale à AP, $\frac{2ax - xy}{y}$. 4° Si de $KL = a$, l'on ôte LB, il reſte $KB = a - \frac{2ax + xy}{y} = \frac{ay - 2ax + xy}{y}$. 5° Par la nature de la parabole $y^3 - aay = axy - 2aax$, équation propoſée ; qui a auſſi été trouvée par la multiplication de $CB \times CD \times CH = CF \times CM \times a$, puiſque c'eſt au point C, que le calcul a été fait. On trouvera la même équation à tous les points de la courbe $NCEAIT$, on conclurra, qu'elle eſt le lieu cherché.

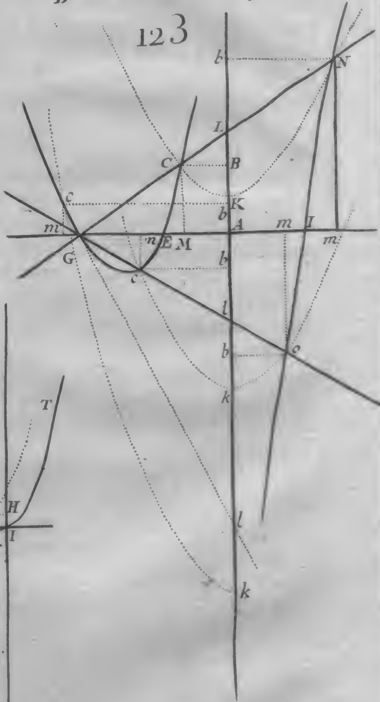
3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1° $y^3 - aay = axy - 2aax$, changée en $x = \frac{y^3 - aay}{ay - 2aa}$. Soit 2° $x = o$. L'équation ſe change en $y^3 - aay = o$. dont la premiere racine eſt $y = o$, & le quotient eſt $yy - aa$, dont les deux racines ſont $y - a = o$, $y + a = o$, où $y = a$, $-y = a$. De ſorte que x étant nul ſur GA, la courbe coupe GA en trois points differens, la premiere en A où $y = o$; le ſecond en E, où AE, $y = a$; le troiſiéme en I, où AI, $-y = a$. Soit 3° $y = o$, l'équation

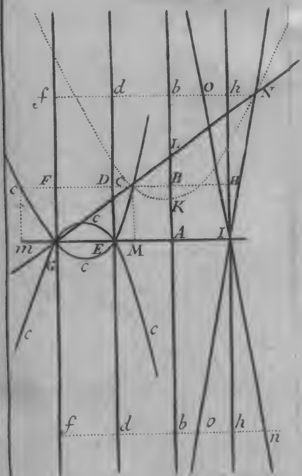


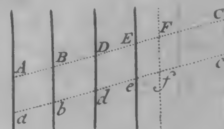


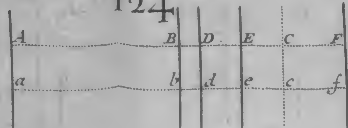


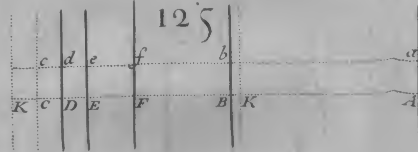


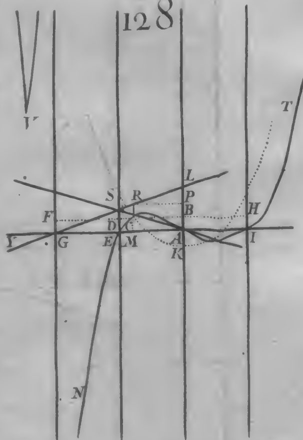


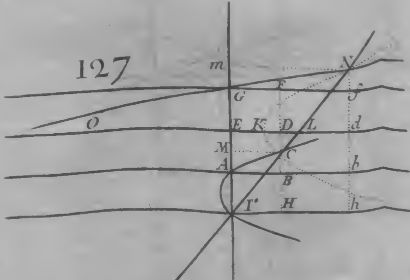




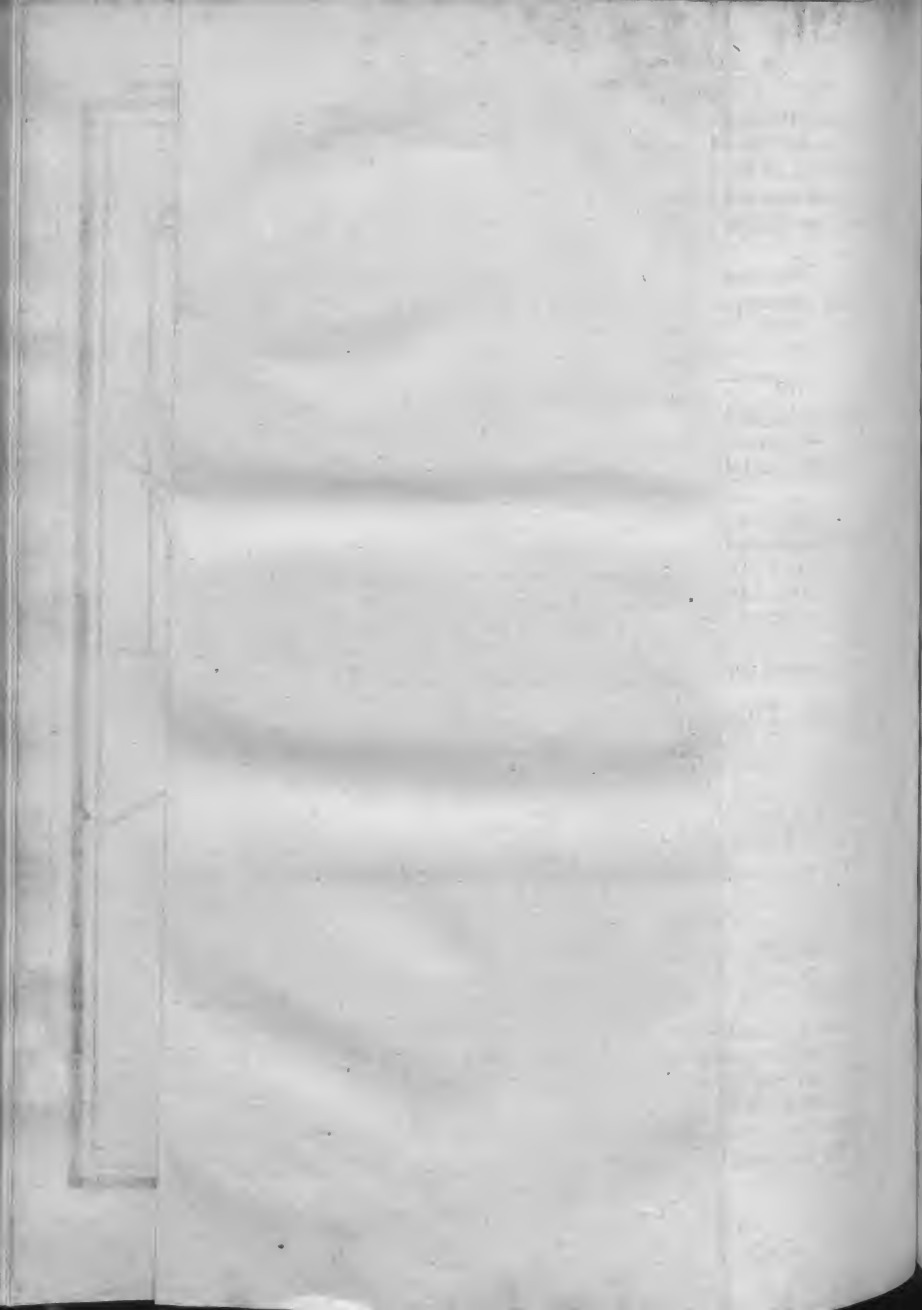








Gravé par Daudet.



l'équation devient $x = \frac{0}{-2aa}$, ce qui ne découvre rien de nouveau. Soit 4° $y = \frac{1}{2}a$, l'équation devient $x = \frac{1}{4}a$ valeur positive ; ainsi les $+x$ se prenant, en allant de *A* vers *B*, la courbe monte au dessus de *AG* entre les paralleles *AB*, *ED*. Soit 5° $y = \frac{5}{4}a$, l'équation sera $x = -\frac{45}{48}a$, ou $-x = \frac{15}{16}a$; & parceque les $-x$ se prennent au dessous de *AG*, la courbe descend au dessous de *AG* entre les paralleles *DE*, *GF*. Soit 6° $y = 2a$ nous aurons $x = \frac{8a^3 - 2a^3}{2aa - 2aa} = \frac{6a^3}{0}$; ce qui prouve que *GF*, d'où *GA*, $y = 2a$ doit partir, est asymptote de la courbe, ou des courbes qu'on décrit. Pour connoitre, comment la courbe *NECAIT* s'étend du côté de *I* ; Soit 7° $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, l'équation proposée se change en $x = -\frac{3}{20}a$, ou $-x = \frac{3}{20}a$: c'est pourquoi la courbe descend au dessous de *GA* entre les paralleles *AB*, *IH*. Soit 8° $-y = 2a$, ou $y = -2a$, l'équation devient $x = +\frac{3}{2}a$, par où l'on voit que la courbe remonte au dessus de *AG* au déla de *IH*. Et si l'on continuë à prendre differentes valeurs de $-y$, on connoîtra que la courbe monte à l'infini de ce côté-là.

A present il faut examiner la courbe qui se forme au delà de l'asymptote *GF*. Soit donc 9° $y = \frac{2}{4}a$, la valeur de x est $= \frac{585}{16}a$. Soit 10° $y = \frac{7}{2}a$, on aura $x = 26\frac{1}{4}a$. Ces deux dernieres valeurs de x apprennent que la nouvelle courbe commence au delà de l'asymptote *GF* à une distance infinie de *AG*, & qu'elle s'approche de *AG* en s'éloignant de *GF*. Soit 11° $y = 3a$, on fera $x = 24a$. Soit 12° $y = 4a$, on aura $x = 30a$. Ces deux dernieres équations montrent qu'après que la courbe est descenduë jusqu'à environ $24a$, ou 24 *GE* de distance de la ligne *AG*, vis-à-vis de *Y*, étant $GY = GE = a$, elle remonte, de sorte qu'elle forme comme un angle *V*. Elle est aussi décrite par l'intersection de la Regle *AC*, & de la parabole *KC*.

EXEMPLE IV. $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$.

1. APrès avoir supposé Fig. 122. la même position & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur a données dans sa Geometrie : On demande $CB \times CD \times CF = CH \times CM \times a$, c'est-à-dire, en termes analytiques $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$. Fig. 122. 129.

2. On construit cette équation Fig. 129. de cette maniere. La Regle *AC* tourne autour du point *A*, la Regle *IL* autour du point *I*. Soit $AT = \frac{1}{2}a = EX$; aux points *T*, *X* j'arrête les Regles immobiles *TS*, *XV* paralleles à la ligne *AB*. On conduit les deux Regles *AC*, *IL* sur *TS* avec un poinçon, de sorte qu'elles s'y coupent continuellement. Pendant qu'on fait ainsi mouvoir ces deux Regles, la Regle *IL* pousse & fait mouvoir la petite Regle *Ll*, qui est toûjours perpendiculaire à la Regle immobile *AB*, sur laquelle l'extrêmité *L* glisse, un poinçon arrête cette extrêmité

dans les coulisses des Regles IL, AB, tandis que son autre extrêmité l, qui est arrêtée ferme au point l de l'axe Kl de la parabole KC, fait monter & descendre cet axe sur la Regle immobile XV; étant $Kl = \frac{1}{4}a$, & le parametre de la parabole a. L'intersection de la Regle AC & de la parabole KC décrit la courbe $NACEGP$. L'appliquée CV est $VB - CB$, $\frac{3}{2}a - y$.

Dém. Je prolonge CM en R, où elle coupe la Regle IL, je mene RP parallele à CB, on a cette Analogie $AM = CB, y : CM, x :: IM = CH, y + a : MR$, $\frac{xy+ax}{y} = AP = LB = lV$. KV sera $\frac{1}{4}a + \frac{xy+ax}{y}$. Or par la proprieté de la parabole $a \times KV = \overline{CV}^2$. Ce qui se reduit à l'équation $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1° $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$ changée en $x = \frac{y^3 - 3ayy + 2aay}{ay + aa}$. Soit 2° $y = 0$, l'équation se changera en $x = \frac{0}{aa}$, ce qui marque qu'au point A, ou $x = 0$, on a aussi $y = 0$, & que la courbe passe au point A. Soit 3° $x = 0$, l'équation reste $y^3 - 3ayy + 2aay = 0$, dont la premiere racine est $y = 0$, & le quotient $yy - 3ay + 2aa$, dont les deux racines sont $y - 2a = 0$, $y - a = 0$, ou $y = 2a$, $y = a$. Ainsi x étant nul, ce qui arrive lorsque la courbe coupe GA, y a trois valeurs, la premiere $y = 0$, ce qui marque que la courbe passe au point A, comme on l'a déja dit; la seconde $y = 2a = AG$, la troisiéme $y = a = AE$; ce qui montre que la courbe passe encore aux points E, G. Vous le prouverez encore suivant la Methode de M. DESCARTES, en reflechissant qu'en A vous avez $CB = 0$, $CM = 0$; en E, $CD = 0$, $CM = 0$; en G, $CF = 0$, $CM = 0$; & que par consequent dans ces trois point $CB \times CD \times CF = 0$, & $CM \times CH \times a = 0$. Cette preuve peut s'appliquer à toutes les autres courbes. Soit 4° $y = \frac{1}{2}a$, l'équation devient $x = \frac{1}{4}a$. Cette valeur positive fait voir que la courbe monte au dessus de GA entre les paralleles AB, ED. Soit 5° $y = \frac{3}{2}a$, l'équation sera $x = -\frac{3}{20}a$, valeur negative, qui prouve que la courbe descend sous GA entre les paralleles ED, GF. Soit 5° $y = 3a$, on aura $x = \frac{3}{2}a$, ainsi la courbe monte au dessus de AG au delà de GF, & l'on trouvera, si l'on prend de plus grandes valeurs positives de y, que la courbe monte à l'infini de ce côté-là. Soit 6° $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, l'equation se change en $x = -\frac{15}{4}a$, ce qui montre que la courbe descend au dessous de AG entre les paralleles AB, IH. Soit 7° $y = -a$, la valeur de x est $= \frac{-6a^3}{0}$: donc IH, à laquelle AI, $-y = \frac{1}{2}a$ se termine, est asymptote de la courbe $NACEGP$, & de la courbe qui est au delà de IH.

Car soit 8° $y = -\frac{5}{4}a$; l'équation est $x = \frac{585}{16}a$. Soit 9° $y = -2a$, on aura $x = 24a$. Soit 10° $-y = 3a$, c'est $x = 30a$. Ces trois dernieres équations prouvent qu'à la distance d'environ $24a = 24AI$, au dessus

de AG, une nouvelle courbe commence vis-à-vis de Y, & jette deux branches qui s'étendent à l'infini, comme l'on voit en Z. Cette courbe est aussi décrite par l'intersection de la Regle AC & de la parabole KC.

EXEMPLE V. $y^3 - ayy - 9aay + 9a^3 = axy$.

M. DESCARTES dit, que le point cherché C se trouvera sur une courbe de même nature ; quoique, tout le reste demeurant le même qu'aux quatre Problêmes precedens, les quatre paralleles données ne fussent pas à égale distance l'une de l'autre. 1. Soient donc Fig. 130. GE, $2a$; EA, Fig. 130.
a; AI, $3a$; CM, x; CB, y; $CF = BF - CB$, $3a - y$; $CD = BD - CB$, $a - y$; $CH = CB + BH$, $y + 3a$. Et qu'on demande, comme Exemple I. $CF \times CD \times CH = CB \times CM \times a$, l'équation sera $y^3 - ayy - 9aay + 9a^3 = axy$, qui se construira de cette sorte.

2. La Regle EL tourne autour du Pole E, & passe par le point L de l'axe KL de la parabole KC, dont le parametre est a, & $KL = 9a$: la Regle EL fait mouvoir l'axe KL de sorte que cet axe est toûjours sur la ligne droite AB. L'intersection continuelle de la Regle EL & de la parabole KC décrit d'un côté la courbe $GQECP$, de l'autre la courbe NIo, qui sont le lieu cherché.

Dém. Au point C le calcul a donné l'équation cherchée. Ensuite dans les triangles équiangles EMC, CBL on fait cette Analogie $EM = CD$, $a - y : MC, x :: CB, y : BL, \frac{xy}{a-y}$; qui étant soustraite de $KL = 9a$ laisse $KB = 9a - \frac{xy}{a-y}$. Par la nature de la parabole $y^3 - ayy - 9aay + 9a^3 = axy$.

4. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Vous connoîtrez la position des courbes, en faisant 1° $x = 0$. 2° $y = 0$. 3° $y = \frac{1}{2}a$. 4° $y = \frac{3}{2}a$. 5° $y = \frac{7}{2}a$. 6° $y = -a$. 7° $y = -4a$.

EXEMPLE VI. $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd}xy$.

M. DESCARTES assure encore, que le point C se trouvera sur une courbe de même nature, quoique la cinquiéme ligne donnée ne coupât point à angles droits les quatre autres, & que les lignes cherchées ne fussent pas perpendiculaires aux données, tout le reste demeurant le même, que dans sa Geometrie.

Soit donc en premier lieu Fig. 131. GA qui coupe obliquement les quatre paralleles données, & que les quatre cherchées CB, CD, CF, CH Fig. 131.
fassent les mêmes angles obliques que GA avec les paralleles, tandis que CM est paralelle à AB. Si l'on nomme GE, $a = EA = AI$; CB, y; CM, x; tout le reste sera aussi entierement, comme dans l'Exemple que

M. DES CARTES a construit Exemple I. Fig. 122. & l'équation sera $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

FIG. 132. Soit en second lieu, Fig. 132. GA qui fait avec les paralleles un angle de 60. degrez ; mais parmi les cherchées, les deux CB, CH sont paralleles à GA, CD fait avec ED un angle de $35^\circ. 15^{\text{I}}. 56^{\text{II}}$. CF avec GF un angle de $25^\circ. 39^{\text{I}}. 32^{\text{II}}$, CM est perpendiculaire sur GA. Et l'on demande, comme Exemple I. que $CD \times CF \times CH$ soit égal à $CB \times CM \times a$. Continuons CB en S.

Nommons GE, $a = EA = AI$; CM, x; CB, y; CH sera, $y + a$.

Maintenant dans CDR, nous avons $CR = a - y$; l'angle CDR est de $35^\circ. 15^{\text{I}}. 56^{\text{II}}$. l'angle CRD de 120. degrez, que GA fait avec les paralleles. Donc comme 57735 sinus de l'angle CDR est à 86602 sinus de l'angle CRD : ainsi 1 est à $\frac{3}{2}$ que je nomme c : ainsi est CR, $a - y$ à CD, $ac - cy$.

De plus dans le triangle CSF, le côté CS est $BS - CB$, $2a - y$, l'angle CFS est de $25^\circ. 39^{\text{I}}. 32^{\text{II}}$. l'angle CSF de 60. degrez. Donc comme 43301 sinus de l'angle CFS est à 86602 sinus de l'angle CSF : ainsi 1 est à 2, que j'appelle d : ainsi CS, $2a - y$ est à CF, $2ad - dy$. Après cela par l'hypothese $CD \times CF \times CH = CB \times CM \times a$; $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd}xy = \frac{1}{3}axy$.

Par le point C menons CT parallele à AB. Dans le triangle CMT le côté CM est x ; nous connoissons l'angle CMT. qui est droit ; & l'angle CTM qui est de 60. degrez. Donc comme 86602 est à 100000 : ainsi 1 est à $\frac{100000}{86602}$ que je nomme b : ainsi le côté CM, x est au côté CT, bx. Ensuite la parabole KC a pour parametre $\frac{a}{bcd}$, KL est celui de ses diametres, dont les appliquées font avec lui l'angle CBK de 120. degrez, ce diametre est toûjours sur la ligne AB, où il se meut par le moyen de la Regle GL, qui tourne autour du Pole G, & passe toûjours par le point L de ce diametre, étant $KL = abcd$. L'intersection de la Regle GL & de la parabole KC décrit les courbes GEC, NIo, qui sont le lieu cherché.

Dém. GT, $2a - y$: TC, bx : : CB, y : BL, $\frac{bxy}{2a-y}$. Otez BL de KL, il restera KB, ensuite par la nature de la parabole $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd}xy$.

FIG. 133. En troisiéme lieu Fig. 133. que GT ne soit pas parallele à CB, le reste étant comme auparavant. On menera GV parallele & égale à CS, $2a - y$; & CQ parallele à GT. Il se fera deux triangles GTV, CQB équiangles. Je mets le rapport de GV, $2a - y$ à GT, comme 1 à h, ainsi GT est $2ah - hy$. Et parceque la raison de CB à CQ est la même, CQ est hy, qui sera l'appliquée de la parabole KC, dont le parametre doit être $\frac{ahh}{bcd}$. Maintenant dans les triangles équiangles GTC, CQL, GT, $2ah - hy$: CT, bx : : CQ, hy : QL, $\frac{bxy}{2a-y}$; qui étant ôtée de $KL = abcd$,

laisse KQ, & par la nature de la parabole $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd} xy$.

EXEMPLE VII. $y^3 - 5ayy - \frac{6}{5}aay + 6a^3 = 4axy$.

M. DESCARTES dit enfin, que le point C peut se trouver quelquefois sur une courbe de même nature que les precedentes, quoiqu'aucunes des données ne soient paralleles : dont voici un Exemple, Fig. 134. FIG. 134.

1. Soient données de position les cinq lignes AB, AD, KH, GE, FI, faisant dans leurs intersections les angles que vous voyez : il faut trouver un point C, duquel on tire sur les données, les lignes CB faisant l'angle CBK de 60. degrez, CF faisant l'angle CFI de 120. degrez, CE faisant l'angle CEG droit, CH faisant l'angle CHK de 30. degrez, CD faisant l'angle CDA de 120. degrez ; de sorte que la ligne CD est parallele & égale à AB, & les lignes CB, CF, CE, CH n'en font qu'une. Il faut encore que $CB \times CE \times CF + 6\,\overline{IK}^2 \times \overline{\tfrac{6}{5}CB - IK}$, soit à $CD \times CH \times IK + AB \times \overline{\tfrac{5}{3}AB - 2AK}$: comme $\frac{3}{2}CB$ à IK. L'équation sera $y^3 - 5ayy - \frac{6}{5}aay + 6a^3 = 4axy$.

2. Après avoir mesuré tant les angles donnez que les lignes données, dont nous avons besoin ; nommons IK, $a = 1$; $AI = 2a$; $KG = 3a = AK$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y. Nous aurons $BI = AI - AB$, $2a - x = BF$; & $CF = y - 2a + x$.

Dans le triangle BGE, le côté BG est $AG - AB$, $6a - x$; les angles sont connus : donc comme 100000 est à 50000 : ou comme 1 à $\frac{1}{2}$: de même BG, $6a - x$ est à BE, $3a - \frac{1}{2}x$; & $CE = 3a - \frac{1}{2}x - y$.

Dans le triangle BHK, le côté BK est $3a - x$; les angles sont connus : donc comme 50000 est à 100000 : ou comme 1 est à 2 : ainsi BK, $3a - x$ est à BH, $6a - 2x$; & $CH = 6a - 2x - y$.

3. Sur AD je coupe $AM = 5a$, étant $AD = CB$, y, MD est $5a - y$. PL est le diametre de la parabole PC, avec lequel les appliquées CB font un angle CBP de 120. degrez. Ce diametre est toûjours sur la ligne AB, sur laquelle la Regle ML, qui tourne autour du Pole M, la fait mouvoir, en passant toûjours par le point L du diametre, étant $PL = \frac{3}{10}a$. L'intersection de cette Regle ML avec les deux côtez de la ligne parabolique RPC décrit les courbes CM, NRO, qui sont le lieu cherché. Le parametre de la parabole est $4a$.

Dém. Les triangles MDC, CBL sont équiangles : donc MD, $5a - y : CD$, $x :: CB$, $y : BL$, $\frac{xy}{5a - y}$; qui étant soustraite de PL, $\frac{3}{10}a$ par la nature de la parabole vous aurez l'équation cherchée.

EXEMPLE VIII. $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$.

LEs équations, qui donnent des courbes de nature differente de celles, qu'on vient de décrire, & dont il eſt parlé au commencement de cet Article, n. 2. commencent ici.

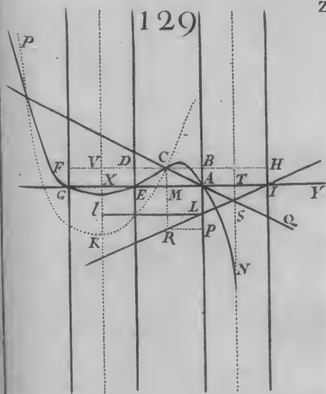
Fig. 122. 135. 1. Après avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que Mr DESCARTES leur a données dans ſa Geometrie; on demande, que $CM \times CF \times CH$ ſoit égal à $CB \times CD \times a$, ce qui produit $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$, équation qu'on peut ainſi conſtruire.

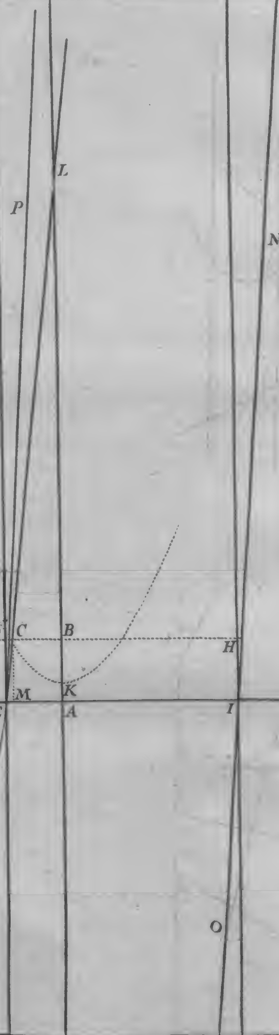
2. Fig. 135. Sur la ligne GA prenez $AT = AR = \frac{1}{2}a$, par les points T, R menez TL, RN infinies paralleles à AB. Sur TL prenez $TV = a$ & par le point V tirez l'infinie VN parallele à GA. Faites $VK = \frac{9}{8}a$: appliquez la parabole SKs, dont le parametre de l'axe eſt $2a$, faites que ſon ſommet ſoit ſur K, & ſon axe ſur KT; & que cette parabole demeure immobile dans cette ſituation. On a $VN = TR$, a; autour du point N faites rouler l'équerre LNP, dont le ſommet eſt toûjours en N & ſes deux côtez coupent toûjours l'infinie KP en deux points P & L, p & l, &c.

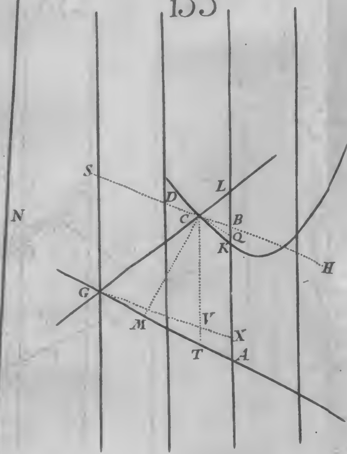
Lorſque l'équerre eſt dans la ſituation LNP, j'applique au point P, la ligne PC égale & parallele à LS appliquée de la parabole au point L; & j'applique au point L la ligne LZ égale & parallele à Ps appliquée de la même parabole au point P.

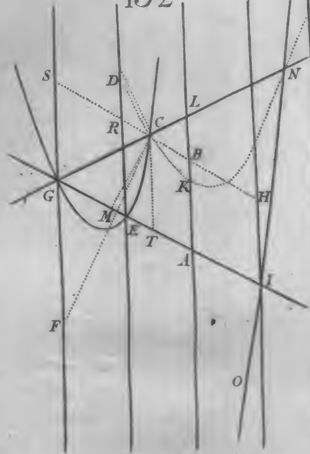
Lorſque l'équerre eſt dans la ſituation lNp, j'applique au point p la ligne pc égale & parallele à la ligne ls appliquée de la parabole au point l. De ſorte que tandis que l'équerre coupe l'axe KP en deux points au dedans de la parabole, il y a deux appliquées, qui changent mutuellement de place: mais tandis qu'un des côtez ſeulement de l'équerre coupe l'axe au dedans de la parabole, il n'y a qu'une appliquée, qui eſt tranſportée au point de l'axe, que l'autre côté de l'équerre coupe au dehors de la parabole. De plus ſuppoſons l'équerre dans la poſition VNg, l'axe n'eſt point coupé en deux points, on ne peut donc pas tranſporter l'ordonnée VY, & on n'a aucun point de la nouvelle courbe. Pour peu que nous baiſſions le côté NP, l'autre côté commencera à couper l'axe KP prolongé en haut à l'infini, & l'on pourra auſſi commencer à décrire la courbe cZ, & la continuer juſque vis-à-vis du ſommet K. Lorſque l'équerre eſt dans la poſition KNQ, on continuë la deſcription de la courbe cZ, & on commence celle de QC moitié de XQC, ce qui ſe fait juſqu'à ce que l'équerre ſoit dans la poſition VNR; car dès lors l'équerre ne coupe plus l'axe en deux points en même tems.

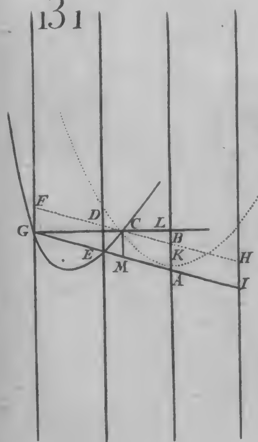
Pour décrire la courbe xz & l'autre moitié QX de QXC, on n'a qu'à appliquer au point P, PX égale à PC; au point L, Lz égale à LZ; au

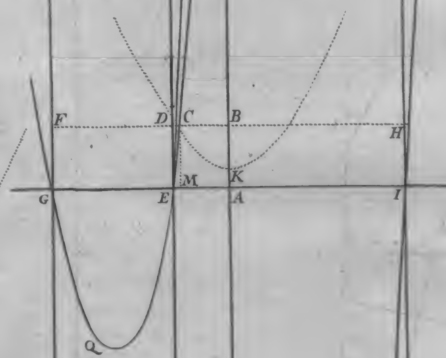


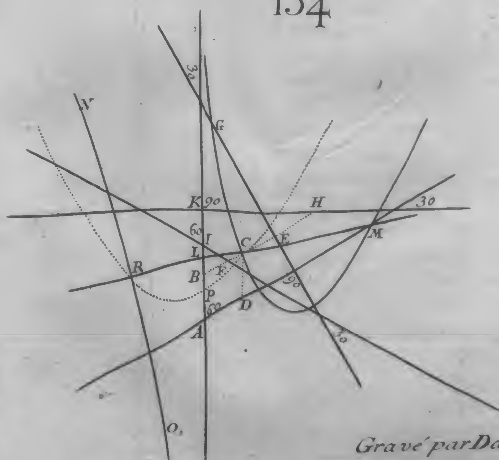












Gravé par Daudet.

point p, px égale à pc. Ou bien après avoir pris $Vn = VN$, il faut faire tourner une équerre autour du point n, & le reste comme on a fait au point N. Car on peut décrire ces courbes, comme nous décrivons celles de l'Exemple suivant. Les courbes XQC, cZ, xz satisfont au Problême.

Dém. 1° Au point C vous avez CM, $-x$; CB, $-y$; $BP = TA$, $\frac{1}{2}a$; $CP = CB + BP$, $-y + \frac{1}{2}a = LS$; $Mu = TV$, a; $Cu = CM + Mu$, $-x + a = PV$. Dans le triangle PNL rectangle en N, la ligne NV est perpendiculaire sur PL: donc PV, $a - x : VN$, $a :: VN$, $a : VL$, $\frac{aa}{a-x}$, qui étant soustraite de VK, $\frac{9}{8}a$, laisse $KL = \frac{9}{8}a - \frac{aa}{a-x}$. Or par la nature de la parabole vous aurez $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$, équation cherchée. 2° Au point X on trouveroit la même chose ayant supposé une équerre en n, puisque $XB = y$; & $XP = y - \frac{1}{2}a = sL$. 3° Au point c de la courbe cZ, vous avez cm, x; cb, $-y$; $cp = -y + \frac{1}{2}a = ls$; $cu = x - a = pV$. Dans le triangle pNl rectangle en N. Vous ferez cette Analogie pV, $x - a : VN$, $a :: VN$, $a : Vl$, $\frac{aa}{x-a}$; qui étant ajoûtée à VK, $\frac{9}{8}a$, fait $Kl = \frac{9}{8}a + \frac{aa}{x-a}$; & par la nature de la parabole l'équation $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1° l'équation changée en $x = \frac{aay - ayy}{ay - yy + 2aa}$. Faites 2° pour avoir la disposition de la courbe XQC $x = 0$; 3° $y = 0$; 4° $y = \frac{1}{2}a$. 5° $y = \frac{3}{2}a$; 6° $y = 2a$.

Venons à present aux courbes cZ, xz. Soit 7° $y = \frac{5}{2}a$, l'équation sera $x = \frac{15}{7}a$. Soit aussi $-y = \frac{3}{2}a$, ou $y = -\frac{3}{2}a$, vous aurez l'équation $x = \frac{15}{7}a$ même valeur positive. Ce qui montre, que les deux courbes cZ, xz s'élevent au dessus de GA au dehors des paralleles. Et si l'on prend differentes valeurs de y également éloignées du point T, on se convaincra que ces deux courbes s'écartent & s'approchent également de l'axe KL, & qu'elles sont égales. 8° Si l'on fait $x = a$, on aura $2a^3 = 0$. D'où l'on conclud qu'il est impossible que x soit égale à la quantité a, ou, ce qui est le même, qu'il n'y a point d'appliquée y au point V, étant $TV = a$: ainsi la ligne VN menée par le point V parallele aux appliquées PC, pc est une troisiéme asymptote.

4. M. DESCARTES dit que *ces courbes sont telles, que toutes les lignes droites appliquées par ordre à leur diametre étant égales à celles d'une Section conique, les segmens de ce diametre, qui sont entre le sommet & ces lignes, ont même proportion avec une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux segmens du diametre de la Section conique, ausquels les pareilles lignes sont appliquées par ordre.* Si l'on prend le point V pour le sommet des trois courbes CQX, cZ, xz; VN pour la ligne donnée, PV pour un segment de l'axe KP de ces courbes pris entre le sommet V, & la ligne PC appliquée à cet axe, & égale à LS appliquée à l'axe KL de la Section conique SKs; si l'on prend encore VL pour le segment de l'axe de la Section conique,

auquel la pareille ligne LS eſt appliquée : on trouvera 8.6. Eucl. que $PV : VN :: VN : VL$. Mais ſi par le ſegment de l'axe de la Section conique on prenoit KL, qui eſt entre le ſommet, & l'appliquée LS, on ne trouveroit pas la proportion, dont M. Deſcartes parle. On la trouveroit beaucoup moins, ſi on prenoit QP pour le ſegment de XQC. On trouvera de même pour le point c, $pV : VN : VN :: Vl$. Et c'eſt la proportion, qui a donné l'équation de ces courbes.

EXEMPLE IX. $axy - xyy = aay - ayy + 2a^3$.

Fig. 122. 136. 1. APrès avoir ſuppoſé Fig. 122. la poſition & lavaleur des lignes telles que M. DESCARTES les détermine dans ſa Geometrie. Il faut que le parallelepipede $CM \times CB \times CD$ ſoit égal au parallelepipede $CF \times CH \times a$, & que $axy - xyy = aay - ayy + 2a^3$.

2. Je fais la conſtruction de cette ſorte Fig. 136. Je prends $BR = BP$ $Dr = \frac{1}{2}a$, & par les points R, P, r je mene les infinies RN, Pp, rn paralleles à AB. Je fais $VT = a$, & par le point V je tire VN parallele à GA, ſoit $UK = \frac{1}{8}a$; le point K eſt le ſommet de la parabole immobile SKs, dont le parametre eſt $2a$, & dont l'axe eſt poſé ſur la ligne Pp, laquelle eſt auſſi l'axe des courbes qu'on va décrire. Je coupe $VN = Vn = a$. A preſent autour du point N je fais tourner une équerre PNp, de laquelle le ſommet N eſt fixe au point N. Conſiderons la d'abord dans la poſition PNp : elle coupe l'axe Pp au point P au dehors de la parabole, & au point p au dedans ; je tranſporte l'ordonnée pS de la parabole, & je l'applique à l'axe en PC ; C'eſt un point de la courbe CIY, & CP une de ſes ordonnées. Toute la courbe CIY, & CP une de ſes ordonnées. Toute la courbe CIY peut ſe décrire de la même façon.

Mais il eſt à propos de conſiderer l'équerre PNp dans ſes differentes poſitions.

Commençons par la mettre dans la poſition VNR : alors le côté NV coupe l'axe au point V, & le côté NR rencontre ſa parallele VP à une diſtance infinie du côté de y, où l'ordonnée de ICy ſera égale à l'ordonnée Vb de la parabole. En effet à cette diſtance infinie la courbe ICy rencontre ſon aſymptote AB.

Enſuite pour peu qu'on éleve le côté Np de l'équerre au deſſus de V, il y coupera l'axe Vp ; tandis que l'autre côté NP coupera le même axe VP à une diſtance preſque infinie ; à laquelle l'ordonnée de la courbe ICy ſera égale à la petite ordonnée de la parabole, que le point p détermine. La courbe $yCIY$ pourra être ainſi décrite, juſqu'à ce que l'équerre ſoit venuë à la poſition KNQ, dans laquelle le côté Np ou NQ détermine l'ordonnée de la parabole, qui part du point Q, & qu'il faut tranſporter en Kk ordonnée de la courbe ICY ; tandis que le côté NP ou NK coupe l'axe en K,

K, où l'ordonnée de la parabole eſt zero, & qu'il faut tranſporter au point *Q*; où par conſequent ſe trouve le ſommet d'une nouvelle courbe, laquelle commence à ſe décrire. Fig. 136.

J'éleve donc *NP* ou *NK* au deſſus de *K*, mais au deſſous de *V*, & le côté *Np* ou *NQ* au deſſus de *Q* juſqu'à *o*: l'ordonnée de la parabole priſe entre *K* & *V*, ſera appliquée au point *o*, comme une ordonnée de la nouvelle courbe *QZ*; & l'ordonnée de la parabole qui part du point *o*, ſera appliquée au point pris entre *K* & *V*, comme une ordonnée de la courbe *CIY*. Et ces deux courbes ſe décriront ainſi, juſqu'à ce que l'équerre ſoit parvenuë dans la poſition *VNO*, dans laquelle l'ordonnée *Vb* ſera appliquée à l'axe *Qo* à une diſtance infinie, à laquelle la courbe *QZ* rencontre ſon aſymptote *AB*; & l'ordonnée infinie de la parabole déterminée par le côté *Np*, ou *NO* de l'équerre, ſera appliquée en *VN*, pour être l'ordonnée de la courbe *CIY*, laquelle en effet rencontre ſon aſymptote *VN* à une diſtance infinie. Le ſeul axe *Kb* ſert à décrire la branche infinie *QZ*. Après cette poſition de l'équerre *PNp*, elle ne coupe plus l'axe *Pp* que dans un point: ainſi la deſcription de la courbe *CIy* & de la partie *QZ* eſt finie. On décrira de la même maniere avec l'équerre *Pnp* la courbe *cG* & la partie *Qz* de la courbe ſuperieure; & cette Methode eſt la même que celle de l'Exemple precedent.

Que ſi à l'équerre *PNp* vous ajoûtez l'équerre *CVS* qui tourne autour du point fixe *V*; qu'un poinçon faſſe, que ces deux équerres ſe croiſent toûjours ſur la Regle fixe *AB* au point *X*; & qu'un autre poinçon faſſe le même effet au point *a*; qu'un troiſiéme poinçon faſſe auſſi croiſer ſur la Regle immobile *VP*, le côté *NP* de la premiere équerre avec la Regle *PC*, laquelle eſt toûjours perpendiculaire à *VP*; & qu'un quatriéme poinçon produiſe le même effet au point *p*, à l'égard du côté *Np* de la même équerre & de la Regle *pS*: lorſque je ferai monter ou deſcendre un des quatre poinçons, comme *X*, les quatre équerres, & les Regles *PC*, *pS* monteront auſſi & deſcendront. Alors l'interſection du côté *VC* de la ſeconde équerre avec la Regle *PC* décrit la courbe *yICY*, & l'interſection de l'autre côté *VS* de la même équerre avec la Regle *pS* décrit la parabole *KS*. La courbe *Gc* ſe décrira par une ſemblable poſition des équerres *Pnp*, *cVs*. Enfin ſi les mêmes poinçons font croiſer aux points *P*, *p* les deux équerres *PNp*, *Pnp*: le mouvement du ſeul poinçon *P* fera décrire les deux courbes.

Dém. Au point *C*, vous avez $CM, -x = PT$; $CB, -y$; $CP, = CB + BP, -y + \frac{1}{2}a = pS$; $PV = PT + TV, -x + a$; dans le triangle rectangle PNp, $PV, a - x : VN, a :: VN, a : Vp, \frac{aa}{a-x}$; $Kp = KV + Vp, \frac{1}{8}a + \frac{aa}{a-x}$, & par la nature de la parabole *KS*, $axy - xyy = aay - ayy + 2a^3$.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1°

l'équation changée en $x = \frac{aay - ayy + 2a^3}{ay - yy}$. Pour trouver le chemin de la courbe, faites 1° $x = 0$; 2° $y = 0$; 3° $y = a$; 4° $y = \frac{1}{2}a$; 5° $y = \frac{1}{4}a$; 6° $y = -\frac{3}{2}a$; 7° $y = 3a$; 8° $x = a$. Si l'on prend V pour le ſommet des courbes qu'on vient de décrire, on a $PV : VN :: VN : Vp$.

EXEMPLE X. $2axy - xyy = a^3 - ayy$.

Fig. 122. 137. 1. Après avoir ſuppoſé Fig. 122. la poſition & la valeur que M. DESCARTES donne aux lignes dans ſa Geometrie. Il faut que $CM \times CB \times CF$ ſoit égal à $CD \times CH \times a$; l'équation eſt $2axy - xyy = a^3 - ayy$, dont voici la conſtruction Fig. 137.

2. Prenez $SA = \frac{1}{2}a$, par le point S menez Sl parallele à AB. La parabole KC a pour parametre $2a$, ſon axe eſt toûjours appliqué ſur AB, KL eſt $\frac{1}{2}a$; Ll auſſi $\frac{1}{2}a$, eſt une Regle parallele à GA, ſon extrêmité l gliſſe ſur la ligne Sl, & ſon extrêmité L eſt attachée ferme au point L de l'axe de la parabole. On fait mouvoir ſur AG les deux Regles PC, NC, de ſorte que 1° l'angle CPN ſoit toûjours de 45. degrez; mais NC fait differens angles avec GA, & tourne autour du point mobile N. 2° Leur diſtance PN ſoit toûjours égale à a; 3° Ces deux Regles paſſent toûjours par un anneau C, qui roule ſur la ligne parabolique KC; 4° La Regle NC pouſſe devant ſoi la petite Regle Ll, laquelle fait en même tems mouvoir la parabole ſur AB. L'interſection des deux Regles NC, PC entr'elles & avec la parabole décrit les trois courbes qui ſont dans cette Figure. Vous pouvez auſſi ſuppoſer un anneau à l'extrêmité l, par lequel la Regle NC paſſe. Soit $ST = a$; par le point T menez Tt parallele à AG. Examinons les differens mouvemens de la parabole & des Regles PC, NC, & les differentes manieres, dont ces Regles ſe coupent ſoit au deſſus, ſoit au deſſous de GA.

En premier lieu concevons le ſommet K de la parabole à une diſtance infinie au deſſous de A, & les Regles NC, PC à une diſtance infinie au delà de G, où elles ſe coupent au deſſus de GA dans l'anneau C. Soit NC perpendiculaire à GA, comme on l'a repreſentée vers V; le triangle CPN, qui aura l'angle PNC droit, aura les côtez PN, NC égaux; donc le point C & l'anneau ſeront ſur Tt, & la Regle NC ne touchera point la Regle Ll par ſa partie inferieure infinie Nn. Mais dès que l'on tirera P du côté de G. La Regle NC pouſſera par ſa partie inferieure Nn la Regle Ll, & la parabole montera & l'anneau auſſi, & la courbe R ſe décrira. Lorſque Ll ſera arrivé ſur SA, ce ſera la partie ſuperieure NC qui pouſſera Ll, & cela juſqu'à une hauteur infinie tandis que P s'éloignera infiniment vers Q ſur GA. De ce qu'au commencement l'anneau eſt ſur Tt, & qu'immediatement après la courbe R ſe décrit; il ſuit que la ligne Tt eſt ſon aſymptote. La ligne GF eſt encore aſymptote, c'eſt-à-dire que l'anneau

ne ſera jamais ſur *GF*. Car ſuppoſons le au point *Z*; l'appliquée à la parabole *Zg* eſt *2a*, & parceque le parametre eſt auſſi *2a*, l'abſciſſe *Kg* ſera encore *2a*, afin que le rectangle du parametre & de l'abſciſſe ſoit égal au quarré de l'appliquée. Le triangle rectiligne *KZg* ſeroit donc iſoſcele: mais le triangle rectiligne *KLl* eſt auſſi iſoſcele à cauſe de $KL = Ll = \frac{1}{2}a$; donc la ligne *CZ* ou *PCZ* paſſeroit par les points *K*, *l*, ce qui eſt impoſſible. Donc l'anneau ne tombera point ſur *GF*, & le ſeul arc infini *Zz* ſert à la deſcription de la courbe *R*. Fig. 137.

En ſecond lieu mettons le point *P* en *E*, le point *N* en *G*, les Regles *NC*, *Ll* étenduës ſur *AE*, l'anneau en *E*. Pouſſons le point *P* à l'infini du côté de *V*: les Regles *PC*, *NC* ſe couperont au deſſous de *GA*, la parabole deſcendra, la Regle *Ll* étant tirée ou ſoutenuë par la Regle *NC*; & la portion inferieure infinie *Ec* de la courbe *ECc* ſe décrira. *GF* ſera ſon aſymptote par la même raiſon, qu'elle l'eſt de *R*, ainſi qu'on vient de le prouver. L'arc fini *XQ* de la parabole ſert ſeul à la deſcription de la portion infinie *Ec*.

En troiſiéme lieu mettons encore le point *P* en *E*, l'anneau auſſi en *E*; le point *N* en *G*, les Regles *NC*, *Ll* ſur *GA*. Alors ſi l'on tire le point *P* à l'infini du côté de *I*, les Regles *NC*, *PC* ſe couperont au deſſus de *GA*, & décriront la portion infinie *EC* de la courbe *CEc*, dont *AB* eſt aſymptote, c'eſt-à-dire que l'anneau ne tombera jamais ſur la ligne *AB*, ou ſur le ſommet *K*. L'arc fini *XK* ſert ſeul à décrire la partie infinie *EC*.

En quatriéme lieu, concevons que le point *P* eſt en *I*, l'anneau auſſi en *I*; le point *N* en *A*, les Regles *NC*, *Ll* ſur *GA*. Alors ſi l'on pouſſe le point *P* à l'infini du côté de *V*, l'on décrira la portion infinie *If* de la courbe *QIf*, les Regles *NC*, *PC* ſe coupant ſous *GA*, & la Regle *NC* tirant après ſoi, ou ſoutenant la Regle *Ll* tandis que la parabole deſcend par ſon poids. La ligne *AB* eſt ſon aſymptote, par la même raiſon qu'elle l'eſt de la courbe *EC*. L'arc fini *KY* ſert ſeul à décrire la portion infinie *If*.

En cinquiéme lieu mettons encore le point *P* en *I*, l'anneau auſſi en *I*, le point *N* en *A*, les Regles *NC*, *Ll* ſur *GA*. Alors ſi l'on tire à l'infini le point *P* du côté de *Q*, les lignes *NC*, *PC* ſe couperont au deſſus de *GA*, & décriront la portion infinie *IQ* de la courbe *fIQ*; la parabole deſcendra vers *f*, la partie inferieure *Nn* de la Regle *NC* tirant après ſoi, ou ſoutenant la Regle *Ll*. La ligne *Tt* eſt aſymptote de *fIQ*, c'eſt-à-dire que l'anneau ne parviendra jamais à la ligne *Tt*, car s'il y étoit, le triangle *PNC* auroit les côtez $PN = NC = a$ & ſeroit iſoſcele, donc l'angle *NPC* étant de 45. degrez auſſi bien que l'angle *PCN*, l'angle *PNC* ſeroit droit & la Regle *NC* perpendiculaire ſur *GA* ne toucheroit plus la Regle *Ll*. L'arc infini *Yy* ſert à décrire la portion infinie *IQ*.

Toutes ces trois courbes ſont le lieu cherché. Suivant la poſition qu'on

donneroit au commencement à la parabole, on pourroit dans tous les cas ou la faire monter, ou la faire deſcendre. Ce qui convient à toutes les Figures, dont la parabole ſe meut dans ces Exemples.

Dém. Au point C. Dans le triangle CMP, $MP = MC$, x, & $NM = MP - NP$, $x - a$. De plus les triangles NMC, Csl ſont équiangles, ainſi NM, $x - a : MC$, $x :: Cs = \frac{1}{2}a - y : sl$, $\frac{\frac{1}{2}ax - xy}{x - a} = BL$, & ôtant BL de KL, $\frac{1}{2}a$; il reſte $KB = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax + xy}{x - a}$ & par la nature de la parabole $2axy - xyy = a^3 - ayy$.

3. Pour avoir le chemin des courbes, changez 1° l'équation en $x = \frac{a^3 - ayy}{2ay - yy}$; Faites 2° $x = 0$; 3° $y = 0$; 4° $y = \frac{1}{2}a$; 5° $y = \frac{3}{2}a$; 6° $y = 2a$; 7° $y = 3a$. Comme quelque valeur de y qu'on prenne plus grande que $2a$, on trouve toûjours une valeur poſitive de x, il ſuit que toute la courbe R eſt ſituée au deſſus de GA.

Pour la courbe fIQ faites $y = -\frac{1}{2}a$; $y = -\frac{3}{2}a$; $x = a$.

Si x étant a, la valeur de y n'eſt que $\frac{1}{2}a$, comme il arrive au point S, il ſuit qu'en aucun autre point de la ligne GA, on ne trouve une valeur de y qui réponde à $x = a$: ainſi ni IQ ne s'éleve point juſqu'à Tt, ni R ne deſcend point juſques-là, & la ligne Tt eſt aſymptote de ces deux courbes.

4. Je ne trouve pas ici la nature de ces courbes telle que M. DESCARTES la détermine, comme on l'a dit n. 4. Exemple 8. En effet de la maniere que ces trois courbes ſont diſpoſées, elles n'ont point de ſommet commun.

EXEMPLE XI. $aax - xyy = 2aay - ayy$.

Fig. 122. 138. 1. APrès avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur a données dans ſa Geometrie: on demande $CM \times CD \times CH = CB \times CF \times a$; $aax - xyy = 2aay - ayy$.

2. Cette équation ſe conſtruit ainſi Fig. 138. Soit $AS = \frac{1}{2}a$, menez Ss parallele à AB. Soit $ST = a$, menez Tt, parallele à GA. La parabole KC a pour parametre $2a$, ſon axe ſe meut ſur AB; KL eſt $\frac{1}{2}a$, la Regle $Ll = \frac{1}{2}a$ ſe meut de ſorte que ſon extrêmité l gliſſe ſur Sl, & ſon point L ſoit attaché perpendiculairement au point L de l'axe. PC eſt une Regle qui coule ſur GA & fait toûjours l'angle CPM de 45. degrez; dans ſon mouvement, elle pouſſe ou traine après ſoi l'équerre MCB, dont la branche CB eſt toûjours perpendiculaire ſur AB, & la branche CM toûjours perpendiculaire ſur GA. La Regle Vt 1° eſt éloignée de CP, de la ligne $VP = a$, 2° elle eſt pouſſée ou tirée par la Regle PC ſur GA, 3° elle paſſe toûjours par le point t, où l'équerre BCM coupe la ligne Tt; un anneau retenant ſur Tt les deux Regles Vt, CM, laquelle CM eſt prolongée, lorſqu'il eſt neceſſaire. La Regle NCl gliſſe ſur GA, toûjours

parallele à Vt, elle passe avec la Regle PC par un anneau C qui coule sur la ligne parabolique KC, elle fait mouvoir la petite Regle Ll, & en même tems la parabole. L'intersection C décrit les trois courbes R, CAc, QGf, d'une maniere fort semblable à celle dont les courbes de Fig. 137. ont été décrites, Exemple 10.

Pour décrire la courbe R, on met les Regles NC, PC, Vt, du côté de I à une distance infinie, les anneaux C & t sont l'un sur l'autre, les Regles NC, Vt sur MC, la parabole à une distance infinie au dessous de A, on tire le point P du côté de G à une distance infinie, & l'on décrit la courbe R.

Les points P, C, N, & l'anneau C sont en A; le point V est en I & l'anneau t dans l'intersection de AB & Tt; on tire P à l'infini du côté de G, & l'on décrit la portion infinie AC de la courbe CAc. Les choses étant encore remises au même état, si l'on tire P à l'infini du côté de I, on décrira la portion infinie Ac de la même courbe CAc.

Pour décrire la courbe fGQ, on fait, comme pour fIQ Figure 137. Exemple 10. Ces trois courbes sont le lieu cherché.

Dém. Le triangle CMP est isoscele, & $MP = CM$, x, & $VM = x - a$. Ensuite les triangles VMt, Csl sont équiangles avec MNC donc $VM, x - a : Mt, a :: Cs = CB - Bs, y - \frac{1}{2}a : sl, \frac{ay - \frac{1}{2}aa}{x - a} =$ BL, qui étant soustraite de KL, $\frac{1}{2}a$, laisse $KB, \frac{\frac{1}{2}ax - ay}{x - a}$. Et par la nature de la parabole, le parametre $2a \times KB = \overline{CB}^2$, $aax - xyy = 2aay - ayy$.

3. Suivant la Methode de L. 2. P. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. changez 1° l'équation en $x = \frac{2aay - ayy}{aa - yy}$. Pour avoir la situation des courbes; faites 2° $x = 0$; 3° $y = 0$; 4° $y = \frac{1}{2}a$; 5° $y = a$; 6° $y = \frac{3}{2}a$; 7° $y = 3a$. 8° $y = -\frac{1}{2}a$. 9° $y = -a$; 10° $y = -2a$, on aura $x = \frac{8}{3}a$; & parceque quelque valeur que l'on donne à $-y$ au dessus de a, la valeur de x, qui en resulte, est positive, il suit que toute la courbe R est placée au dessus de GA. Si l'on fait 11° $x = a$, l'équation se change en $a^3 - ayy = 2aay - ayy$; $y = \frac{1}{2}a$; on voit donc que x étant a, y n'a que la valeur $\frac{1}{2}a$, comme il arrive au point S; ainsi la courbe fGQ ne s'éleve pas, & la courbe R ne descend pas jusques à Tt, qui par consequent est leur asymptote.

4° Comme n. 4. Exemple 10.

EXEMPLE XII. $2aax - 3axy + xyy = aay + ayy$.

1. ON suppose Fig. 122. la même position & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur donne dans sa Geometrie. Et il faut que $CM \times CD \times CF$ soit égal à $CB \times CH \times a$; ce qui s'exprime en termes analytiques de cette sorte $2aax - 3axy + xyy = aay + ayy$. Fig. 122. 139.

2. On construira ainsi cette équation. Soit prise $AS = AV$, $\frac{1}{2}a$, par

Fig. 139. les points *S*, *V*, on mene *Ss*, *Vu* paralleles à *AB*. Soit *ST* = *a*, par le point *T* on mene *Tt* parallele à *GA*. La parabole *KC* a toûjours ſon axe ſur la ligne *KV*, ſon parametre eſt $4a$, *Kl* eſt $\frac{1}{16}a$, *Ll* eſt une petite Regle, qui coule ſur *Ss*, à qui elle eſt toûjours perpendiculaire, tandis qu'elle eſt attachée ferme au point *l* de l'axe de la parabole, auquel elle eſt auſſi perpendiculaire. *PC*, *CN* ſont deux Regles, dont la diſtance *PN* eſt toûjours égale à *a*, elles ſe meuvent ſur *GA*, *PC* fait toûjours l'angle *CPN* de 45. degrez, mais *NC* tourne autour du point mobile *N*, & dans ſon mouvement elle fait monter ou deſcendre la Regle *Ll*, & par conſequent la parabole *KC*; ces deux Regles *PC*, *NC* ſe coupent continuellement dans un anneau *C*, qui coule ſur la ligne parabolique *KC*. L'interſection *C* décrit les trois courbes *R*, *Q*, *CAIX*.

En premier lieu concevons la parabole *KC* élevée infiniment au deſſus de *GA*, & les points *P*, *N* des Regles *PC*, *NC* à une diſtance infinie au delà de *G*, où elles ſe coupent au deſſus de *GA* dans l'anneau *C* qui y a été auſſi tranſporté. Soit *NC* perpendiculaire à *GA*; dans le triangle *CPN*, les côtez *PN*, *NC* ſeront égaux; donc l'anneau & l'interſection *C* ſe trouvent ſur *Tt*, & la Regle *NC* ne touchera point la Regle *Ll*. Mais dès qu'on tirera *P* du côté de *G*, la Regle *NC* commencera à pouſſer en bas la Regle *Ll*, & la courbe *R* ſe décrira. On continuera ce mouvement de *P* juſques près de *G*, où la Regle *PC* retenant le point *l* par deſſous, tandis que la Regle *NC* preſſe le point *L* par deſſus; le mouvement ſera arrêté. Alors on retire *P* à l'infini du côté *t*, d'où il étoit venu, *NC* élevant à l'infini la Regle *Ll* & la parabole *KC*; l'anneau *C* coulant dans un arc de la parabole different de celui, dans lequel il a coulé auparavant. Dans ce retour le reſte de la courbe *R* ſe décrit. Le commencement de la deſcription de la courbe *R* fait connoître que *Tt* eſt ſon aſymptote, & l'on conclud que *GF* eſt ſon autre aſymptote de ce que l'anneau *C* ne ſe peut trouver ſur *GF*.

En ſecond lieu la partie infinie *IX* de la courbe *CAIX* ſe décrit en mettant encore le ſommet *K* à une hauteur infinie au deſſus de *GA*, & les points *P*, *N* à une diſtance infinie du côté de *X*, en tirant le point *P* juſques en *I*. On conclurra encore que la portion *IX* ne s'éleve jamais juſqu'à *Tt*, ſi l'on obſerve que dans ce mouvement la Regle *NC* ſoutient & paſſe ſous *Ll*, & qu'elle ne peut par conſequent jamais couper *PC* ſur la ligne *Tt*; car ſi elle l'y coupoit l'angle *PNC* ſeroit droit, & *NC* parallele à *HI* ne toucheroit plus *Ll*. On peut cependant ſuppoſer comme on l'a fait auparavant, que cela arrive à une diſtance infinie du côté de *X*.

En troiſiéme lieu le point *P* étant arrivé en *I*, les Regles *NC*, *Ll* ſont couchées ſur *GA*, & ſi l'on tire *P* juſqu'en *A*, l'anneau coulera ſur l'arc de la parabole, qui eſt entre les paralleles *IH*, *AB*; les parties inferieures *Nn*, *Pp* des Regles *NC*, *PC* ſe couperont dans l'anneau, & décriront l'arc fini *IA* de la courbe *CAIX*, la Regle *Nn* pouſſant vers le bas la

Regle Ll, jusqu'à ce que l'anneau C soit sur le sommet ; & ensuite élevant la même Regle Ll. Fig. 139.

En quatriéme lieu le point P étant arrivé en A avec l'anneau, les Regles NC, Ll couvrent encore la ligne GA. Si alors on continuë à tirer P à l'infini du côté de G, les parties superieures des Regles NC, PC se couperont au dessus de GA, la ligne NC élevera à l'infini la Regle Ll & la parabole ; & on décrira la portion infinie AC de la courbe $ACIX$, l'anneau coulant sur l'arc de la parabole, qui est entre les paralleles AB, ED. L'anneau n'arrivera jamais sur DE, car si l'on y supposoit le point C, on prouveroit que CL seroit segment commun des lignes PC, NC. Ainsi la ligne ED est asymptote de la courbe $CAIX$.

En cinquiéme lieu il faut concevoir la parabole à une distance infinie au dessous de GA, les points N, P à une distance infinie vers X, les parties inferieures Nn, Pp des Regles NC, PC se coupent dans l'anneau C & dans l'arc de la parabole, qui est entre les paralleles ED, GF, alors on tire le point P jusques près du point I, où la Regle Nn poussant en haut Ll, la Regle Pp la retient. Il faut donc retirer le point P à l'infini du côté de X, d'où il étoit venu, la Regle Nn soutenant Ll. Ces deux mouvemens décrivent la courbe Q, qui est à la distance de 13 à $14a$ de la ligne GA. On prouvera que les paralleles ED, FG sont ses asymptotes, parceque l'anneau ne peut être sur aucune des deux, sans que le même absurde qu'auparavant ne suive.

Ces trois courbes sont le lieu cherché.

Dém. Le triangle PCM a les côtez PM, CM égaux, ainsi $PM = x$; $NM = a - x$; $Cs = \frac{1}{2}a - y$; $Cu = y + \frac{1}{2}a$.

Dans les triangles NMC, CsL équiangles on a cette proportion, NM, $-x : MC, x :: Cs, \frac{1}{2}a - y : sL$, $\frac{\frac{1}{2}ax - xy}{a - x} = uC$; & ajoûtant $Kl = \frac{1}{16}a$, Ku sera $\frac{1}{16}a + \frac{\frac{1}{2}ax - xy}{a - x}$. Or par la nature de la parabole, le parametre $4a \times Ku = \overline{Cu}^2$, se reduit à $2aax - 3axy + xyy = aay + ayy$. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Après avoir changé l'équation en $x = \frac{aay + ayy}{2aa - 3ay + yy}$; pour avoir la situation des courbes faites 1° $x = 0$; 2° $y = 0$; 3° $y = \frac{1}{2}a$; 4° $y = a$; 5° $y = -\frac{1}{2}a$. 6° $y = -\frac{3}{2}a$. 7° $y = \frac{5}{4}a$; il en resulte $x = -15a$ comme si l'on faisoit $y = \frac{3}{2}a$; la courbe Q est donc au dessous de GA, entre les paralleles DE, GF, & forme deux rameaux, qui s'écartent de part & d'autre en descendant depuis le sommet Q qui est à la distance de GA d'environ 13 à $14a$. Soit 9° $y = 2a$, il vient $x = \frac{6a^3}{0}$, ce qui donne FG pour asymptote des courbes R, Q. Si l'on fait 10° $y = \frac{5}{2}a$, la substitution fait $x = \frac{35}{3}a$; la courbe R s'éleve donc au dessus de GA, & à l'infini soit en haut, soit le long de Tt, parceque x aura toûjours des valeurs positives, quelque valeur positive que l'on prenne pour y au dessus de $2a$.

Si l'on fait 11° $x = a$, l'on ne trouvera pour y qu'une valeur positive $y = \frac{1}{2}a$, car l'équation se change en $2a^3 - 3aay + ayy = aay + ayy$. Or y a cette valeur au point S, ainsi ailleurs la portion IX ne s'éleve pas, & la courbe R ne descend pas jusques à Tt, & cette ligne est asymptote de R, & de la partie IX de la courbe $CAIX$.

4. Comme n. 4. Exemple 10.

EXEMPLE XIII. $axy + xyy = 2a^3 - 3aay + ayy$.

Fig. 122. 140. 1. APrès avoir supposé Fig. 122. la position & la valeur que M. DESCARTES donne aux lignes dans sa Géometrie; on demande $CM \times CB \times CH = CD \times CF \times a$; $axy + xyy = 2a^3 - 3aay + ayy$, équation que vous pourrez construire de cette maniere, Fig. 140.

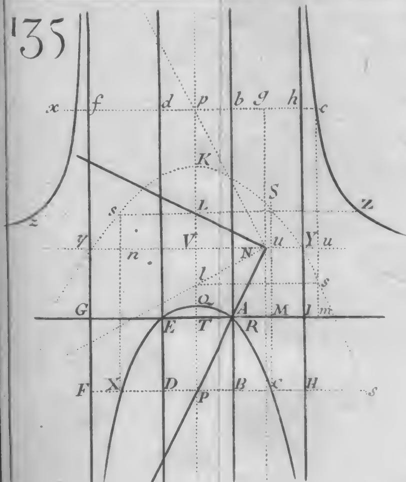
2. Soit $AS = AX = \frac{1}{2}a$; par les points S, X menez Ss, Xx paralleles à AB. Soit $ST = a$; par le point T menez Tt parallele à GA. La parabole KC a pour parametre $4a$, son axe Kx se meut sur Xx, Kl est $\frac{1}{16}a$. Ll est une Regle qui glisse sur Ss, & est attachée au point l de l'axe Kx. Le reste comme Ex. 11. n. 2. Fig. 138. excepté que l'angle CPA est tourné d'un côté different. L'intersection C décrit les trois courbes $YGEC$, Q, R.

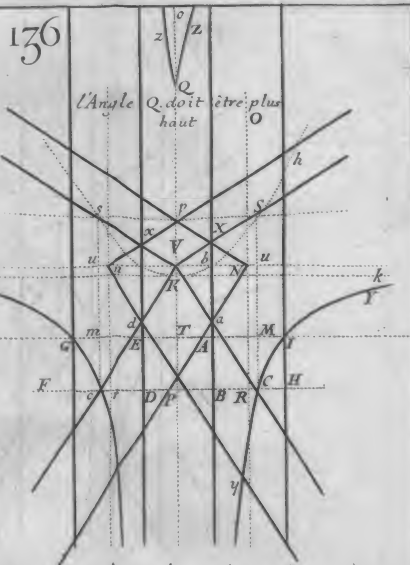
En premier lieu pour décrire la courbe R, on fait comme Ex. 11. pour décrire la courbe R de Fig. 138. excepté qu'on tire le point P jusques près de I; là comme Ex. 12. pour la courbe R de Fig. 139. la petite Regle Ll se trouve tellement gênée entre NC, PC, que le mouvement ne peut pas se continuer vers le même côté. Alors on retire à l'infini le point P du côté d'où il étoit venu, & l'on acheve ainsi la description de la courbe R; la Regle NC soûtient la Regle Ll dans le premier mouvement, & elle la pousse en haut dans le retour. L'anneau C ne sera jamais sur IH, par la même raison que dans les Exemples precedens il n'est jamais sur les asymptotes; IH sera donc une asymptote des courbes R, Q.

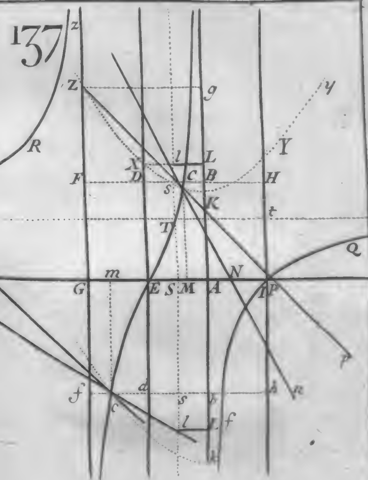
En second lieu la partie infinie YG de la courbe $YGEC$ se décrit en mettant le sommet de la parabole à une hauteur infinie au dessus de GA; les points N, P, V à une distance infinie du côté de Y; les Regles NC, Vt sur la partie MC de l'equerre MCB transportée au même endroit, les anneaux C, t l'un sur l'autre: On tire le point P jusques en G, le point t tombe en ce moment sur GF.

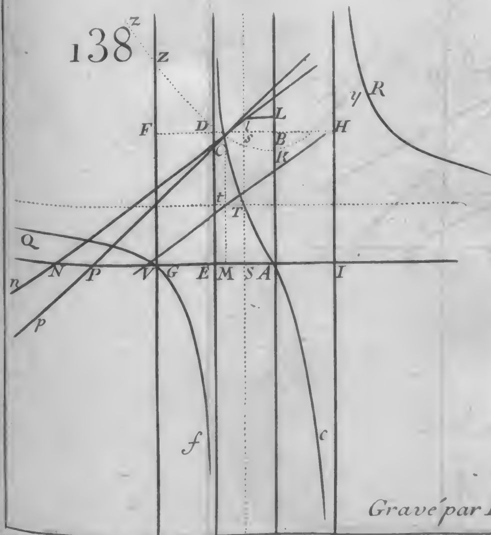
En troisiéme lieu si l'on continuë le mouvement de P depuis G jusqu'en E, les Regles NC, PC se couperont au dessous de GA, & décriront le petit arc GE, la ligne NC poussant en bas la Regle Ll, jusqu'à ce que l'anneau C soit sur le sommet K; & ensuite élevant la même Regle Ll.

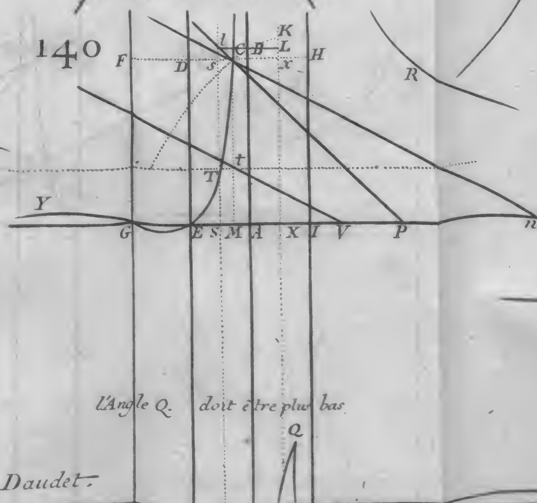
En quatriéme lieu si l'on tire le point P depuis E à l'infini vers I, l'on décrira la portion infinie EC de la courbe $YGEC$, sans que l'anneau puisse

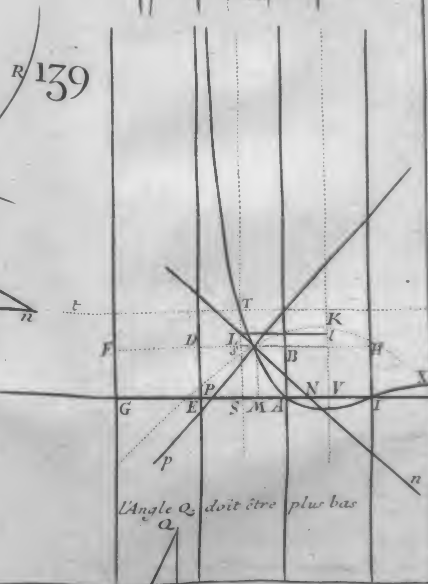












Gravé par Daudet.



puisse être jamais sur AB par la même raison qu'auparavant, & AB est asymptote de GEC.

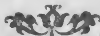
En cinquiéme lieu il faut concevoir la parabole à une distance infinie au dessous de GA, les Regles NC, PC, Vt à une distance infinie du côté de Y; les parties inferieures de NC, PC étant employées; on décrira la courbe Q, comme on a fait la courbe Q de Ex. 12. Fig. 139. les paralleles AB, IH sont asymptotes.

De la maniere dont on commence la description de la courbe R, & de la portion YG, on conclurra que R ne descend point, & que YG ne s'éleve pas jusqu'à Tt, & que cette ligne est asymptote de R.

Ces trois lignes sont le lieu cherché.

Dém. Les triangles tVM, CNM, lCs sont équiangles, le triangle PCM est isoscele, & $PM = CM$,. x; $VM = PM - PV$, $x - a$. Les triangles VtM, Csl donnent cette Analogie VM, $x - a : Mt$, $a :: Cs = sB - CB$, $\frac{1}{2}a - y : sl$, $\frac{\frac{1}{2}aa - ay}{x - a} = Lx$. Et ajoûtant $KL = \frac{1}{16}a$, on fait $Kx = \frac{1}{16}a \frac{+\frac{1}{2}aa - ay}{x - a}$, qui étant multipliée par le parametre $4a$, forme un produit qui par la nature de la parabole est égal au quarré de l'appliquée Cx, $yy + ay + \frac{1}{4}aa$, ce qui se reduit à $xyy + axy = 2a^3 - 3aay + ayy$. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. L'équation precedente se change en $x = \frac{2a^3 - 3aay + ayy}{yy + ay}$. Pour avoir la situation des courbes, faites 1° $x = 0$; 2° $y = 0$; 3° $y = \frac{1}{2}a$; 4° $y = \frac{3}{2}a$; 5° $y = 3a$; on trouve $x = \frac{1}{6}a$, valeur positive, & comme toutes les valeurs de x sont positives en prenant y plus grande que $2a$, il suit que la courbe YG s'étend à l'infini du côté de Y. Si l'on fait 7° $-y = \frac{1}{3}a$, ou $y = -\frac{1}{3}a$, il resulte $x = -14a$. Si l'on fait $-y = \frac{2}{5}a$, ou $y = -\frac{2}{5}a$, c'est $x = -14a$ cette valeur negative de x marque qu'au dessous de GA entre les paralleles AB, IH, il se forme une nouvelle courbe Q, qui a deux rameaux qui descendent à l'infini. Son sommet est à la distance de GA d'environ 13 à $14a$. Si l'on fait 8° $-y = a$, $y = -a$, l'on trouve $x = \frac{6a^3}{0}$, & IH est asymptote. Si l'on fait 9° $-y = 3a$, $y = -3a$, il vient $x = \frac{2a^3 + 9a^3 + 9a^3}{9aa - 3aa} = \frac{10}{3}a$, & parceque les valeurs de x seront toûjours positives, quelque valeur de $-y$ que l'on prenne au delà de a, on conclud, que au dehors des paralleles, il se forme une courbe R, qui est toute au dessus de GA. Si l'on fait 10° $x = a$, l'équation se change en $y = \frac{1}{2}a$. Et parceque x étant a, y n'a qu'une valeur $\frac{1}{2}a$, ce qui arrive au point S, il suit que Tt est asymptote de la courbe R, & de la portion GY de la courbe $YGEC$.



PROBLEME.

ON sera peut-être bien aise de voir une courbe, qui soit de telle nature, que toutes ses appliquées étant égales aux appliquées d'une Section conique, il y ait même raison des abscisses de la nouvelle courbe prises entre son sommet & ses ordonnées à une ligne donnée, que de cette ligne donnée aux abscisses de la Section conique prises de même entre son sommet & ses ordonnées égales.

Fig. 141. Etant donnée une courbe quelconque *AD*, Fig. 141. décrire une autre courbe *Hd*, dont la nature soit telle, que ses ordonnées *cd* étant égales aux ordonnées *CD* de la courbe *AD*; il y ait même raison de *Ac* abscisse prise entre son sommet *A* & l'ordonnée *cd* à une ligne donnée *AB*, que de la ligne *AB* à *AC* abscisse prise entre le sommet *A* & l'ordonnée *CD* égale à *cd*.

1. Supposons la chose faite, & nommons la donnée *AB*, a; les inconnues *AC*, x; $CD = cd$, y; *Ac*, z. Par l'hypothese, *AC*, $x : AB$, $a :: AB$, $a : Ac$, z. Donc $xz = aa$, équation generale pour toute sorte de courbes cherchées *Hd*.

2. Que la courbe *AD* soit une parabole, dont le parametre est a; son équation sera $x = \frac{yy}{a}$. Substituons cette valeur de x à sa place dans l'équation generale $xz = aa$; nous ferons $yyz = a^3$, équation à l'hyperbole cubique par rapport à ses asymptotes. Ainsi la courbe *Hd* est une hyperbole cubique, dont l'équation est $yyz = a^3$, *Ac*, *AB* les asymptotes, *A* le sommet.

3. Que la courbe *AD* soit un cercle, dont le diametre est $2a$; son équation sera $xx - 2ax = -yy$, dont la racine est $x = a + \sqrt{aa - yy}$, qui étant substituée dans $xz = aa$, donne $z\sqrt{aa - yy} = aa - az$, qu'il faut quarrer, pour avoir $yyzz - 2a^3z + a^4 = 0$. Equation de la nouvelle courbe *Hd*.

4. Si au lieu d'une courbe, l'on avoit donné un angle, & que l'on eut l'équation $x = \frac{cy}{b}$, l'analogie seroit $\frac{cy}{b} : a :: a : z$; $\frac{cyz}{b} = aa$, $yz = \frac{aab}{c}$ équation de la courbe *Hd*, qui seroit une hyperbole ordinaire entre ses asymptotes.

ARTICLE III.

Quelle est la ligne courbe la plus simple, qui donne la resolution du Probléme de Pappus proposé en cinq lignes droites.

1. M. DESCARTES dit, que cette question étant proposée en cinq lignes, le cas le plus simple est celui, où toutes les lignes données sont paralleles entr'elles; & qu'après ce cas le plus simple est celui, où il y en a

quatre paralleles, & une cinquiéme qui les coupe. Mais quand même ce cas seroit par rapport à la Figure, le plus simple; il ne s'en suivroit pas, que la courbe qui le resout fût aussi la plus simple : car nous avons vû dans les Exemples de trois ou quatre lignes proposées, que la resolution s'est faite avec des courbes moins simples les unes que les autres. En effet trois lignes étant proposées, on a trouvé un cercle, Sect. 2. Art. 6. Ex. 4. Fig. 88. une hyperbole rapportée à ses diametres, Art. 7. Ex. 3. Fig. 100. Ex. 5. Fig. 102. une hyperbole rapportée à ses asymptotes, Art. 8. Ex. 3. Fig. 113. L'Exemple même de M. DESCARTES, qu'il a construit avec un cercle, Art. 6. Ex. 13. Fig. 69. se construit encore avec une hyperbole rapportée à ses diametres, Art. 7. Ex. 9. Fig. 105.

2. Quelque raison que l'on apporte, pour prouver que les courbes, qui resolvent la question de Pappus proposée en cinq lignes, dont quatre sont paralleles entr'elles, & sont coupées par une cinquiéme; quelque raison, dis-je, que l'on apporte, pour prouver que ces courbes sont les plus simples qui puissent resoudre ce Problême proposé en cinq lignes : l'on aura de la peine à se persuader que l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, soit plus simple, ou même aussi simple que l'équation $y^3 = aax$ à la premiere parabole cubique. Il en est de même de l'équation $2aax - 3ayx + xyy = aay + ayy$ comparée avec l'équation $xyy = a^3$ d'une hyperbole cubique rapportée à ses asymptotes. Cependant M. DESCARTES assure Liv. 1. Part. 3. Sect. 2. & Liv. 2. Part. 2. Sect. 1. que lorsqu'il y a cinq, six, sept ou huit lignes données, les points cherchez se rencontrent en quelqu'une des lignes, qui sont d'un degré plus composées que les Sections coniques; & qu'il est impossible d'en imaginer aucune, qui ne soit utile à cette question, à cause que la position des lignes droites données peut varier en toutes sortes, & par consequent faire changer tant les quantitez connuës, que les signes + & — de l'équation en toutes les façons imaginables.

M. DESCARTES n'ose pas déterminer quelles courbes sont les plus simples, ou celles des premiers Exemples, dans lesquels une des inconnuës y monte au cube y^3; ou celles des six derniers, dans lesquels les deux inconnuës composent le parallelepipede xyy. Si le Problême est ainsi proposé, étant données quatre lignes paralleles, & une cinquiéme qui les coupe, trouver un point, duquel ayant tiré une ligne droite sur chacune des données; le parallelepipede composé de trois de ces lignes soit égal au parallelepipede composé des deux autres & d'une ligne donnée : & si, comme M. DESCARTES le dit Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. entre les lignes du même genre celles-là sont également composées, qui peuvent servir à trouver les mêmes points, & construire les mêmes Problêmes, c'est-à-dire à construire les differens cas du même Problême : il faut conclurre, que les courbes des premiers & des derniers Exemples, qui resolvent les differens cas de la question ici proposée sont également simples, à moins qu'on

ne veüille avec Mr DESCARTES donner la preference aux courbes des premiers Exemples, à cause que leur construction est plus facile. Cependant il semble que les Geometres, qui veulent que l'équation $xy = aa$ dans laquelle les inconnuës composent un rectangle, soit plus composée que les équations $yy = ax$, $yy = 2ax \pm xx$, dans lesquelles le quarré de l'une, & même des deux inconnuës se trouve : doivent aussi dire, que les équations des six derniers Exemples, dans lesquels les inconnuës composent un parallelepipede xyy, sont plus composées que celles des Exemples precedens, qui contiennent le cube y^3 d'une seule inconnuë.

ARTICLE IV.

Cinq lignes étant données, les points cherchez peuvent être en une ligne droite, en un cercle, ou en une Section conique. Et trois ou quatre lignes étant données, ils peuvent être sur une courbe d'un genre plus élevé.

PArceque cinq lignes étant données, leur differente position peut faire changer les signes + & — d'une infinité de façons ; il suit que les points cherchez peuvent composer une ligne droite, ou un cercle, ou une Section conique. On a déja vû Art. 1. des Exemples à la ligne droite. Parceque, comme on l'a observé, Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 1. les produits des lignes cherchées peuvent avoir entr'eux telle raison, qu'on voudra ; il suit que, quelque nombre de lignes qu'on propose, il n'est point de ligne, qui ne puisse être utile en quelque cas ; & qu'ainsi trois ou quatre lignes étant données, les points cherchez peuvent être sur une courbe d'un genre plus élevé que les Sections coniques. Voici des Exemples.

Fig. 122. 1. On demande Fig. 122. que le parallelepipede sous CM, CB, CH soit au parallelepipede sous CD, CF, & une donnée a ; comme CM est à a. Après avoir supposé la même valeur des lignes que M. DESCARTES leur donne dans sa Geometrie, on trouve cette proportion $axy + xyy : 2a^3 - 3aay + ayy :: x : a$, qui se reduit à $y = \frac{1}{2}a$ équation à la ligne droite, qu'il est aisé de construire.

2. On demande que $CB \times CD \times CH : CM \times CF \times a :: CB : a$. $aay - y^3 : 2aax - axy :: y : a$, qui se reduit à $yy - xy = aa - 2ax$, équation à l'hyperbole rapportée à ses diametres, ou à ses asymptotes, qu'il n'est pas fort difficile de construire.

3. On demande que $\overline{CM \times CD \times CH} + \overline{CM \times \overline{CB}^2} : CB \times CF \times a :: a : CM$, c'est-à-dire, $aax - xyy + xyy = aax : 2aay - ayy :: a : x$; $yy - 2ay = - xx$, équation au cercle.

Fig. 86. 4. Fig. 86. Les lignes AB, EF sont paralleles, EA les coupe à angles

droits. Il faut trouver un point C, duquel tirant les perpendiculaires CB, CD, CF ſur les données, on ait $CB \times CD : CF \times a :: \overline{CD}^2 : \overline{CB}^2$.

Nommons AE, $a = BF$; AB, $x = CD$; CB, y; $CF = BF - CB$, $a - y$. On a donc $xy : aa - ay :: xx : yy$. & $y^3 = aax - axy$.

5. Quand on ne ſuppoſeroit que deux lignes droites données AB, AD, ſi l'on demandoit que le quarré de CD fût au quarré de CB, comme CB eſt à une donnée a; on auroit $xx : yy :: y : a$, & $y^3 = axx$ équation à la ſeconde parabole cubique.

ARTICLE V.

Si le Problême de Pappus peut être propoſé d'une maniere entierement impoſſible.

ON a vû, Part. 2. Sect. 2. Art. 1. n.4. que M. DESCARTES dit dans une de ſes Lettres, qu'on peut propoſer le Problême de Pappus en pluſieurs manieres differentes de celles, dont il l'a propoſé dans ſa Geometrie, & parmi leſquelles il y en a quelques-unes d'impoſſibles de quelque façon que l'on faſſe le calcul.

On n'entend pas parler ici des impoſſibilitez, qui ſont évidentes, dès qu'on les propoſe, & avant tout examen & tout calcul : comme ſi le Problême de Pappus étant propoſé en quatre lignes, on demandoit que $CB \times CF$ & $CD \times CH$ fuſſent entr'eux, comme deux perpendiculaires tirées du point A ſur ES de Fig. 69. Ou qu'après avoir dit que $AG = 5$, $AE = 3$, on demandoit, que ces deux rectangles fuſſent égaux, & comme AG à AE. Fig. 69.

Mais il s'agit des impoſſibilitez, dont on ne peut s'appercevoir, qu'après avoir fini ou du moins avancé le calcul. Voyez Sect. 2. Art. 5. Ex. 9. & Art. 6. Ex. 10. Cela arrivera certainement toutes les fois que tous les termes, qui ſont ſous le ſigne radical, auront le ſigne $-$; or les ſignes peuvent varier de toutes les façons imaginables : ainſi le Problême de Pappus peut être propoſé en trois ou quatre lignes d'une maniere impoſſible.

ARTICLE VI.

Des differentes Eſpeces de courbes, & de leur deſcription.

M. DESCARTES.

POur les lignes qui ſervent aux autres cas, je ne m'arrêterai point à les diſtinguer par eſpeces : car je n'ai pas entrepris de dire tout; & ayant expliqué la façon de trouver une infinité de points par où elles paſſent, je penſe avoir donné le moyen de les décrire.

Quelles sont les lignes courbes, qu'on décrit en trouvant plusieurs de leurs points, qui peuvent être reçuës en Geometrie.

Même il est à propos de remarquer, qu'il y a grande difference entre cette façon de trouver plusieurs points pour tracer une ligne courbe, & celle dont on se sert pour la spirale, & ses semblables. Car par cette derniere on ne trouve pas indifferemment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux, qui peuvent être déterminez par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, & ainsi à proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est-à-dire pas un de ceux, qui lui sont tellement propres, qu'ils ne puissent être trouvez que par elle. Au lieu qu'il n'y a aucun point dans les lignes, qui servent à la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se déterminent par la façon tantôt expliquée. Et pourceque cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles, qui peuvent aussi être décrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entierement rejetter de la Geometrie.

Quelles sont aussi celles, qu'on décrit avec une corde, qui peuvent y être reçuës.

** Discours 8ᵉ.*

Et on n'en doit pas rejetter non plus celle, où on se sert d'un fil, ou d'une corde repliée, pour déterminer l'égalité ou la difference de deux ou plusieurs droites, qui peuvent être tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche, à certains autres points, ou sur certaines autres lignes à certains angles : ainsi que nous avons fait en la Dioptrique * pour expliquer l'ellipse & l'hyperbole. Car encore qu'on n'y puisse recevoir aucunes lignes qui semblent à des cordes, c'est-à-dire, qui deviennent tantôt droites & tantôt courbes, à cause que la proportion, qui est entre les droites & les courbes, n'étant pas connuë, & même je croi ne le pouvant être par les hommes, on ne pourroit rien conclurre de là qui fût exact & assuré. Toutefois à cause qu'on ne se sert de cordes en ces constructions, que pour déterminer des lignes droites, dont on connoît parfaitement la longueur, cela ne doit point faire qu'on les rejette.

1. Il y a quatre especes de courbes dans le premier genre, le cercle, la parabole, l'ellipse, l'hyperbole ; M. DESCARTES divise encore les ellipses en differentes especes, aussi bien que les hyperboles dans sa Diop-

trique. Mais la difficulté qu'on trouve dans les autres genres, eſt cauſe qu'on ne l'a point fait.

2. Nous avons parlé de la deſcription des courbes avec un fil ou une corde, Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 4. Methode 2. de leur deſcription en cherchant pluſieurs de leurs points §. 3. Il reſte à expliquer la difference, que M. DESCARTES met entre les manieres de décrire les courbes en trouvant pluſieurs de leurs points, & qui commence par ces mots; *Même il eſt à propos de remarquer*, &c.

3. M. DESCARTES vient de parler de la courbe de Fig. 122. qui ſe Fig. 122.
décrit par un mouvement regulier & continu: il ſemble donc, qu'en diſant, *qu'il y a grande difference entre cette façon de trouver pluſieurs points pour tracer une ligne courbe, & celle dont on ſe ſert pour la ſpirale*; il compare la Methode, qui décrit une ligne Geometrique par un mouvement continu avec la Methode, qui décrit auſſi la ſpirale par un mouvement continu, & qui conſiſte en ce que Fig. 45. tandis que le rayon *a A* parcourt d'un Fig. 45.
mouvement uniforme toute la circonference du cercle *ABCDA* par ſon extrêmité *A*; le point *a* du centre parcourt le rayon *a A* d'un mouvement auſſi uniforme; de ſorte que la trace, que le point *a* laiſſe dans ce mouvement composé, ſoit la ſpirale *abcdA*, comme il a été dit, Part. 1. Sect. 2. Art. 3. n. 3. Si c'étoit là le ſentiment de M. DESCARTES, il auroit raiſon de preferer la Methode, avec laquelle il a décrit la courbe de Fig. 122. à la Methode de décrire la ſpirale, parceque le mouvement du point *a* ſur le rayon, & celui du rayon ſur la circonference du cercle ne ſauroient ſe faire exactement enſemble, la proportion du rayon & de la circonference n'étant pas connuë. Auſſi ne crois-je pas, que la ſpirale ait jamais été décrite de cette façon.

4. La maniere ordinaire de décrire la ſpirale eſt de chercher pluſieurs de ſes points de cette façon Fig. 45. Le point *A* eſt l'origine des *x*, qui ſe prennent en allant de *A* en *B*, *C*, *D* ſur la circonference du cercle *ABCD* & les abſciſſes ſont les arcs *AB*, *AC*, &c. Le centre *a* eſt l'origine des ordonnées *y*, qui ſe prennent en allant de *a* vers *A* ſur le rayon *aA*, & ſe tranſporte ſur les rayons *ab*, *ac*, &c. Par exemple ſi l'on veut le point *d* de la ſpirale, lequel répond au point *D* neuviéme diviſion de la circonference depuis le point *A*: je tire le rayon *aD*, & ayant pris *ag* ſur le rayon, je tranſporte cette ligne en *ad*, & *d* eſt un point de la ſpirale cherchée. On trouvera de la même façon autant de points qu'on voudra de cette courbe.

Si la penſée de M. Deſcartes eſt ici, que la maniere de décrire les courbes par un mouvement continu & regulier, eſt préferable à cette ſeconde maniere de décrire la ſpirale: il a encore raiſon; puiſqu'elle eſt même préferable à la maniere de décrire les lignes Geometriques en cherchant pluſieurs de leurs points; à cauſe que par cette maniere on ne décrit pas à pro-

FIG. 45. prement parler les courbes, desquelles on ne trouve qu'un très-petit nombre de points; mais on les suppose décrites, & on les considere. Au lieu que par le mouvement continu on trace la courbe, sans en chercher les points separément.

5. Il paroît plûtôt, que M. Descartes ne parle en cet endroit, que des Methodes qui décrivent la spirale & les lignes Geometriques en trouvant plusieurs de leurs points. Ce qui se prouve soit par les paroles mises à la Marge du Texte, soit par celles-ci. *Et pourceque cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles, qui peuvent aussi être décrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entierement rejetter de la Geometrie.* Et quand il dit que cette *façon* a été *tantôt expliquée:* il entend ce qu'il en a dit, Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 3. n. 2. Cela supposé.

6. Ne trouve-t-on pas n. 4. indifferemment les points de la spirale, c'est-à-dire, tous ceux que l'on veut?

7. *On trouve seulement les points de la spirale, qui peuvent être déterminez par une mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer.* Je ne voi pas, qu'on puisse trouver les points de la spirale, ni qu'on puisse la décrire d'une maniere plus simple, que celle qui vient d'être rapportée n. 4. ni qu'on puisse se servir pour cela d'une mesure plus simple.

Ainsi à proprement parler, on ne trouve pas un des points de la spirale, c'est-à-dire pas un des points, qui lui sont tellement propres, qu'ils ne puissent être trouvez que par elle. Il me semble que le point *d* par exemple est aussi propre de la spirale, que les points des lignes Geometriques leur sont propres. Que signifie cette expression, le point *d* de la spirale peut être trouvé par la spirale? Est-ce qu'on trouve les points de l'hyperbole par l'hyperbole?

8. *Cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles, qui peuvent être décrites par un mouvement regulier & continu.* Cela est vrai de la Methode de Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.



PARTIE TROISIE'ME.

Les proprietez des lignes courbes Geometriques se déduisent de leur équation.

L'Equation d'une ligne courbe Geometrique, est l'expression Algebrique du rapport, qu'ont tous les points de cette ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, avec qui on l'a comparée. M. Descartes parle en peu de mots des proprietez en general, qu'on peut conclurre de l'équation des courbes; ensuite il s'étend sur la maniere de mener leurs tangentes, en supposant

ſuppoſant la connoiſſance de cette équation. Ce ſera la matiere des deux Sections de cette Partie.

SECTION I.

Des proprietez en general des lignes courbes déduites de leur équation.

M. DESCARTES.

Or de cela ſeul qu'on ſçait le rapport, qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ai expliquée ; il eſt aiſé de trouver auſſi le rapport qu'ils ont à tous les autres points & lignes données : & enſuite de connoître les diametres, les aiſſieux, les centres, & autres lignes, ou points, à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus ſimple qu'aux autres : & ainſi d'imaginer divers moyens de les décrire, & d'en choiſir les plus faciles. Et même on peut auſſi par cela ſeul trouver quaſi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'eſpace qu'elles comprennent, ſans qu'il ſoit beſoin que j'en donne plus d'ouverture. Et enfin pour ce qui eſt de toutes les autres proprietez qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles, qu'elles font avec quelques autres lignes.

Que pour trouver toutes les proprietez des lignes courbes, il ſuffit de ſçavoir le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites ; & de la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits. Fig. 53.

Prenons pour exemple l'hyperbole GCE Fig. 53. dont l'équation a été trouvée Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$, après qu'on l'a eû comparée avec la droite AB, & qu'on a eû nommé les connuës AG, a ; KL, b ; NL, c ; les inconnuës CB, y ; AB, x ; & qu'on a eû trouvé $BL = \frac{by - bc}{c}$. Je regarde cette équation, comme une premiere proprieté, dont il faut conclurre les autres. Tandis qu'on fait la recherche des proprietez inconnuës, il n'eſt pas poſſible, qu'il n'y ait de tems en tems bien du travail inutile, ſoit parcequ'on ne peut pas toûjours deviner d'abord le chemin le plus court, ſoit parcequ'il ſe trouve des chemins qui ne conduiſent à rien. Après avoir trouvé pluſieurs de ces proprietez, on leur donne l'ordre qui paroît le plus naturel : une proprieté déja trouvée ſert fort ſouvent à en connoître une autre, ſans qu'il ſoit neceſſaire de recourir à la premiere équation ; ſouvent auſſi on découvre une nouvelle proprieté ſans avoir beſoin ni de l'équation, ni des proprietez déja connuës.

I.

Fig. 142. 53. On mene par le point G, Fig. 142. qui est la même que Fig. 53. la droite GF parallele à AB; on veut savoir le rapport des points C de la courbe GCE aux points de la droite GF. Continuez BC en F, vous avez $FB = GA$, a; & CF, $z = a - y$; & $y = a - z$.

Tirez la valeur de y de l'équation $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$; pour cela extrayez sa racine, qui sera $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{cx}{2b} + \sqrt{-\frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{acx}{2b} - \frac{ccx}{2b} + \frac{ccxx}{4bb}}$. Substituez cette valeur de y dans $z = a - y$. Quarrez chaque membre, il vous restera $zz - az + cz - \frac{cx}{b}z + \frac{ac}{b}x = 0$, équation qui exprime le rapport du point C & de tous les autres de la courbe GCE à tous les points de la droite GF.

Mais ce rapport auroit pû se trouver plus aisément de cette façon. Les triangles CBL, CFG sont équiangles; donc CB, y: BL, $\frac{by - bc}{c}$: : CF, z: FG, x, $xy = \frac{zby - bcz}{c}$; pour y mettez sa valeur $a - z$; vous ferez $zz - az + cz + \frac{acx}{b} - \frac{cxz}{b} = 0$. Comme auparavant.

II.

On divise AG en deux parties égales au point I, & par le point I on mene IP parallele à KN; on cherche le rapport des points C de la courbe GCE aux points de la droite IP. Nous avons $IA = \frac{1}{2}a$; nommons CR, v. Les triangles NLK, PAI donnent cette Analogie NL, c: LK, b : : IA, $\frac{1}{2}a$: AP, $\frac{ab}{2c}$; donc PB, $\frac{ab}{2c} - x$. Les triangles PAI, PBR fournissent celle ci, PA, $\frac{ab}{2c}$: AI, $\frac{1}{2}a$: : PB, $\frac{ab}{2c} - x$: BR, $\frac{1}{2}a - \frac{cx}{b}$; Donc CR, $v = \frac{1}{2}a - \frac{cx}{b} - y$. Pour y substituons sa valeur trouvée n. 1. Nous aurons $v + \frac{1}{2}c + \frac{cx}{2b} = -\sqrt{-\frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{acx}{2b} - \frac{ccx}{2b} + \frac{ccxx}{4bb}}$. Si nous quarrons les deux membres, l'équation se reduira à $vv + cv + \frac{cxv}{b} + \frac{1}{2}ac - \frac{1}{4}aa + \frac{acx}{2b} + \frac{ccx}{b} = 0$, qui exprime le rapport des points de la courbe GCE aux points de la droite IP. Et si nous faisons $v + \frac{1}{2}c + \frac{cx}{2b} = s$, & ensuite $x - \frac{ab}{c} - b = t$, nous trouverons la reduite $\frac{4bbss}{cc} = tt - \frac{4abb}{c}$ équation à l'hyperbole rapportée à un diametre, comme Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 1. n. 3.

III.

Fig. 143. On prend Fig. 143. $GI = AE$, on mene IP parallele à CK. Il faut trouver les proprietez de la courbe GCE par rapport à CB, cD, prises entre la courbe & les lignes PA, PI, sur la ligne DB parallele à GA. Je prolonge BD jusqu'à ce qu'elle rencontre IH parallele & égale à AB, x.

Lorsque la Regle GL, qui passe toûjours par le point L dans son mou-

vement autour du point G, tombe sur GA; alors les points N, C tombent sur E, & EA est égale à NL, $c = GI$. Les triangles équiangles NLK, IHD donnent cette Analogie KL, $b : NL$, $c :: IH$, $x : HD$, $\frac{cx}{b}$; & comme $HB = a + c$: on aura $DB = a + c - \frac{cx}{b}$; & $DC = a + c - \frac{cx}{b} - y$. Fig. 143.

L'équation à la courbe GCE est $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$, ou $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy = ac$. Je multiplie CD par CB, le produit est $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$, qui est égal à ac. Il est évident qu'en quelque point de la portion infinie RCE, que je prenne le point C, je trouverai la même valeur de $CD \times CB$: donc tous ces rectangles sont égaux à $AG \times GI = ac = AE \times EI$, & par consequent ils sont égaux entr'eux. Il suit encore que tous les CB, c'est-à-dire les lignes paralleles à GA prises entre la courbe RCE & la droite AB, ont toûjours une valeur, puisque le rectangle sous CB & CD étant égal à ac, il n'est jamais égal à zero : donc il y a toûjours quelque espace entre RCE & AB, ainsi AB est asymptote de RCE.

Supposons la Regle generatrice en Gl, où elle est, lorsque le point c de la courbe GCE est décrit. Nous avons cB, y, & le reste comme au point C. Les triangles nlk, cBk sont équiangles; & nous ferons nl, $c : lk$, $b :: cB$, $y : Bk$, $\frac{by}{c}$; donc $Bl = \frac{by}{c} - b$; $Al = x + \frac{by}{c} - b$. Les triangles GAl, cBl sont encore équiangles; donc GA, $a : Al$, $x + \frac{by}{c} - b :: cB$, $y : Bl$, $\frac{by}{c} - b$; $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$ même équation qu'au point C.

De plus comme auparavant nous avons $HD = \frac{cx}{b}$. Nous avons aussi $DB = a + c - \frac{cx}{b}$; & cD, $a + c - \frac{cx}{b} - y$, qui étant multipliée par cB, y; produit $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$, qui est égal à ac. D'où nous conclurrons comme auparavant, qu'en quelque point de la portion infinie RcG de la courbe GCE, que nous prenions le point c, nous trouverons la même valeur de $cD \times cB$; donc tous ces rectangles sont égaux à $AG \times GI = ac = AE \times EI$, & ainsi ils sont égaux entr'eux : nous conclurrons encore que tous les cD, ou toutes les lignes paralleles à GA prises entre la courbe RcG & la droite IP ont toûjours une valeur réelle, qu'il y a toûjours quelque espace entre RcG & IP, & que IP est une autre asymptote de RcG.

De plus les rectangles quelconques $CD \times CB$, $cD \times cB$, qui sont toûjours égaux à ac, sont égaux entr'eux : ainsi $cB : CB :: CD : cD$; $cB - CB = cC : CB :: CD - cD = Cc : cD$; & $CB = cD$. On prouvera de même que $ST = st$, &c.

On pourra encore démontrer, comme on fait dans les Traitez des Sections coniques, que quelque ligne droite LK, Ad, Fig. 144. qui coupe l'hyperbole en deux points : on a toûjours $CA = Td$, $XL = SK$. Ce qui Fig. 144.

FIG. 144. fournit une Methode pour décrire l'hyperbole. Car les aſymptotes *PA*, *PD* étant données, avec un ſeul point *C* appartenant à l'hyperbole ; on tirera par le point *C* autant de lignes droites qu'on voudra terminées aux aſymptotes, comme *BCD*, *ACd* ; enſuite on coupera $Td = CA$, $cD = CB$, les points *T*, *c* ſont à l'hyperbole. Si après cela par un point *T* déja trouvé l'on tire d'autres lignes *YTL*, &c. & que l'on coupe $YT = ZL$, le point *Z* ſera auſſi à l'hyperbole.

IV.

FIG. 143. On diviſe *IA*, Fig. 143. en deux également au point *F*, & l'on joint *FP* ; on mene *Tt* parallele à *IA*, & par le point *R* la ligne *MRm* auſſi parallele à *IA*. On demande le rapport de l'hyperbole avec *FP*, *fS*, *fs*, *Mm*.

Les triangles *PFA*, *PfT* ſont équiangles, comme auſſi les triangles *PFI*, *Pft*. Donc $PF : FA :: Pf : fT$. & $PF : FI :: Pf : ft$. Mais les deux premiers termes *PF*, *PF* ; les deux ſeconds *FA*, *FI* ; les deux troiſiémes *Pf*, *Pf* ſont égaux entr'eux ; donc les deux derniers *fT*, *ft* ſont encore égaux : & comme n. 3. $ST = st$, on aura $fS = fs$. Or on peut démontrer la même choſe de toute parallele *Cc* à *GA* ; il ſuit donc que *PF* diviſe en deux parties égales toutes les lignes *Cc*, *Ss*, paralleles entr'elles & inſcrites dans l'hyperbole, ainſi *PF* eſt un diametre de la courbe *GCE*.

On prouvera que $RM = Rm$, comme on a prouvé que $fT = ft$. *Mm* eſt parallele à *GA*, & elle paſſe par le point *R*, elle eſt donc toute hors de l'hyperbole : car ſi une de ſes parties étoit dedans, il faudroit que l'autre y fût auſſi, afin que tout ce qui ſeroit inſcrit dans la courbe ſe trouvât coupé en deux parties égales. La ligne *Mm* eſt donc touchante en *R* de l'hyperbole.

Je prolonge *Mm* & *IH* en *h*. La regle *GL* paſſant en *R*, & le marquant, *Rm* eſt *y*. Les triangles *IMh*, *NKL* ſeront équiangles, comme *IDH*, *NKL* l'étoient au point *C* ; & l'on trouvera, comme n. 3. $hM = \frac{cx}{b}$, $hm = a + c$; $Mm = a + c - \frac{cx}{b}$; $MR = a + c - \frac{cx}{b} - y$, qui étant multipliée par *Rm*, *y*, le produit eſt $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$, qui eſt égal à ac : donc $RM \times Rm$ ou $\overline{RM}^2 = ac$; $yy = ac$. C'eſt pourquoi 1° le quarré de *RM* eſt égal à chaque rectangle $CB \times CD$, $ST \times St$. 2° *RM* eſt moyenne proportionelle entre *AG*, *GI*, ou entre *AE*, *EI* ; puiſque de $yy = ac$ il ſuit que $EA, c : MR, y :: MR, y : EI, a$.

V.

FIG. 143. 144. On prolonge, Fig. 144. *PF* en *V*, de ſorte que *PV* ſoit égal à *PR* ; il faut déterminer le rapport de la ligne *PF* à l'hyperbole *GCE*.

La ligne VR est coupée en deux également au point P, & on lui a ajoûté Rf: donc 6. 2. Eucl. $\overline{PF}^2 = Vf \times fR + \overline{PR}^2$. La ligne BD est coupée également en f, & inégalement en C: donc $CB \times CD + \overline{Cf}^2 = \overline{fB}^2$; $\overline{Cf}^2 = \overline{fB}^2 - CB \times CD$, & parceque n. 4. on a trouvé $\overline{Rm}^2 = CB \times CD$, ce sera $\overline{Cf}^2 = \overline{fB}^2 - \overline{Rm}^2$. Fig. 143. 144.

Ensuite dans les triangles équiangles PfB, PRm, nous avons $Pf : fB :: PR : Rm$; donc 22. 6. Eucl. $\overline{Pf}^2 - \overline{PR}^2 : \overline{PR}^2 :: \overline{fB}^2 - \overline{Rm}^2 : \overline{Rm}^2$. Mettons dans cette Analogie à la place de $\overline{Pf}^2$ sa valeur $Vf \times fR + \overline{PR}^2$, & à la place de $\overline{fB}^2 - \overline{Rm}^2$ sa valeur $\overline{Cf}^2$; nous ferons $Vf \times fR : \overline{PR}^2 :: \overline{Cf}^2 : \overline{Rm}^2$; $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{PR}^2 : \overline{Rm}^2$. Mais VR étant double de PR, $\overline{VR}^2$ sera quadruple de $\overline{PR}^2$, & par la même raison $\overline{Mm}^2$ est aussi quadruple de $\overline{Rm}^2$. Donc le rapport de $\overline{VR}^2$ à $\overline{Mm}^2$ est le même que celui de $\overline{PR}^2$ à $\overline{Rm}^2$; donc $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{VR}^2 : \overline{Mm}^2$.

Maintenant Fig. 143. les triangles NLK, IPA fournissent cette Analogie, $NL, c : LK, b :: IA, a + c : AP, \frac{ab + bc}{c}$; & $PB = \frac{ab + bc}{c} - x$. Et puisque n. 4. $\overline{Rm}^2 = ac$, Rm est $\sqrt{ac}$; Mm, $2\sqrt{ac}$.

Dans le triangle PRm, on connoît tous les angles. Posons la raison de mR à RP comme d à e, & celle de mR à mP comme d à h: ce qui donnera les deux proportions suivantes $d : e :: mR, \sqrt{ac} : RP, \frac{e}{d}\sqrt{ac} = f$. $d : h :: Rm, \sqrt{ac} : mP, \frac{h}{d}\sqrt{ac} = g$.

Les triangles équiangles PmR, PBf fournissent aussi cette Analogie $Pm, g : PB, \frac{ab + bc}{c} - x :: mR, \sqrt{ac} : Bf, \frac{ab\sqrt{ac} + bc\sqrt{ac}}{cg} - \frac{x}{g}\sqrt{ac}$. Donc $Cf = \frac{ab\sqrt{ac} + bc\sqrt{ac}}{cg} - \frac{x}{g}\sqrt{ac} - y$, que je nomme z. Ces deux triangles donnent encore $Pm, g : PB, \frac{ab + bc}{c} - x :: PR, f : Pf, \frac{abf + bcf}{cg} - \frac{f}{g}x$, que je nomme v.

Nous avons donc Fig. 144. $PR, f = PV$; $RV, 2f$; les abscisses Pf, v; les appliquées Cf, z. Et si nous faisons $VR, 2f : Mm, 2\sqrt{ac} :: Mm, 2\sqrt{ac} : RH, \frac{2ac}{f}$ que je nomme p, nous aurons toutes les quantitez necessaires pour former les équations au diametre Vf.

Car 1° étant $Vf = f + v$; $Rf = v - f$; l'Analogie qu'on a trouvée ci-dessus $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{VR}^2 : \overline{Mm}^2$, s'exprimera ainsi $vv - ff : zz :: 4ff : 4ac$. $\frac{ff}{ac}zz = vv - ff$, qui est une des équations de l'hyperbole par rapport à son diametre vf.

Comme 2° nous avons $VR : Mm :: Mm : RH$; la raison de VR à RH def. 11. 5. Eucl. est doublée de la raison de VR à Mm. Or la raison de $\overline{VR}^2$ à $\overline{Mm}^2$ est aussi 20. 6. Eucl. doublée de celle de VR à Mm: donc dans la proportion $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{VR}^2 : \overline{Mm}^2$, on peut substituer VR & RH à la place de $\overline{VR}^2$, $\overline{Mm}^2$, pour faire $Vf \times fR, vv - ff : \overline{Cf}^2, zz :: VR, 2f : RH, p$. $\frac{2f}{p}zz = vv - ff$, qui est une autre équation de l'hyperbole rapportée à son diametre Vf. La ligne VR s'appelle le diametre déterminé.

Fig. 142. 143.

V I.

Si l'on reflechit ſur ce qu'on a dit juſqu'à preſent, on remarquera 1° qu'il y a une infinité de diametres tels que Pf, qui paſſent par le point P, & qui coupent en deux parties égales certaines paralleles inſcrites dans l'hyperbole. 2° Que le point P, où tous ces diametres ſe coupent, eſt le centre. 3° Que parmi ces diametres il y en a un, qui coupe ſes appliquées perpendiculairement, & qu'on appelle aiſſieu, axe. 4° Que tous ces diametres ont des équations ſemblables à celles du diametre PF.

V I I.

Des proprietez déja connuës, ſurtout, de l'axe on peut déduire toutes celles, qui conviennent à une hyperbole & à ſon oppoſée, ce qui fournit pluſieurs manieres de décrire l'hyperbole, ſur tout les proprietez des foyers, ainſi qu'on peut voir dans les Traitez des Sections coniques. Et parceque toutes les proprietez, dont on a parlé ici, ont été tirées de l'équation $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$, il ſuit que toutes les proprietez d'une courbe peuvent ſe conclurre de ſon équation trouvée par le rapport qu'on découvre entre tous les points de cette courbe, & tous les points d'une ligne droite.

V I I I.

On appelle rectification d'une courbe, par exemple de la circonference d'un cercle, l'operation par laquelle on trouveroit une ligne droite égale à cette circonference; & l'on appelle quadrature d'une courbe, par exemple d'un cercle, l'operation par laquelle on trouveroit un triangle, un quarré, ou quelqu'autre ſurface rectiligne égale à la ſurface du cercle. Le Problême de la quadrature du cercle conſiſte, ou à trouver cette quadrature, ou à démontrer, qu'elle eſt impoſſible. Il ſe reſoudroit parfaitement de l'une ou de l'autre façon. M. DESCARTES ne croit pas la rectification des courbes poſſible, puiſqu'il s'explique ainſi, Part. 2. Sect. 3. Art. 6. *La proportion, qui eſt entre les droites & les courbes, n'étant pas connuë, & même je croi ne le pouvant être par les hommes.* Mais dans la Geometrie des infiniment petits, le calcul integral trouve la rectification de pluſieurs courbes; en particulier de toutes les paraboles, dont l'équation eſt $y^{2m+1} = x^{2m}$, étant m un nombre entier poſitif. Ici M. DESCARTES reconnoît qu'on peut ſavoir quelque choſe touchant la quadrature des courbes.

2. La Geometrie ordinaire démontre, que l'aire d'un cercle eſt égale à celle d'un triangle rectangle, dont un côté eſt le rayon du cercle, & l'autre eſt égal à ſa circonference; mais elle ne trouve pas ce ſecond côté. Et ce peu qu'on ſait de la quadrature du cercle, n'a pas beſoin des équations $yy = 2ax - xx$, $yy = aa - xx$. Le calcul integral ſe ſert de ces équa-

tions, pour former les ſuites infinies, auſquelles la circonference & l'aire du cercle ſont égales.

4° La quadrature du cercle étant ſuppoſée, on connoît l'eſpace compris par une ellipſe, dont on ſait l'équation. Soit Fig. 146. l'ellipſe $AEBF$, dont les deux axes ſont AB, EF, du centre C & de l'intervale CA ou CB je décris le grand cercle AKB; & de l'intervale CE ou CF le petit cercle EGF. Nommons les connuës AB, $2a$; $AC = CB$, a; EF, $2b$; $EC = CF$, b; les inconnuës CD, x; DK, y; DH, z; CL, v; LG, s; LH, r; on aura $BD = a + x$; $AD = a - x$; $FL = b + v$; $EL = b - v$. Soit encore le parametre du grand axe AB de l'ellipſe, p; le parametre du petit axe FE, n. Fig. 146.

Comparons 1° l'ellipſe avec le grand cercle. Par la nature du cercle, nous avons $BD \times DA$, $aa - xx = \overline{DK}^2$, yy; & par la nature de l'ellipſe, $BD \times DA$, $aa - xx : \overline{DH}^2$, $zz :: BA$, $2a : p$. Donc $aa - xx = yy = \frac{2a}{p} zz$; $pyy = 2azz$, & $yy : zz :: 2a : p$. Mais yy eſt à zz en raiſon doublée de y à z, & par la nature de l'ellipſe le grand axe $2a$ de l'ellipſe eſt auſſi à ſon parametre p en raiſon doublée du grand axe $2a$ au petit axe $2b$, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques: donc $2a : 2b :: y : z$, c'eſt-àdire comme le grand axe $2a$ de l'ellipſe eſt au petit axe $2b$; ainſi chaque appliquée DK, y au cercle eſt à chaque appliquée correſpondante DH, z à l'ellipſe: donc 12. 5. Eucl. comme le grand axe AB eſt au petit EF, ainſi toutes les appliquées y au cercle, c'eſt-à-dire tout le cercle qu'elles rempliſſent, ſont à toutes les appliquées z à l'ellipſe, c'eſt-à-dire, à toute l'ellipſe qu'elles compoſent. C'eſt pourquoi les trois premiers termes de cette proportion étant connus, à ſavoir le grand axe, le petit axe de l'ellipſe, le cercle; le quatriéme terme, qui eſt l'ellipſe ſeroit auſſi connu.

On comparera 2° de la même maniere l'ellipſe avec le petit cercle; & l'on verra que le petit cercle eſt à l'ellipſe, comme le petit axe eſt au grand.

L'ellipſe eſt donc moyenne proportionelle entre le cercle qui a le grand axe de cette ellipſe pour diametre, & le cercle qui a le petit axe de l'ellipſe pour diametre.

5° Archimede a trouvé la quadrature de la parabole: elle ſe peut déduire de ſon équation $yy = ax$, de laquelle on conclud dans les Traitez des Sections coniques, que Fig. 147. Si PD eſt un diametre, FL une appliquée à ce diametre, PF une tangente de la parabole au point F; le ſegment PA du diametre fait par la tangente eſt égal au ſegment AL fait par l'appliquée. Ce qui étant ſuppoſé, voici comment on démontre la quadrature d'une portion de la parabole. Fig. 147.

Soit $AFBCMA$ une portion de parabole fermée par la droite BC, que AD ſoit le diametre dont DB, DC; FL ſont les appliquées; tirez AB, AC.

FIG. 147. Je dis que le triangle rectiligne *BAC* est à la portion fermée *AFBCMA* de la parabole, comme *3* à *4*. Divisez la droite *BA* en deux parties égales au point *I*, menez *HIG* parallele à *AD*, joignez *FB*, *FA*. Je dis que le triangle rectiligne *BAD* est quadruple du triangle rectiligne *BFA*. Menez encore *AH*, *IK* paralleles à *FL*, joignez enfin *GK*.

Le triangle *HIA* est double du triangle *AFI*, puisque leur hauteur étant la même, la base *HI* est double de la base *FI*; donc le triangle *HIA* est égal au triangle *AFB* double de *AFI*.

Mais le triangle *ABD* contient quatre triangles égaux au triangle *HIA*. Donc le triangle *ABD* est quadruple du triangle *FBA*.

Le même se prouve du triangle *ADC*.

Je dis de plus que, si l'on divise en deux parties égales les quatre droites *BF*, *FA*, *AM*, *MC*, & que par ces divisions on mene des diametres paralleles à *AD*, & que l'on inscrive dans chacun des quatre segmens *BF*, *FA*, *AM*, *MC* de la parabole un triangle dont le sommet se termine au sommet de chacun de ces nouveaux diametres : alors les deux triangles precedens *BFA*, *AMC* pris ensemble, sont quadruples de ces quatre nouveaux pris ensemble.

Que si dans les huit segmens que laissent les quatre nouveaux triangles, on inscrit de la même façon huit triangles ; on prouvera encore, que les quatre triangles précédens pris ensemble, sont quadruples des huit triangles pris ensemble. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que la difference des triangles inscrits & des segmens laissez, soit moindre que toute quantité donnée, c'est-à-dire soit égale à zero.

On aura donc des quantitez en proportion continuë quadruple, ou comme *4* à *1*, dont le premier terme sera le triangle *BAC* qui sera *4*, & le dernier sera les triangles que l'on conçoit inscrits dans les derniers segmens moindres que toute quantité donnée, & ces triangles aussi bien que les segmens sont zero. Appellons la somme de tous les termes x. Tous les antecedens seront $x - 0$; tous les consequens seront $x - 4$. Donc 12. 5. Eucl. $x - 0 : x - 4 :: 4 : 1$; $x = \frac{16}{3}$, qui est la somme de tous les termes, ou de tous les triangles, & de la portion *AFBCMA* de la parabole. Maintenant x, ou $\frac{16}{3}$ qui est toute la portion parabolique est au triangle *BAC*, *4* : comme *4* est à *3*. Donc la parabole *AFBCMA* est au triangle *BAC* qui lui est inscrit de la maniere qu'on l'a fait ici ; comme *4* à *3*. ou *3* : *4* :: le triangle : la parabole, & les trois premiers termes étant connus, le quatriéme ou la parabole sera connuë, & elle est égale à quatre tiers du triangle.

Que si l'on acheve le parallelogramme *BCSR*, qui est double du triangle *BAC*, il sera à la portion parabolique *AFBCMA* comme *6* à *4*. ou comme *3* à *2*. Et la portion parabolique est égale à deux tiers du parallelogramme.

IX.

M[r] DESCARTES assure, que pour ce qui est de toutes les autres proprietez, qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Telle est la belle proprieté des foyers de l'hyperbole, qui consiste en ce que Fig. 145. étant *VR* l'axe, *L*, *K* les foyers, si le rayon *GE* tombe sur la ligne hyperbolique *ERC* de telle sorte, que, si on le continuoit, il iroit au foyer *L*, ce rayon *GE* se réflechira à l'autre foyer *K*. Et comme il peut tomber une infinité de rayons sur la ligne hyperbolique *ERC*, & même sur toute la surface d'un miroir hyperbolique, qui tous seront dirigez vers le foyer *L*, ils se refléchiront aussi tous au foyer *K*, & y pourront bruler. Fig. 145.

Cette proprieté vient de ce que les lignes *GE*, *KE* font un même angle avec la ligne hyperbolique.

SECTION II.

Methode pour mener les Tangentes des Courbes.

M. DESCARTES.

MAis lorsqu'on peut tirer des lignes droites, qui les coupent à angles droits, aux points, où elles sont rencontrées par celles, avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que je prends ici pour le même, qui coupent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus mal aisée à trouver, que s'ils étoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les élemens des lignes courbes, lorsque j'aurai generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire, que c'est ici le Problême le plus utile & le plus general, non seulement que je sçache, mais même, que j'aye jamais desiré de savoir en Geometrie.

On peut considerer les lignes courbes comme des polygones, ou des parties de polygones rectilignes composez d'une infinité de côtez infiniment petits. Les anciens Geometres ne les ont-ils pas ainsi considerez, lorsqu'ils ont dit par Exemple, * qu'on peut inscrire dans un cercle, ou décrire autour d'un cercle des Polygones de tant de côtez, que la difference du cercle à ces polygones fût moindre qu'une quantité donnée quelconque? * *Eucl. Elem. l. 12. Prop. 2.*

Fig. 145. Et puiſqu'ils avançoient, qu'alors *Polygona in circulum deſinunt*, ne penſoient-ils pas qu'il n'y avoit aucune difference entre la circonference du cercle & les derniers polygones tant inſcrits que circonſcrits; de ſorte que le cercle fût un polygone d'une infinité de côtez infiniment petits? De même les côtez des derniers triangles, que l'on conçoit inſcrits dans les derniers ſegmens de la portion parabolique, dont on cherche la quadrature, ne ſont en rien differens de la ligne parabolique elle-même, elle peut donc auſſi être conſiderée comme un polygone compoſé de ces petits côtez, de ces lignes droites infiniment petites. La Geometrie des infiniments petits conſidere toûjours toutes les courbes comme des polygones, ou des parties de polygones compoſez d'une infinité de lignes droites infiniment petites.

Fig. 149. Dans cette ſuppoſition Fig. 149. le côté infiniment petit ab (il eſt ici repreſenté aſſez grand, pour rendre la choſe ſenſible) eſt un point de la courbe AdB, ou un côté infiniment petit du polygone AdB, qui ne differe en rien de la courbe AdB; & ce point, ou côté infiniment petit, prolongé de part & d'autre en e & en g eſt la tangente edg de la courbe au point d, ou adb; de ſorte que la courbe AdB & la tangente edg n'ont que le point ou la ligne droite adb infiniment petite de commun. On voit qu'à chaque point de la courbe on peut mener une tangente de cette courbe, puiſque chaque ligne droite infiniment petite, qui fait partie de la courbe, peut être prolongée de part & d'autre. De là il ſuit, que ſi la ligne droite Cd fait un angle droit Cde avec la ligne infiniment petite adb, ou avec la tangente edg, on pourra dire, qu'elle fait auſſi un angle droit avec la courbe AdB au point d; & que ſi la ligne Fd fait un angle oblique Fde de 40. degrez avec le côté infiniment petit adb, ou avec la tangente edg, on pourra dire, qu'elle fait auſſi un angle oblique de 40. degrez avec la courbe AdB. M. DESCARTES a donc raiſon de dire, qu'il n'eſt pas plus mal aiſé de meſurer l'angle oblique Fdb, que la droite Fd fait avec la courbe AdB; que de meſurer l'angle Fde, que la même droite Fd fait avec edg tangente de la courbe au point d: puiſque ces deux angles ſont le même.

M. DESCARTES 1° commence à donner la Methode pour mener les tangentes des courbes, par chercher une nouvelle valeur des deux inconnuës, qui ſe trouvent dans l'équation de la courbe, à laquelle on veut mener une tangente, ce qui ſert à faire diſparoître une des deux inconnuës. 2° Il explique le fondement de ſa Methode. 3° Il acheve de donner cette Methode, en apprenant la maniere de reſoudre une équation, dans laquelle les inconnuës ont deux valeurs égales. 4° Nous apporterons des Exemples, où le point donné n'eſt pas ſur l'axe de la courbe donnée. 5° Il aſſure, que cette Methode peut ſervir à d'autres Problêmes qu'à celui des tangentes. 6° Il parle de la conſtruction des tangentes. Nous ajoûterons 7° d'autres manieres de mener les tangentes des courbes.

ARTICLE I.

Commencement de la Methode pour mener les tangentes des courbes.

M. DESCARTES.

SOit Fig. 150. 151. 152. CE la ligne courbe, & qu'il faille tirer une ligne droite par le point C, qui fasse avec elle des angles droits. Je suppose la chose déja faite, & que la ligne cherchée est CP, laquelle je prolonge jusques au point P, où elle rencontre la ligne droite GA, que je suppose être celle, aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE: en sorte que faisant Fig. 151. MA ou CB, $= y$, & CM ou $BA = x$, j'ai quelque équation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis je fais $CP = s$, & $PA = v$, ou $PM = v - y$, & à cause du triangle rectangle PMC j'ai ss, qui est le quarré de la base égal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrez des deux côtez; c'est-à-dire, j'ai $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y = v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cette équation, j'ôte de l'autre équation, qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA, l'une des deux indéterminées x ou y. Ce qui est aisé à faire, en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, & le quarré de cette somme au lieu de xx, & son cube au lieu de x^3, & ainsi des autres, si c'est x que je veüille ôter; ou bien si c'est y, mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cette somme au lieu de yy, ou y^3, &c. De façon qu'il reste toûjours après cela une équation, en laquelle il n'y a plus qu'une seule quantité indéterminée x, ou y.

Fig. 150. 151. 152. Façon générale pour trouver des lignes droites, qui coupent les courbes données ou leurs contingentes à angles droits.

1. Puisqu'on a l'équation $ss = xx + vv - 2vy + yy$, on fait $xx = ss - vv + 2vy - yy$, & extrayant la racine quarrée de chaque membre, on a $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Ou bien on fait $yy - 2vy + vv = ss - xx$, dont les racines sont $y - v = \sqrt{ss - xx}$, $y = v + \sqrt{ss - xx}$.

2. On suppose que la droite GA est celle, aux points de laquelle on rapporte les points de la courbe CE: mais il faut que ce rapport se fasse par CM perpendiculaire sur GA, puisque l'angle CMP doit être droit, afin qu'on ait $\overline{CP}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $ss = xx + vv - 2vy + yy$, ainsi qu'on

vient de le voir dans le Texte de M. DESCARTES. Or il arrive ſouvent qu'une appliquée à une courbe fait un angle oblique avec un de ſes diametres, comme Fig. 143. l'appliquée Cf fait un angle oblique avec le diametre PF; & même CB fait auſſi un angle oblique avec la droite AB, à laquelle on a rapporté la courbe CE. Dans ce cas la Methode, qui eſt ici expliquée, n'a pas lieu.

3. M. DESCARTES dit d'abord, qu'il ſuppoſe la choſe faite, c'eſt-à-dire, entr'autres choſes que CP coupe à angles droits la courbe CE, ou ſa touchante au point C. Il ſemble cependant, que ſoit que CP coupe à angles droits, ſoit qu'elle coupe à angles obliques la courbe CE; le triangle CPM peut être rectangle en M, & donner toûjours $ss = xx + vv - 2vy + yy$, & par conſequent les mêmes valeurs de x & de y: ce qui eſt vrai. Mais M. DESCARTES appliquera Art. 2. 3. ces valeurs de x & de y aux ſeules tangentes, & il fera connoître les conditions, avec leſquelles la droite CP eſt toûjours celle, qui coupe la courbe CE à angles droits.

4. Après que la nouvelle valeur de x ou de y eſt trouvée, on la ſubſtituë à la place de celle des deux, qu'on veut faire évanoüir dans l'équation de la courbe, c'eſt-à-dire dans celle qui exprime le rapport de chaque point de la courbe CE à chaque point de la droite GA, & l'on ſubſtituë, s'il le faut, le quarré de la valeur de x ou de y à la place de xx ou de yy; &c. De telle ſorte, dit M. Deſcartes, qu'il reſte toûjours une équation, dans laquelle il n'y a plus qu'une ſeule indéterminée x, ou y.

Cela veut dire, que des deux indéterminées x, y, il n'en reſtera qu'une: car dans ces équations: comme on va le voir, les indeterminées v, s reſtent toûjours. Pour la maniere de ſubſtituer la valeur de x ou de y à leur place, les Exemples ſuivans la feront connoître.

II. M. DESCARTES.

FIG. 151. Comme ſi Fig. 151. CE eſt une ellipſe, & que MA ſoit le ſegment de ſon diametre, auquel CM ſoit appliquée par ordre, & qui ait r pour ſon côté droit, & q pour le traverſant, on a par le 13. Th. du Liv. 1. d'Apollonius, $xx = ry - \frac{r}{q}yy$, d'où ôtant xx, il reſte $ss - vv + 2vy - yy = ry - \frac{r}{q}yy$, ou bien $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ égal à rien. Car il eſt mieux en cet endroit de conſiderer ainſi enſemble toute la ſomme, que d'en faire une partie égale à l'autre.

Soit ACG une ellipſe, dont le côté droit ou parametre ſoit r; le côté traverſant ou diametre AG, q; l'abſciſſe AM, y; l'appliquée CM, x;

GM sera $q - y$. Maintenant par la nature de l'ellipse, comme le diametre GA, q est à son parametre r: de même le rectangle des segmens $GM \times MA$ du diametre, lequel rectangle est $qy - yy$, est au quarré xx de l'appliquée CM. Donc $xx = ry - \frac{r}{q}yy$. Pour xx mettons sa valeur, l'équation devient $qss - qvv + 2qvy - qyy = qry - ryy$. Et parceque GA, q est plus grand que le parametre r, rangeons tous ces termes d'un même côté, de sorte que qyy ait le signe $+$, divisons tout par $q - r$, le quotient est $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} = o$.

M. Descartes donne plusieurs Regles dans cette Geometrie, qui demandent, qu'on égale tous les termes d'une équation à zero. La raison pour laquelle il le fait ici, c'est qu'en comparant Art. 3. chaque terme de l'équation $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} = o$ avec chaque terme de l'équation $yy - 2ey + ee = o$, qui a deux racines égales, on découvre la valeur cherchée de AP, v.

III. M. DESCARTES.

Tout de même si CE Fig. 152. est la ligne courbe décrite par le mouvement d'une parabole en la façon ci-dessus expliquée, & qu'on ait posé b pour GA, c pour KL, & d pour le côté droit du diametre KL en la parabole: l'équation qui explique le rapport, qui est entre x & y est $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = o$, d'où ôtant x, on a $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, & remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient Fig. 152.

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd = o.$$

& ainsi des autres.

La courbe CE Fig. 152. est la même que CE de Figure 57. dont nous avons parlé Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 2. n. 6. qui est décrite par l'intersection de la Regle GL & de la parabole droite KC. Nous en avons encore parlé Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Ex. 1.

L'équation $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = o$ se trouve de cette maniere.

Nommons GA, b; KL, c; le parametre de la parabole KC, d; AB, $x = CM$, CB, $y = AM$; $GM = b - y$. Les triangles semblables GMC,

CBL donnent cette Analogie, $GM, b-y : CM, x :: CB, y : BL$, $\frac{xy}{b-y}$, qui étant ajoûté à KL, c, fait $KB = \frac{cb-cy+xy}{b-y}$. Or par la nature de la parabole $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$. La difference de cette équation & de celles qu'on a trouvées dans les deux endroits qu'on a citez, n'est que dans les differentes lettres, avec lesquelles les valeurs des quantitez données, ont été exprimées.

Dans cette équation pour x mettez sa valeur, elle se changera en celle-ci $y^3 - byy - cdy + bcd = -dy\sqrt{ff - vv + 2vy - yy}$.

Quarrez chaque membre, & mettez tous les termes du même côté pour avoir

$$y^6 - 2by^5 \begin{array}{l} -2cdy^4 \\ +bby^4 \\ +ddy^4 \end{array} \begin{array}{l} +4bcdy^3 \\ \\ -2ddvy^3 \end{array} \begin{array}{l} -2bbcdyy \\ +ccddyy \\ -ddffyy \\ +ddvvyy \end{array} -2bccddy + bbccdd = 0.$$

IV. M. DESCARTES.

Même encore que les points de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que j'ai dit, à ceux d'une ligne droite; mais en toute autre façon qu'on sçauroit imaginer, on ne laisse pas de pouvoir toûjours avoir une telle équation. Comme si Figure 150. CE est une ligne qui ait tel rapport aux trois points F, G, & A, que les lignes droites tirées de chacun de ces points comme C, jusques au point F, surpassent la ligne FA d'une quantité, qui ait certaine proportion donnée à une autre quantité, dont GA surpasse les lignes tirées des mêmes points jusques à G. Faisons $GA = b$, $AF = c$, & prenant à discretion le point C dans la courbe, que la quantité dont CF surpasse FA, soit à celle dont GA surpasse GC, comme d à e, en sorte que si cette quantité qui est indéterminée se nomme z, FC est $c+z$, & GC est $b - \frac{e}{d}z$. Puis posant $MA = y$, GM est $b-y$, & FM est $c+y$; & à cause du triangle rectangle CMG, ôtant le quarré de GM du quarré de GC, on a le quarré de CM, qui est $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Puis ôtant le quarré de FM du quarré de FC, on a encore le quarré de CM en d'autres termes, à savoir $zz + 2cz - 2cy - yy$. Et ces termes étant égaux aux precedens, ils font connoître y ou MA, qui est $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$, & substituant cette somme au lieu de y

Fig. 150.

dans le quarré de CM, on trouve qu'il s'exprime en ces termes FIG. 149.
$\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy$. Puis ſuppoſant que la ligne droite PC rencontre la courbe à angles droits au point C, & faiſant $PC = s$, & $PA = v$ comme devant, PM eſt $v - y$; & à cauſe du triangle rectangle PCM, on a $ss - vv + 2vy - yy$ pour le quarré de CM, ou derechef ayant au lieu de y ſubſtitué la ſomme qui lui eſt égale, il vient $zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} = 0$ pour l'équation que nous cherchions.

On a $FA = c$, & l'excez dont CF ſurpaſſe FA eſt z; ainſi CF eſt $z + c$.

De plus comme d eſt à e; de même z excez de CF ſur FA eſt à $\frac{ez}{d}$ excez de GA ſur GC; ainſi GA étant b, CG eſt $GA - \frac{ez}{d} = b - \frac{ez}{d}$. Puiſque MA eſt y, GM eſt $b - y$, & FM eſt $c + y$.

Maintenant dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2 = \frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Et dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = zz + 2cz - 2cy - yy$. Donc $\overline{CM}^2 = \frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by = zz + 2cz - 2cy$; ordonnons les termes pour avoir $2by + 2cy = \frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{dd}$, $y = \frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$.

Après cela on ſubſtituë cette valeur de y à ſa place dans celui que l'on veut des quarrez de CM, comme dans le premier $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2bez}{d} + 2by - yy$, ce qui produira $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + \frac{2bddzz + 4bcddz - 2beezz + 4bbdez}{2bdd + 2cdd} - yy$. On reduit les fractions à même denomination, & il vient $\overline{CM}^2 = \frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy$. On ne reduit pas $-yy$ à la même denomination que les autres termes ont, parceque cette valeur de $\overline{CM}^2$ ſera bientôt comparée avec une autre valeur de $\overline{CM}^2$ où il y aura auſſi $-yy$, & ces deux termes s'effaceront.

Car dans le triangle rectangle PMC on a $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = ss - vv + 2vy - yy$, comme on l'a trouvée dès le commencement de cette Section, où l'on a nommé PC, s; PA, v; AM, y; $MP, v - y$; de ſorte que l'on peut comparer ces deux valeurs de $\overline{CM}^2$, $ss - vv + 2vy - yy = \frac{bddzz + ceezz + 2bcddz + 2bcdez}{bdd + cdd} - y^2$. Mettez pour y ſa valeur $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$, dans $ss - vv + 2vy - yy$; vous trouverez $ss - vv \frac{+ ddvzz + 2cddvz - eevzz + 2bdevz}{bdd + cdd} - yy = \frac{bddss - bddvv + cddss - cddvv + ddvzz + 2cddvz - eevzz + 2bdevz}{bdd + dd} - yy = \overline{CM}^2$.

Vous pouvez à preſent comparer encore les deux valeurs de $\overline{CM}^2$, reduites à même denomination, en ſupprimant les denominateurs com-

muns. Enſuite rangez tous les termes d'un ſeul côté. Enfin diviſez par $bdd + cee + eev - ddv$, & vous aurez l'équation de M. Deſcartes $zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} = 0$.

V. M. DESCARTES,

Or après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en ſervir pour connoître les quantitez x, ou y, ou z, qui ſont déja données, puiſque le point C eſt donné, on la doit employer à trouver v ou s, qui déterminent le point P, qui eſt demandé.

Dans les trois Figures 150. 151. 152. la ligne AG eſt donnée de poſi-
Fig. 150. 151. 152. tion, le point C eſt auſſi donné, puiſqu'il eſt pris à volonté : c'eſt pourquoi la perpendiculaire $CM = x$ abbaiſſée du point C ſur la droite AG eſt connuë & par conſequent donnée. La perpendiculaire CM détermine le point M, d'ailleurs le point A eſt donné ; ainſi la droite $AM = y$ eſt encore donnée. De même Fig. 150. le point F eſt auſſi bien donné que les points C, A ; on connoît donc les droites CF, FA, & l'excez z, dont CF ſurpaſſe FA. Il eſt donc vrai que les trois quantitez x, y, z ſont connuës, dès que le point C a été choiſi.

On ſe ſervira donc des dernieres équations, qui conviennent aux Figures, 150. 151. 152. ou pour trouver $AP = v$, ce qui donne d'abord le point cherché P ; ou pour trouver $CP = s$, laquelle étant connuë, on n'a qu'à ouvrir ſon compas de la longueur de s, mettre un de ſes piez ſur le point C, & couper avec l'autre la droite AG en P, ce qui déterminera encore le point cherché P. Mais comment ſe ſert-on de ces dernieres équations, pour trouver le point P, qu'elles doivent faire connoître ? c'eſt ce qui s'expliquera, Art. 3.

ARTICLE II.

Fondement de la Methode pour mener les tangentes des courbes.

M. DESCARTES.

ET à cet effet il faut conſiderer, que ſi le point P eſt tel qu'on le
Fig. 153. deſire, le cercle Figure 153. dont il ſera le centre, & qui paſſera par le point C, y touchera la ligne courbe CE ſans la couper : mais que ſi ce point P eſt tant ſoit peu plus proche ou plus éloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe non ſeulement au point C, mais auſſi neceſſairement en quelqu'autre.

Puis

Puis il faut aussi considerer, que lorsque ce cercle coupe la courbe *CE*, l'équation par laquelle on cherche la quantité x ou y, ou quelqu'autre semblable, en supposant *PA* & *PC* être connuës, contient necessairement deux racines, qui sont inégales. Car par exemple si ce cercle coupe la courbe aux points *C* & *E*, ayant tiré *EQ* parallele à *CM*, les noms des quantitez indéterminées x & y conviendront aussi bien aux lignes *EQ* & *QA*, qu'à *CM* & *MA*, puis *PE* est égale à *PC* à cause du cercle, si bien que cherchant les lignes *EQ* & *QA* par *PE* & *PA* qu'on suppose comme données, on aura la même équation, que si on cherchoit *CM* & *MA* par *PC*, *PA*. D'où il suit évidemment que la valeur de x ou de y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette équation, c'est-à-dire qu'il y aura deux racines inégales entr'elles; & dont l'une sera *CM*, l'autre *EQ*, si c'est x qu'on cherche; ou bien l'une sera *MA*, & l'autre *QA*, si c'est y; & ainsi des autres. Il est vrai que si le point *E* ne se trouve pas du même côté de la courbe que le point *C*, il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraïe, & l'autre sera renversée, ou moindre que rien. Mais plus ces deux points *C*, & *E* sont proches l'un de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines; & enfin elles sont entierement égales, s'ils sont tous deux joints en un, c'est-à-dire si le cercle qui passe par *C*, y touche la courbe *CE* sans la couper. Fig. 153.

1. Toute ligne courbe, qui n'est pas un cercle, peut être coupée par quelque cercle au moins en quatre points differens. Soit donnée la courbe *CAaa*, Fig. 153. dont *AP* est l'axe. Du point *M*, de l'intervale *Mc* décrivez le cercle *acaii*, il coupe la courbe *CAaa* aux deux points *a*, *a* d'un côté, & aux deux point *i*, *i* de l'autre. Du même point *M* & de l'intervale *Md* décrivez un autre cercle, il touche la même courbe au point *d*, & la toucheroit encore de l'autre côté entre *C* & *E*, si on avoit achevé de décrire toute sa circonference. Et si du même centre *M* on décrivoit un cercle, dont le rayon fût moindre que *Md*, ni il ne toucheroit, ni il ne couperoit la courbe *CAaa*. On peut aussi prendre plusieurs autres centres hors de l'axe *AP*, au dedans de la courbe & décrire des cercles dont les uns toucheront la courbe en un seul point, sans la toucher ou couper ailleurs; les autres la toucheront en un point, & la couperont en

FIG. 153. en deux ; les autres la couperont en deux ou trois points sans la toucher ; d'autres enfin qui ne la toucheront & ne la couperont du tout point. Il y a même des courbes, qui peuvent être coupées ou touchées par un cercle en un plus grand nombre de points ; comme on le verra, Liv. 3. Part. 5. Sect. 2. Exemple 6.

2. Lorsque plusieurs cercles *aca*, *beb* sont décrits d'un même centre *M*, plus les rayons sont courts, plus les points d'intersection sont près l'un de l'autre, lorsqu'ils sont pris du même côté *Aca* ; plus les rayons, qui vont du centre aux points d'intersection sont aussi près l'un de l'autre.

En effet les points *b*, *b* sont plus près l'un de l'autre, que les points *a*, *a* ; & les rayons *Mb*, *Mb* plus près que les rayons *Ma*, *Ma*. Et lorsque le cercle touche la courbe en *d*, les deux points d'intersection n'en font qu'un *d*, & les deux rayons n'en font qu'un *Md* : c'est-à-dire que le point *d* du contact peut être consideré comme deux points d'intersection, qui concourent en un même endroit, & le rayon *Md* comme deux rayons, qui sont l'un sur l'autre.

3. Dans l'endroit, où un cercle touche une courbe, la tangente de la courbe est la même que celle du cercle : mais dans l'endroit, où le cercle coupe une courbe, la tangente de la courbe est differente de la tangente du cercle, & ces deux tangentes se coupent. Soit Fig. 154. la parabole *dAr*, & du point *C* comme centre décrivons le cercle *dip*, qui touche la parabole en *d*, & la coupe en *h* & *r*. Considerons encore ici les courbes, comme des polygones d'une infinité de côtez infiniment petits *ab*, *Al*, *yz*, &c. *ab*, *ig*, *pq*, &c. Au point *d*, ou à la ligne droite infiniment petite *adb*, le cercle touche la parabole, & le point *adb* est commun au cercle & à la parabole, donc la tangente *fde*, qui n'est autre chose, que le point *adb* prolongé de part & d'autre, est commune aux deux courbes.

FIG. 154.

Au point *h*, ou aux lignes infiniment petites *ghi*, *lhk*, le cercle coupe la parabole, parceque la ligne *ghi* du cercle coupe la ligne *lhk* de la parabole, donc la tangente *nm* du cercle, qui n'est autre chose, que le petit côté *gi* prolongé en *m* & *n*, coupe la tangente *oc* de la parabole, qui n'est autre chose que le petit côté *kl* prolongé. On dira la même chose au point *r*, où les tangentes *st*, *ux* se coupent encore.

Ce que l'on vient d'expliquer touchant un cercle & une autre sorte de courbes, se doit entendre de deux cercles & de deux courbes quelconques, qui se touchent ou se coupent.

4. La ligne *Cd* tirée du centre *C* au point *d* du contact, est perpendiculaire à la touchante *edf* du cercle : elle sera donc aussi perpendiculaire à la touchante de la courbe, que le cercle touche en *adb* ; puisque la touchante de cette courbe est alors la même, que la touchante *edf* du cercle. C'est pour cela que M. Descartes avance, que si le point *P* des Figures 150. 151. 152. est tel qu'on le desire, c'est-à-dire si la ligne *PC*

eſt perpendiculaire à la touchante des courbes ACG au point C; le cercle, dont le point P ſera le centre, & qui paſſera par C, y touchera la ligne courbe CE, ſans la couper. FIG. 155.

Toute la Methode, dont on parle ici, pour tirer les tangentes des courbes, conſiſte donc, le point C étant donné, à trouver ſur la droite auſſi donnée AG le point P, qui ſoit le centre d'un cercle, qui touche la courbe, dont on cherche la tangente, au point C. Car alors la droite, qu'on tirera par le point C perpendiculaire à PC, ſera tangente du cercle, & par conſequent de l'autre courbe.

Maintenant il nous faut examiner, qu'eſt-ce qu'il arrive de particulier, lorſque le cercle décrit du point P, de l'intervale PC, touche la courbe CE en C. Le voici.

5. En premier lieu Fig. 153. que le cercle EC décrit du centre P coupe la courbe AE aux deux points C, E; abbaiſſez CM, EQ perpendiculaires ſur AP; ſoit AP, a; les rayons PC, PE, b; les coupées AQ, AM, y; les ordonnées EQ, CM, x; on aura $PM = a - y$; $PQ = a - y$. Maintenant dans le triangle PCM, vous aurez $\overline{PC}^2$, $bb = xx + aa - 2ay + yy$; & dans le triangle PEQ vous aurez $\overline{PE}^2$, $bb = xx + aa - 2ay + yy$.

Ces deux équations étant les mêmes, on en tirera les mêmes valeurs de $x = \sqrt{bb - aa + 2ay - yy}$, & de $y = a - \sqrt{bb - xx}$. De telle ſorte pourtant que les deux valeurs de x exprimées par $\sqrt{bb - aa + 2ay - yy}$ ſont inégales entr'elles, parceque y, qui les compoſe, eſt plus grande au point M, qu'au point Q. De même les deux valeurs de y exprimées par $a - \sqrt{bb - xx}$ ſont inégales entr'elles, parceque x qui en eſt partie, eſt plus grande au point M qu'au point Q.

On voit en ſecond lieu, que comme plus les points C, E s'approchent, moins les ordonnées CM, EQ, ou les abſciſſes AM, AQ ſont differentes en grandeur; lorſqu'enfin les points C, E ſe rencontreront, & n'en feront plus qu'un; alors EQ ſera ſur CM & lui ſera égale, AQ s'ajuſtera ſur AM & lui ſera égale; & les deux valeurs tant des appliquées que des abſciſſes ſeront égales. Mais les points C, E ſe trouvent l'un ſur l'autre, comme on l'a vû, lorſque le cercle décrit du point P & paſſant par le point C touche la courbe dont on cherche la tangente: donc lorſque le cercle décrit du point P par le point C touche la courbe, je peux conſiderer l'appliquée & l'abſciſſe de la courbe qui répondent au point C, comme deux appliquées égales, & comme deux abſciſſes auſſi égales.

6. De là il ſuit, que dès que je ſuppoſerai Figures 150. 151. 152. que CM, x, ou AM, y ont deux valeurs égales chacune, ou que l'équation, qui exprime le rapport du point C à la ligne droite AG, contient deux racines égales de CM, ou de AM: par là je détermine CP à être le rayon du cercle, qui a pour centre le point P, & qui touche en C la courbe AE: FIG. 150. 151. 152.

ou, ce qui est le même, je détermine la ligne PC à être celle qui coupe à angles droits la courbe AE en C, & la tangente du cercle & de la courbe au point C qui leur est commun. De sorte que dès que CP sera connuë & tirée au point C, la perpendiculaire qu'on tirera par le point C sur CP, sera la touchante cherchée de la courbe AE.

7. Nous allons voir Art. 3. comment on opere, après qu'on a supposé, que l'équation, qui exprime le rapport du point C à la ligne droite AG contient deux racines égales entr'elles. Mais il faut remarquer ici que par ces deux racines on n'entend pas les deux racines qui se trouvent en toute équation qui contient le quarré de l'inconnuë, à qui ces deux racines conviennent, comme lorsque de l'équation $bb = xx + aa - 2ay + yy$, ou $yy - 2ay + aa = bb - xx$, j'extrais les deux racines $y = a \pm \sqrt{bb - xx}$. Car ces deux racines sont indépendantes de la supposition, que les deux ordonnées CM, EQ, Fig. 153. se reünissent en une seule, elles sont toûjours inégales, & souvent l'une positive, l'autre negative. Au lieu que les deux racines dont on parle ici sont toûjours égales entr'elles, toûjours du même côté d'un diametre, & par consequent toûjours ou toutes deux positives, ou toutes deux negatives en même tems.

La racine, que M. DESCARTES appelle renversée, ou moindre que rien, c'est celle qu'on appelle ordinairement negative ou fausse, dans laquelle ou toutes les quantitez qui la composent, ont le signe —, ou celles qui ont le signe — sont plus grandes que celles, qui ont le signe +.

ARTICLE III.

Suite de la Methode pour mener les tangentes des courbes.

I. M. DESCARTES.

De plus il faut considerer, que lorsqu'il y a deux racines égales en une équation, elle a necessairement la même forme, que si on multiplie par soi-même la quantité qu'on y suppose être inconnuë, moins la quantité connuë qui lui est égale, & qu'après cela si cette derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il lui en manque, afin qu'il puisse avoir separément équation entre chacun des termes de l'une, & chacun des termes de l'autre.

Comme par exemple je dis que la premiere équation trouvée ci-
* Art. I. num. 2, Fig. 151. dessus, * à savoir $yy \frac{+quy - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ doit avoir la même forme que celle qui se produit en faisant $e = y$ & multipliant $y - e$

par soi-même, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en sorte qu'on peut comparer separément chacun de leurs termes, & dire que puisque le premier, qui est yy est tout le même en l'une qu'en l'autre, le second qui est en l'une $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$ est égal au second de l'autre qui est $- 2ey$; d'où cherchant la quantité v, qui est la ligne PA, on a $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, ou bien à cause que nous avons supposé e égal à y, on a $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et ainsi on pourroit trouver s par le troisiéme terme $ee = \frac{qvv - qss}{q - r}$: mais pourceque la quantité v détermine assez le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre. Fig. 151.

Je pose $y = e$, ou $y - e = o$; dans cette équation y est regardée comme inconnuë, parceque pouvant representer toutes les droites ou coupées AM prises depuis le sommet A, elle est indeterminée : mais dans chaque operation dès que le point C est pris à volonté, $AM = y$ est déterminée & connuë. Ensuite je fais le quarré de $y - e = o$, qui est $yy - 2ey + ee = o$, & qui contient certainement deux racines égales. D'un autre côté l'on suppose que l'équation $yy + \frac{qry - 2qvy}{q - r} + \frac{qvv - qss}{q - r}$ contient aussi deux racines égales : donc les deux équations etant égales entr'elles; puisqu'elles sont égales chacune à zero; & les premiers termes yy, yy des deux équations étant encore égaux, les seconds termes $\frac{+ qry - 2qvy}{q - r}$, $- 2ey$, dans lesquels la quantité y est multipliée, seront aussi égaux; d'autant plus que l'indeterminée v peut representer une grandeur telle qu'il est necessaire, afin que ces deux seconds termes soient exactement égaux. Il en est de même des deux troisiémes termes $+ ee$, $\frac{+ qvv - qss}{q - r}$, dans lesquels y ne se trouve pas; à cause que les deux indeterminées v, s peuvent avoir la valeur necessaire, afin que ces deux termes soient aussi égaux.

Je puis donc égaler les seconds termes, & avoir $- 2ey = \frac{+ qry - 2qvy}{q - r}$; je multiplie tout par $q - r$, & je fais $- 2qey + 2ery = qry - 2qvy$; je divise tout par y, il reste $- 2qe + 2er = qr - 2qv$; $2qv = 2qe - 2er + qr$; je divise tout par $2q$, le quotient est $v = e - \frac{er}{q} + \frac{1}{2}r$. Je substituë y pour e qui lui est égale, il vient $v = y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$.

Comme CM, y est donnée dès qu'on a determiné le point C, on sait la valeur de $v = AP$: ainsi on trouve le point P, & l'on joint CP. Et la ligne CP ayant été trouvée par des équations dans lesquelles on supposoit que CM, y avoit deux racines égales, elle a les conditions requises pour être le rayon d'un cercle, dont le centre est P, & qui touche la courbe AE en C; d'où il suit que la ligne droite, qu'on menera par le point C perpendiculaire sur PC est la touchante cherchée de la courbe AE au point donné C.

II. M. DESCARTES.

* Art. 1. n. 2. Fig. 152.

Tout de même la ſeconde équation trouvée * ci-deſſus, à ſavoir

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd$$

(Je l'appelle A) doit avoir la même forme, que la ſomme qui ſe produit lorſqu'on multiplie $yy - 2ey + ee$ par $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, qui eſt $y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4$. (Je l'appelle B) de façon que de ces deux équations j'en tire ſix autres, qui ſervent à connoître les ſix quantitez f, g, h, k, v, & s. D'où il eſt fort aiſé à entendre, que de quelque genre, que puiſſe être la ligne courbe propoſée, il vient toûjours par cette façon de proceder, autant d'équations, qu'on eſt obligé de ſuppoſer de quantitez, qui ſont inconnuës. Mais pour démêler par ordre ces équations, & trouver enfin la quantité v qui eſt la ſeule dont on a beſoin, & à l'occaſion de laquelle on cherche les autres: il faut premierement par le ſecond terme chercher f, la premiere des quantitez inconnuës de la derniere ſomme, & on trouve $f = 2e - 2b$.

Puis par le dernier il faut chercher k la derniere des quantitez inconnuës de la même ſomme, & on trouve $k^4 = \frac{bbccdd}{ee}$.

Puis par le troiſiéme terme il faut chercher g la ſeconde quantité, & on a $gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Puis par le penultiéme il faut chercher h la penultiéme quantité, qui eſt $h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Et ainſi il faudroit continuer ſuivant ce même ordre juſques à la derniere, s'il y en avoit davantage en cette ſomme; car c'eſt choſe qu'on peut toûjours faire en même façon.

Puis par le terme qui ſuit en ce même ordre, qui eſt ici le quatriéme, il faut chercher la quantité v, & on a $v = \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}$; ou mettant y au lieu de e qui lui eſt égal, on a $v = \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$ pour la ligne AP, Fig. 152. Fig. 152.

1. On appelle racines d'une équation les quantitez par la multiplication deſquelles cette équation a été produite, $y - a = o$, $y - b = o$ ſont les racines de l'équation $yy - ay - by + ab = o$. L'équation A contient ſix racines, parmi leſquelles il y en a certainement deux égales dès qu'on ſuppoſe PC rayon d'un cercle, qui touche la courbe AE en C, ainſi qu'il a été dit Art. 1. Ce qui regarde ces differentes racines ſera expliqué, Liv. 3. Part. 2. Sect. 1.

2. La multiplication de $yy - 2ey + ee$ par $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$ étant faite, le produit qui eſt l'égalité B, 1° eſt égal à zero, parceque par quelque quantité qu'on multiplie zero, le produit eſt toûjours zero : or l'équation $yy - 2ey + ee$ eſt par la ſuppoſition égale à zero. 2° Chaques termes correſpondans des équations A & B peuvent être comparez, le ſecond de l'une avec le ſecond de l'autre, le troiſiéme de l'une avec le troiſiéme de l'autre, &c. parceque les indéterminées des termes de l'équation B peuvent avoir la valeur qui eſt neceſſaire, afin que les deux termes que l'on compare, ſoient exactement égaux. 3° Des ſix racines que contient auſſi l'équation B, on eſt certain qu'il y en a deux égales, à ſavoir celles de l'équation $yy - 2ey + ee = o$. De ce qu'il y a deux racines égales dans l'équation B, quelles que ſoient les autres, il ſuit que cette équation convient au point C Fig. 152. & qu'elle peut ſervir à trouver la droite PC, qui eſt ſuppoſée perpendiculaire à la courbe CE. 4° On voit que quelques ſignes qu'ayent les termes de l'équation $y^4 . fy^3 . ggyy . h^3y . k^4$, on feroit une équation, qui auroit autant de termes que l'équation B, & dont on pourroit dire ce qu'on vient de dire de l'équation B, & dont on pourroit ſe ſervir avec autant de ſuccez, ainſi que M. DESCARTES le remarquera bientôt.

3. Comme c'eſt pour connoître v, qu'on cherche les valeurs des autres indéterminées, on ne cherche que la valeur de celles des indéterminées, qui ſe trouvent dans le terme de l'équation A, où eſt v, & de celles qui ſe trouvent dans le terme de l'équation B qui lui répond : à moins que ces indéterminées ne puſſent être connuës, ſans en avoir trouvées d'autres : car alors il faudroit encore déterminer la valeur de ces dernieres. Dans cet Exemple le terme, où eſt v, eſt le quatriéme de l'équation A, $+ 4bcdy^3 - 2ddvy^3$, à qui le quatriéme terme $+ h^3y^3 - 2eggy^3 + eefy^3$

FIG. 152. répond dans l'équation *B*. Nous chercherons donc la valeur des indéterminées f, g, h, & parceque h ne peut être connuë sans que l'on connoiſſe auparavant k, on en cherchera auſſi la valeur. On commence par les termes qui ſervent à découvrir la valeur des autres.

On choiſit le quatriéme terme, qui contient v, plûtôt que le cinquiéme qui contient le quarré vv, quoique l'on puiſſe fixer la valeur de v par ce dernier ; parcequ'il eſt plus facile de le faire avec l'un qu'avec l'autre. Et même ſi v n'avoit qu'une dimenſion dans pluſieurs termes, on prefereroit celui, qui demanderoit une operation plus aiſée.

4. On commence par les ſeconds & par les derniers termes des équations *A*, *B* ; parceque n'y ayant dans les deux premiers termes que f d'indéterminée, & dans les deux derniers que k ; ces termes ne ſuppoſent la connoiſſance d'aucune indéterminee, & qu'ils ſerviront, après qu'ils ſeront trouvez, à découvrir les autres.

On compare ainſi les ſeconds termes $-2by^5 = fy^5 - 2ey^5$, on diviſe tout par y^5, il reſte $-2b = f - 2e$; $f = 2e - 2b$.

On vient aux derniers $bbccdd = eek^4$; $k^4 = \frac{bbccdd}{ee}$. On ne fait pas la valeur de k, parceque dans les autres termes il n'y a que le quarré de quarré k^4.

On compare enſuite les troiſiémes termes, parceque dans le troiſiéme terme de l'équation *B* il n'y a que deux indéterminées f, g, & que la valeur de f, que l'on connoît, étant ſubſtituée à ſa place, on déterminera g. Soit donc $ggy^4 - 2efy^4 + eey^4 = -2cdy^4 + bby^4 + ddy^4$; $gg - 2ef + ee = -2cd + bb + dd$, ou mettant pour f ſa valeur $2e - 2b$, on fait $gg - 3ee + 4be = -2cd + bb + dd$; $gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Après cela l'on compare les penultiémes termes, parceque dans le penultiéme terme de l'équation *B* il n'y a que deux inconnuës h, k, & que la valeur de k déja connuë étant ſubſtituée, on découvrira celle de h.

Soit donc $-2ek^4y + eeh^3y = -2bccddy$; $-2ek^4 + eeh^3 = -2bccdd$, où mettant pour k^4 ſa valeur $\frac{bbccdd}{ee}$, on trouve $h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$.

Enfin l'on compare les quatriémes termes, parcequ'ils ne contiennent d'indéterminées que v, que l'on cherche, & f, g, h que l'on connoît. C'eſt donc $4bcdy^3 - 2ddvy^3 = h^3y^3 - 2eggy^3 + eefy^3$; $4bcd - 2ddv = h^3 - 2egg + eef$. 1° Subſtituons la valeur de h^3 à ſa place, nous ferons $4bcd - 2ddv = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee} - 2egg + eef$. 2° Subſtituons la valeur de gg à ſa place, il viendra $4bcd - 2ddv = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee} - 6e^3 + 8bee + 4cde - 2bbe - 2dde + eef$. 3° A la place de f ſubſtituons ſa valeur ; diviſons tout par $2dd$; pour e mettons y, qui lui eſt égale & rangeons les termes comme M. DESCARTES,

TES, il se fera enfin $v = \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} = AP$.

III. M. DESCARTES.

Et ainsi la troisiéme équation, * qui est $zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddff + bddvv - cddff + cddvu}{bdd + cee + eev - ddv}$ a la même forme Art. I. n. 4. que $zz - 2fz + ff$, en supposant f égal à z; si bien qu'il y a Fig. 150. dérechef équation entre $-2f$, ou $-2z$ & $\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$; d'où on connoît que la quantité v est $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}$. C'est pourquoi composant la ligne AP de cette somme égale à v, dont toutes les quantitez sont connuës, & tirant du point P ainsi trouvé une ligne droite vers C, elle y coupe la courbe CE à angles droits; qui est ce qu'il falloit faire.

Il faut déterminer la valeur de v, qui est dans l'équation $zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddff + bddvv - cddff + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} = 0$. Je fais $z = f$, $z - f = 0$, dont le quarré est $zz - 2fz + ff = 0$. On compare les seconds termes $-2fz = \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdvz}{bdd + cee + eev - ddv}$, ou bien en laissant z qui se trouve dans chaque terme $-ef = \frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$, ou même ainsi que M. DESCARTES le fait, parce que $f = z$, $-2z = \frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$.

Je multiplie tout par $bdd + cee + eev - ddv$, d'où l'on tire $v = \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz} = AP$.

Toute la valeur de v est connuë, parceque z, qui est l'excez de CF sur FA est déterminée, lorsque le point C a été pris à volonté; & que les points F, A ont été données.

IV. M. DESCARTES.

Et je ne voi rien qui empêche qu'on n'étende ce Problême en même façon à toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque calcul Geometrique.

1. On pourroit l'appliquer au cercle de cette maniere. On a trouvé au commencement de cet Article, Fig. 151. que pour l'ellipse AP, v étoit Fig. 151. $y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$. Le cercle étant une espece d'ellipse, dont tous les diametres sont égaux entr'eux & à leurs parametres, on a $q = r$ & l'on a pour le cercle $v = \frac{1}{2}q = AP$. Ce qui marque que AP est égal au rayon du cercle, & que le point P est le centre.

2. Soit la courbe AE, Fig. 150. une parabole, dont le parametre est r, l'abscisse AM, y; l'ordonnée CM, x; AP, v; $MP = AP - AM$, $v - y$, CP, s. On a dans le triangle rectangle, CMP, $ss = xx + vv - 2vy + yy$ comme auparavant, & par la nature de la parabole $xx = ry$; substituons cette valeur de xx à sa place : nous aurons $ss = ry + vv - 2vy + yy$; $yy + ry - 2vy + vv - ss = 0$, qu'il faut comparer avec $yy - 2ey + ee = 0$. Les seconds termes sont $-2ey = ry - 2vy$, $-2e = r - 2v$; $2v = r + 2e$; $v = \frac{1}{2}r + e = \frac{1}{2}r + y$. Et parceque AM est y; il suit que MP est $\frac{1}{2}r$ la moitié du parametre.

Fig. 150.

3. Soit la même courbe AE une hyberbole, dont le diametre déterminé est q, le parametre r; & le reste comme auparavant. Par la nature de l'hyperbole on a $xx = ry + \frac{r}{q}yy$, qu'il faut substituer dans $ss = xx + vv - 2vy + yy$, afin de la changer en $ss = ry + \frac{r}{q}yy + vv - 2vy + yy$, multipliez par q, ce sera $qyy + ryy - 2qvy + qry + qvv - qss = 0$ divisez par $q + r$, vous ferez $yy \frac{-2qvy + qry}{q+r} \frac{+qvv - qss}{q+r} = 0$.

Comparez le second terme de cette équation avec le second terme de l'équation $yy - 2ey + ee = 0$. ce sera $-\frac{2qvy + qry}{q+r} = -2ey$; $v = \frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q}$; $v = \frac{1}{2}r + y + \frac{ry}{q}$. Si l'hyperbole est équilatere, l'on a $r = q$, & $v = \frac{1}{2}r + 2y = AP$.

Fig. 155. 4. Soit la courbe CD, Fig. 155. la conchoïde superieure de Fig. 43. Soit A le pole, BD, $a = CE$; BA, b; CM, $x = HB$; CH, $y = MB$; $AM = b + y$; BP, v; $PM = v + y$; PC, s. Son équation telle qu'elle a été trouvée, Liv. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 3. n. 1. sera celle-ci, $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = 0$. $xxyy = -y^4 - 2by^3 + aayy - bbyy + 2aaby + aabb$. Après cela dans le triangle rectangle CMP l'on comme auparavant $\overline{CP}^2$, $ss = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $xx + vv + 2vy + yy$; $xx = ss - vv - 2vy - yy$. Mettons cette valeur de xx à sa place, nous aurons $y^3 \frac{+aayy - bbyy - ssyy}{2v} \frac{+vvyy + 2aaby + aabb}{-2b} = 0$. équation du troisiéme degré. Maintenant pour donner à l'équation $yy - 2ey + ee = 0$ les dimensions convenables, je la multiplie par $y + f = 0$, ce qui produit $y^3 - 2eyy + fyy + eey - 2efy + eef = 0$.

Je compare d'abord les derniers termes $eef = \frac{aabb}{2v - 2b}$: donc $f = \frac{aabb}{2vee - 2bee}$. Ensuite je viens aux troisiémes termes $eey - 2efy = \frac{2aaby}{2v - 2b}$; je substituë pour f sa valeur déja trouvée, & je fais $eey - \frac{2aabbey}{2vee - 2bee} = \frac{2aaby}{2v - 2b}$, ou $ee - \frac{aabb}{ve - be} = \frac{aab}{v - b}$, $v = b \pm \frac{a \cdot b}{ee} + \frac{aabb}{e^3} = b + \frac{ab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. La construction se fera, Art. 6.

5. On pourroit même, si l'on en avoit besoin, se servir de ce Problême pour tirer une perpendiculaire sur un point donné d'une ligne droite.

Fig. 150. Soit Fig. 150. le point C de la droite FC, sur laquelle il faut tirer la per-

pendiculaire CP : je fais un angle quelconque CFP, je tire & je nomme CM, x; FM, y; FP, v; $MP = v - y$; CP, s. Que l'équation à la ligne droite au point C soit $x = \frac{by}{a}$, dont le quarré est $xx = \frac{bbyy}{aa}$; je substituë cette valeur de xx à sa place dans l'équation $ss = xx + vv - 2vy + yy$, & je fais $ss = \frac{bbyy}{aa} + vv - 2vy + yy$; $yy \frac{-2aavy - aass + aavv}{aa + bb} = 0$. dont je compare le second terme avec le second terme de $yy - 2ey + ee = 0$, & c'est $-\frac{2aavy}{aa+bb} = -2ey$; $\frac{aav}{aa+bb} = e$; $aav = aae + bbe$, $v = e + \frac{bbe}{aa} = y + \frac{bby}{aa}$, & si a étoit égal à b, $v = 2y$. Fig. 150.

V. M. DESCARTES.

Même il est à remarquer touchant la derniere somme, qu'on prend à discretion, pour remplir le nombre des dimensions de l'autre somme lorsqu'il y en manque, comme nous avons pris tantôt $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, que les signes + & − y peuvent être supposez tels, que l'on veut, sans que la ligne v, ou AP se trouve diverse pour cela, comme vous pourrez aisément voir par experience. Car s'il falloit que je m'arrêtasse à démontrer tous les Theorêmes, dont je fais quelque mention, je serois contraint d'écrire un Volume beaucoup plus gros que je ne desire.

Quelques signes qu'ayent les termes de l'équation $y^4 . fy^3 . gghh$ $h^3y . k^4 . = 0$, le produit de cette équation multipliée par $yy - 2ey + ee = 0$, sera toûjours égal à zero, & contiendra toûjours deux racines égales entr'elles, & chaque terme sera comparé à chaque terme correspondant de l'équation qu'on veut resoudre, par les indéterminées qu'ils contiennent : ainsi l'on trouvera toûjours ce qu'on cherche.

Si vous multipliez $yy\ 2ey + ee = 0$ par $y^4 - fy^3 + ggyy - h^3y + k^4$ le produit sera le même qu'auparavant à l'équation B à quelques signes près & par la comparaison de ses termes avec l'équation A vous trouverés $f = 2b - 2y$, $k^4 = \frac{bbccdd}{yy}$; $gg = -4by + 3yy - 2cd + bb + dd$; $h^3 = \frac{2bccdd}{yy} - \frac{2bbccdd}{y^3}$; & enfin après avoir substitué les valeurs de h^3, gg, f, à leur place, vous trouverez la même valeur de v qu'auparavant.

C'est à tort qu'on a avancé * que M. DESCARTES avoit fait une faute en appliquant cette Methode à toutes sortes de degrez, comme si elle ne convenoit qu'aux équations planes, & à celles qui en dépendent ; mais non pas aux cubiques, & à celles qui en dépendent : puisque les mêmes raisons, qui prouvent qu'elle est bonne pour quelques équations, prouvent aussi qu'elle l'est pour toutes. * Tom. 3. Lett. 58. & 59.

ARTICLE IV.

Cette Methode sert à mener les tangentes des courbes, le point donné n'etant pas sur l'axe au dedans de la courbe.

1. SOit donné le point P du côté de la concavité de la parabole AC,
Fig. 157. Fig. 157. duquel il faut tirer sur la partie AC de la parabole la ligne PC, qui coupe à angles droits la parabole en C. Sur l'axe AF abbaissez du point C le perpendiculaire CG. Menez PF parallele à CG, & PM parallele à FG, jusqu'à ce qu'elle rencontre CG prolongée en M.

Nommons les données PF, $a = GM$; AF, v; le parametre de la parabole p; les inconnuës AG, y; CG, x; PC, s; vous aurez $CM = x + a$; $FG = v - y = PM$. Dans le triangle CPM, vous trouvez $\overline{CP}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $ss = xx + 2ax + aa + vv - 2vy + yy$. Si l'on cherche la valeur de AG, y immediatement, l'operation est beaucoup plus facile, que si l'on cherche d'abord la valeur de x, & qu'on se serve ensuite de x connuë pour découvrir y. Vous rangerez donc ainsi les termes de l'équation précedente $vv - 2vy + yy = ss - xx - 2ax - aa$; extrayez les racines $y = v - \sqrt{ss - xx + 2ax + aa}$. Mettez cette valeur de y dans l'équation à la parabole $py = xx$, & quarrez les deux

membres c'est $$x^4 \; * \; \begin{array}{l} + ppxx \\ \\ - 2pvxx \end{array} \; + 2appx \; \begin{array}{l} + aapp \\ - ppss \\ + ppvv \end{array} = 0.$$

Pour resoudre cette équation par la Methode de M. DESCARTES, vous multipliez l'équation $xx - 2ex + ee$ par $xx + fx + gg$, le pro-

duit est $$x^4 \begin{array}{l} - 2ex^3 \\ \\ + fx^3 \end{array} \begin{array}{l} + eexx \\ - 2efxx \\ + ggxx \end{array} \begin{array}{l} + eefx \\ \\ - 2eggx \end{array} + eegg = 0.$$ & vous

venez à la comparaison des termes de ces deux équations.

Les seconds termes sont $- 2ex^3 + fx^3 = 0$, $f = 2e = 2x$.

Les quatriémes $+ 2appx = + eefx - 2eggx$, pour f substituez sa valeur $2x$, $gg = ex - \frac{app}{e} = xx - \frac{app}{x}$.

Les troisiémes $+ ppxx - 2pvxx = eexx - 2efxx + ggxx$; pour f & gg mettez leur valeur déja trouvée, vous aurez $2x^3 + ppx - 2pvx + app = 0$; $x^3 * + \frac{1}{2}ppx - pvx + \frac{1}{2}app = 0$. Dont la construction telle qu'on la fera, Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemple 4. donnera la valeur de x: laquelle étant connuë nous fera aisément connoî-

tre y ; car de l'équation à la parabole $xx = py$, on tire $y = \frac{xx}{p}$. Or AG, y étant déterminée, on éleve au point G la perpendiculaire GC, & la droite PC coupe la parabole à angles droits au point C, de sorte que la droite EC perpendiculaire à PC, est touchante de la courbe au point C. Ici on ne cherche pas v, qui est donnée ; car le point P étant donné, la perpendiculaire PF détermine la longueur de AF, v. Mais on cherche AG, y, & CG, x qui sont inconnuës.

2. Si le point P étoit donné sur l'axe AF au dedans de la parabole, la ligne PF, a seroit nulle ; & il ne faudroit qu'effacer le terme où a se trouve dans l'équation, afin de la reduire à $x^3 * - pvx + \frac{1}{2}ppx * = o$, $xx = pv - \frac{1}{2}pp$; on mettroit cette valeur de xx à sa place dans l'équation à la parabole $xx = py$, & l'on formeroit $y = v - \frac{1}{2}p$, équation conforme à celle qu'on a trouvé, Art. 3. n. 4. pour la parabole $v = y + \frac{1}{2}r$, en supposant le parametre r.

3. Que le point p soit donné du côté de la convexité de la parabole. Nous supposerons la chose faite, & après avoir abbaissé la perpendiculaire pf sur l'axe AG, par le point C nous menerons GC parallele à pf, jusqu'à ce qu'elle rencontre pm parallele & égale à Gf. Nommons la donnée pf, $a = mG$; Af, v ; AG, y : CG, x ; pC, s ; $pm = Gf = y - v$; $mC = a - x$.

Le triangle rectangle Cmp donne $\overline{Cp}^2 = \overline{mC}^2 + \overline{mp}^2$, $ss = aa - 2ax + xx + yy - 2vy + vv$; $y = v + \sqrt{ss - aa + 2ax - xx} = \frac{xx}{p}$ à cause de l'équation à la parabole $xx = py$. & en suivant n. 1. On vient à $x^3 * + \frac{1}{2}ppx - pvx + \frac{1}{2}app = o$. que l'on construira, Liv. 3, Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. si Af, $v > \frac{1}{2}p$; mais Ex. 6. si $v < \frac{1}{2}p$.

4. Le point P étant donné, Fig. 156. sur l'axe AB prolongé hors de l'ellipse AC ; trouver le point C tel, que la droite PC soit touchante de l'ellipse au point C. Fig. 156.

Je suppose le point C trouvée ; j'abbaisse CG appliquée à l'axe, ensuite je tire la secante PEF, qui coupe l'ellipse aux points E, F ; je tire les appliquées ED, FH, & par le sommet A la ligne ALK parallele aux appliquées. Il est certain, que plus la secante PF s'approchera de la tangente PC, plus les points D, H s'approcheront de G, les points E, F de C, les appliquées ED, FH de l'appliquée CG ; & qu'il se fait trois triangles équiangles PAL, PDE, PHF. Mais lorsque PF tombera sur PC, elle ne coupera l'ellipse qu'au point C, c'est-à-dire, qu'elle sera touchante au point C, & les deux lignes PD, PH ne seront plus que la ligne PG, les appliquées ED, FH se confondront avec l'appliquée CG. Il y aura deux racines égales dans l'équation, parceque CG est comme deux appliquées égales, & AG comme deux abscisses égales, les deux triangles PDE, PHF ne feront plus que le triangle PGC ; & le triangle PAL devient le triangle PAK.

FIG. 156. Il faut ſuppoſer la choſe faite, & nommer la donnée PA, b; les inconnuës AG, y; GC, x; PC, s; $PG = b + y$; AK, z; & étant comme Art. 1. Fig. 151. l'axe AB, q; le parametre r, l'équation à l'ellipſe eſt $xx = ry - \frac{r}{q}yy$.

Les triangles ſemblables PAK, PGC donnent cette proportion PA, $b : AK$, $z :: PG$, $b + y : GC$, x: donc $x = \frac{bz + yz}{b}$, dont le quarré $xx = \frac{bbzz + 2bzzy + zzyy}{bb} = ry - \frac{r}{q}yy$, d'où l'on forme $yy + \frac{2bqzzy - bbqry}{qzz + bbr} + \frac{bbqzz}{} = o$. qu'il faut comparer avec $yy - 2ey + ee$.

Et premierement les derniers termes $\frac{bbqzz}{qzz + bbr} = ee$; $zz = \frac{bbree}{bbq - qee} = \frac{bbryy}{bbq - qyy}$.

Enſuite les ſeconds termes $\frac{2bqzzy - bbqry}{qzz + bbr} = -2ey$; $2bqzzy - bbqry = -2eqzzy - 2bbrey$; d'où l'on forme, après avoir ſubſtitué la valeur de zz, $yy + \frac{2bby - bbq}{2b + q} = o$. D'où après en avoir extrait la racine, on tirera $y = \frac{bq}{2b + q} = AG$. On connoît donc le point G, où l'on élevera la perpendiculaire GC, & l'on menera du point P la touchante PC.

5. Soit la courbe AC une parabole dont l'équation eſt $xx = py$; $y = \frac{xx}{p}$: mais dans l'équation $bx = bz + yz$ trouvée n. 4. on a $y = \frac{bx - bz}{z} = \frac{xx}{p}$; $xx - \frac{bpx}{z} + bp = o$ qu'il faut comparer avec $xx - 2ex + ee = o$; ſi l'on compare les derniers termes $bp = ee$; c'eſt $bp = xx$, mais par la nature de la parabole, $xx = py$; donc $py = bp$, AG, $y = AP$, b.

Si l'on comparoît les ſeconds termes $-\frac{bpx}{z} = -2ex$; $z = \frac{bp}{2x}$, ſubſtituez cette valeur de z dans l'équation $y = \frac{bx - bz}{z}$; il vient $xx = \frac{py + bp}{2}$: mais par la nature de la parabole $xx = py$: donc $py = \frac{py + bp}{2}$ $y = b$. comme auparavant. Vous obſerverez, qu'il faut quelquefois ſubſtituer dans l'équation de la courbe, les valeurs que $yy - 2ey + ee = o$ a découvertes; pour avoir tout ce qu'on cherche.

6. On ne s'eſt ſervi n. 4. 5. de la Methode de M. DESCARTES, que dans la ſuppoſition qu'on a faite que y tenoit la place de deux abſciſſes égales, & x celle de deux appliquées auſſi égales, & que par conſequent l'une de ces deux inconnuës avoit deux racines égales dans l'équation dont on s'eſt ſervi. La raiſon pourquoi on le fait, eſt rapportée n. 4. Mais on ne ſe ſert pas du triangle PCG, comme on l'avoit fait auparavant, parce que ici PC n'eſt pas le rayon d'un cercle, dont le centre ſoit P, & qui touche la courbe au point C. Et l'on ne réuſſiroit pas ſi l'on ſe fondoit ſur l'équation tirée du triangle rectangle PGC.

En effet ſoit encore AC une parabole, dont l'équation eſt $xx = ry$. PC eſt s; CG, x; AG, y; PA, b; PG, $b + y$. On a $\overline{PC}^2 = \overline{PG}^2 + \overline{CG}^2$, $ss = xx + bb + 2by + yy$; $xx = ss - bb - 2by - yy = ry$; $yy + 2by + ry + bb - ss = o$. Comparons cette équation avec $yy -$

$2ey + ee = o$. Prenons les seconds termes $+ 2by + ry = - 2ey$; $y = - b - \frac{1}{2}r$. Ce qui n'est pas vray.

La raison de ceci est que Fig. 151. lorsqu'on suppose que PC est le rayon d'un cercle, dont P est le centre, & qui touche la courbe AE au point C, il se fait une combinaison de l'équation au cercle & de l'équation à la courbe, qui ont une commune appliquée CM. Or l'équation au cercle dont P est le centre, PC un rayon, & dont le diametre fh est sur l'axe AG de la courbe, c'est l'équation $ss = xx + vv - 2vy + yy$, ou $xx = ss - vv + 2vy - yy$; qui vient du triangle rectangle PMC. Car soit $Ph = Pf = PC$, s; PM, $v - y$; hM sera $hP + PM$, $s + v - y$; $fM = fP - PM$, $s - v + y$: l'équation au cercle est $\overline{CM}^2 = hM \times Mf$, $xx = ss - vv + 2vy - yy$. Ainsi il ne faut pas être surpris; si l'on s'est servi de cette équation au cercle pour trouver le point C dans les cas, où on l'a fait. Fig. 151.

Mais n. 4. 5. Figure 156. où vous avez les deux triangles semblables PAK, PGC, qui donnent une équation à la ligne droite, il se trouve une combinaison de l'équation à la ligne droite & de l'équation à la courbe, dont CG est une commune appliquée. C'est pour cela, qu'on ne doit pas se servir de l'équation $ss = xx + bb + 2by + yy$ tirée du triangle rectangle PGC; mais de l'équation $bx = bz + yz$, qui vient de l'Analogie, que fournissent les triangles semblables PAK, PGC.

ARTICLE V.

Cette Methode sert à d'autres Problémes, qu'à celui des tangentes.

M. DESCARTES.

MAis je veux bien en passant vous avertir que l'invention de supposer deux équations de même forme, pour comparer séparément tous les termes de l'une à ceux de l'autre, & ainsi en faire naître plusieurs d'une seule; dont vous avez vû ici un Exemple; peut servir à une infinité d'autres Problêmes, & n'est pas l'une des moindres de la Methode, dont je me sers.

On appliquera cette Methode à la recherche des points d'inflexion des courbes, & aux questions de *maximis & minimis*. M. DESCARTES assure en particulier dans * une de ses Lettres, que cette Methode sert à ces questions. *Tom. 3. Lett. 45. au Pere Mersenne.*

M. DESCARTES se sert encore de la même comparaison d'une équation donnée avec une équation feinte, sans supposer des racines égales, pour la resolution d'autres Problêmes. Liv. 3. Part. 3. Sect. 4. 5.

§. I.

Cette Methode sert à trouver les points d'inflexion des courbes.

Fig. 158. LA courbe ACF, Fig. 158. est telle, que sa concavité AC, & ensuite sa convexité CF sont tournées du côté de la ligne AB: le point C où finit la concavité AC, & où commence la convexité CF, se nomme point d'inflexion; c'est un point commun & à la concavité & à la convexité.

L'appliquée CD tirée du point d'inflexion C sur l'axe AB, peut être considerée comme trois appliquées égales réünies en un même point C. Car la droite pfF, que l'on suppose toucher la courbe en f, & la couper en F, détermine deux ordonnées FB, fb de la courbe; dont la derniere fb, qui est terminée au point touchant f équivaut à deux appliquées égales, & l'équation qui lui convient a deux racines égales, comme on a dit Art. 2.

Ainsi l'on peut avancer, que toute ligne droite pfF, qui touche la courbe en un point, & la coupe en un autre, détermine trois racines dont deux sont égales entr'elles. Après cela il est clair, que l'on peut tirer d'autres droites, qui toucheront & couperont en même tems la courbe, & dont les points F, f d'attouchement & d'intersection s'approcheront toûjours plus l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin ces deux points f, F se confondent, & n'en fassent plus qu'un, comme nous supposons qu'il arrive au point C, où l'on peut dire que la droite PCc touche & coupe tout ensemble la courbe. Alors les appliquées FB, fb n'en font qu'une CD; les coupées pb, pB n'en font qu'une PD; & l'équation qui appartiendra au point C de la courbe, aura trois racines égales CD deux à raison de la tangente, une à raison de la secante, qui se confondent au point d'inflexion C.

Lorsqu'on a eû deux racines égales, on a pris suivant la Methode de M. Descartes $y = e$, $y - e = o$, dont le quarré $yy - 2ey + ee = o$ a servi à resoudre le Problême des tangentes. C'est par une suite de cette Methode qu'ici nous prendrons le cube $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = o$, pour resoudre le Problême des points d'inflexion. Car comme $yy - 2ey$ $ee = o$ contient deux racines égales, à cause que c'est le produit de la multiplication de $y - e = o$ par $y - e = o$: de même $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = o$, qui est le produit de $yy - 2ey + ee = o$ par $y - e = o$ troisiéme racine égale à chacune des deux premieres, contient trois racines égales. Et il est certain que ce n'est pas là une Methode differente de la precedente.

Fig. 159. 1. Soit proposé le cercle AFB, Fig. 159. Il faut décrire la courbe ADG, dont le sommet soit A, l'axe AB, & dont chaque appliquée CD soit troisiéme proportionelle de chaque appliquée CF & de chaque corde AF

Planche 13.

Gravé par Daudet.

AF correſpondante du cercle : de ſorte qu'à chaque point D l'on ait cette Analogie $CF : AF :: FA : CD$.

Par le ſommet A menez AE parallele à CD. Nommez la connuë AB, a ; l'inconnuë AC, x ; CF, y ; CD, z : PA, s ; AE, r ; $PC = s + x$.

Pour former l'équation à la courbe ADG, je me ſers du triangle ACF rectangle en C, & dans lequel $\overline{AF}^2$, $xx + yy$. D'ailleurs par la nature du cercle j'ai au point F $yy = ax - xx$, $y = \sqrt{ax - xx} = CF$; je mets donc cette valeur de yy à ſa place dans l'équation precedente, ce qui fait $\overline{AF}^2 = xx + ax - xx = ax$, & $AF = \sqrt{ax}$. Enſuite ſuppoſ. au point D j'ai cette proportion CF, $\sqrt{ax - xx} : AF$, $\sqrt{ax} : AF$, $\sqrt{ax} : CD$, z ; $ax = z\sqrt{ax - xx}$. Dont les quarrez ſont $aaxx = axzz - xxzz$; $azz - xzz - aax = 0$ équation à la courbe ADG, dont la droite BH parallele à CD eſt aſymptote, car au point B, où l'appliquée au cercle eſt nulle, on a ſupp. comme l'appliquée, 0 eſt à la corde AB, a : ainſi la corde AB, a eſt à l'appliquée BH, z de la courbe ADG ; donc $z = \frac{aa}{0}$, ce qui marque ſuivant la Methode Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 3. que BH eſt aſymptote.

Vous chercherez à preſent le point d'inflexion D par les triangles équiangles PAE, PCD ; qui fourniſſent l'Analogie PA, $s : AE$, $r :: PC$, $s + x : CD$, z ; & $x = \frac{sz - rs}{r}$; pour x ſubſtituez cette valeur dans l'équation $azz - xzz - aax = 0$. Vous ferez $z^3 - \frac{arzz}{s} - rzz + aaz - aar = 0$.

Pour reſoudre cette équation vous la comparez avec l'équation $z^3 - 3ezz + 3eez - e^3 = 0$; qui contient trois racines égales. Il ſuffira de comparer les troiſiémes termes $+ 3eez = + aaz$; d'où l'on tire $ee = \frac{aa}{3}$; $zz = \frac{1}{3}aa$. Subſtituez cette valeur de zz dans l'équation $azz - zzx - aax = 0$; vous aurez $x = \frac{1}{4}a$. C'eſt pourquoi vous couperez $AC = \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}AB$, vous menerez l'ordonnée CD, qui déterminera le point D d'inflexion de la courbe ADG.

2. Soit propoſée la premiere parabole cubique dAD Fig. 160. dont l'équation eſt $y^3 = aax$, c'eſt-à-dire que le cube de l'appliquée CD, y eſt égal au parallelepipede ſous la flêche correſpondante AC, x & ſous aa quarré du parametre a. L'on cherche ſon point d'inflexion, en ſuppoſant que c'eſt le point D. Fig. 160.

On trouvera comme n. 1. dans les triangles équiangles PAE, PCD $x = \frac{sy - rs}{r}$; on ſubſtituë cette valeur de x dans l'équation $y^3 - aax = 0$, ce qui donne $y^3 * - \frac{aasy}{r} + aas = 0$, dont il faut comparer le ſecond terme qui eſt nul, avec le ſecond terme de $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$, ſoit donc $- 3eyy = 0$, $y^3 = \frac{0}{3}$. Si l'on ſubſtituë cette valeur de y^3 dans l'équation $y^3 - aax = 0$. On fait $aax = 0$, $x = \frac{0}{aa}$. Tout cela prouve que le point d'inflexion de la parabole cubique dAD eſt au ſommet A, où $y = 0$, $x = 0$.

FIG. 58. 3. Nous trouverons la même chose pour la seconde parabole cubique CKc Figure 58. mais le point d'inflexion K s'appelle point de rebroussement, parceque la seconde partie Kc de la parabole retourne du même côté de l'axe KB, où est la premiere partie CK : son équation est $y^3 = axx$.

FIG. 161. 4. Cherchons le point d'inflexion N Fig. 161. de la conchoïde parabolique No, dont il a été parlé, Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Excemp. 1. & dont l'équation a été trouvée là $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$, en supposant $Ab = Nm$, $+x$; bN, $-y$. Soit comme auparavant PA, s; AS, r; $Pb = s + x$. Les triangles semblables PAS, PbN donnent, PA, s : AS, r : Pb, $s+x$: bN, $-y$; & $sr + rx = -sy$; $x = \frac{-sy - sr}{r}$.

Mettons cette valeur de x à sa place dans l'équation $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$, elle se changera en $y^3 - 2ayy \frac{+asyy}{r} - aay + asy + 2a^3 = 0$, qu'il faut comparer avec $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$. Les derniers termes suffiront, $-e^3 = 2a^3$; $-y^3 = 2a^3$; $-y = \sqrt[3]{2a^3}$. $yy = \sqrt[3]{4a^6}$. Substituons ces valeurs de y, yy, y^3 dans l'équation $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$: d'où l'on tirera $-2\sqrt[3]{2a^3} + a + x = 0$. $x = -a + 2\sqrt[3]{2a^3}$, $x = -a + 2a\sqrt[3]{2}$. Ainsi le point N se trouvera dans le concours N de bN, $-y = \sqrt[3]{2a^3}$, & de Nm, $x = -a + 2a\sqrt[3]{2}$.

Si l'on avoit cherché le point d'inflexion de la conchoïde EC, dont No est la contreposée ; nous aurions trouvé qu'il n'y a que le point N d'inflexion dans les courbes, que l'équation $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$ produit ; & qu'ainsi la courbe CE n'en a point. En effet supposons que C est un point d'inflexion, tirez pCE, nommez $CM = AB$, x; CB, y; pA, s; AE, r; $pB = pA - AB$, $s - x$. Dans les triangles pAE, pBC, vous trouverez $x = \frac{rs - sy}{r}$, qui étant substituée dans l'équation proposée, fera $y^3 - 2ayy + \frac{asyy}{r} - aay - asy + 2a^3 = 0$. La comparaison de $-e^3 = 2a^3$, donnera encore $x = -a + 2\sqrt[3]{2a^3}$, comme auparavant.

5. Il faut trouver le point d'inflexion C Fig. 162. de la courbe CEc, dont on a trouvé Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Ex. 10. l'équation $2axy - xyy - a^3 + ayy = 0$. Après avoir nommé CB, y; AB, x; AP, s; AS, r; PB, $s + x$; les triangles PBC, PAS donnent $x = \frac{sy - rs}{r}$, qui étant substituée dans l'équation de la courbe fait $y^3 - 2ayy - \frac{aryy}{s} - ryy + 2ary + \frac{a^3r}{s} = 0$. Qu'il faut comparer avec l'équation $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$.

Les troisiémes termes donnent $r = \frac{3ee}{2a}$. Les quatriémes $+ a^3r = -e^3s$; substituez la valeur de r, vous aurez $s = \frac{-3aa}{2e}$. Les seconds $-3es = -2as - ar - rs$, substituez les valeurs de s & de r, multipliez par 2, divisez par 3, ce sera $y^3 - \frac{3}{2}ayy + 3aay + 2a^3 = 0$. La resolution

de cette équation, que l'on fera Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemple 6. donnera la valeur de $y = CB$, qui étant ſubſtituée dans l'équation $2axy - xyy - a^3 + ayy$ fera connoître la valeur de AB, $x = CM$.

6. Suppoſons que AD Fig. 160. eſt une parabole du quatriéme degré, dont l'équation eſt $y^4 = a^3 x$; $y^4 - a^3 x = 0$. Nous trouverons $x = \frac{sy - rs}{r}$, qui étant ſubſtituée dans l'équation, fera $y^4 ** - \frac{a^3 sy}{r} + a^3 s = 0$. Parceque cette équation eſt du quatriéme degré, & qu'on ſuppoſe qu'elle a trois racines égales, on multipliera $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$ FIG. 160.

par $y + f$, le produit eſt

$$y^4 \begin{matrix} -3ey^3 & +3eeyy & -e^3 y \\ +fy^3 & -3efyy & +3eefy \end{matrix} \; -e^3 f = 0.$$

que l'on comparera avec l'équation à reſoudre de cette maniere.

Parceque le ſecond terme de l'équation à reſoudre eſt nul, il ſuit que le ſecond terme $-3ey^3 + fy^3 = 0$; $f = 3e$; & par la même raiſon le troiſiéme $+3eeyy - 3efyy = 0$; $f = +e$; or ces deux valeurs de f ſont impoſſibles en même tems : ainſi la parabole du quatriéme degré n'a aucun point d'inflexion.

Les courbes du ſecond degré n'ont aucun point d'inflexion, car ſoit propoſée la parabole ordinaire $yy = px$, $yy - px = 0$. Et que l'on ſubſtituë la valeur de $x = \frac{sy - sr}{r}$; on aura $yy - \frac{psy}{r} + ps = 0$. Si on la compare avec $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$, on aura toûjours $y^3 = 0$, parceque l'équation propoſée ne contient pas le troiſiéme degré de ſon inconnuë : or cette Methode exige que les premiers termes des deux équations ſoient égaux.

§. II.

Cette Methode ſert aux queſtions de Maximis & Minimis.

SOit Fig. 163. AB l'axe de la courbe ACB, dont les appliquées paralleles entr'elles GD, CM, gd vont en croiſſant depuis A juſqu'en CM, & enſuite en décroiſſant juſqu'en B; CM eſt appellée la plus grande des appliquées. L'axe elle-même AB eſt auſſi dans l'ellipſe, par exemple la plus grande abſciſſe qu'on puiſſe prendre ſur l'axe. FIG. 163.

Soit la droite Ff parallele à l'axe AB; prolongez les appliquées GD, gd, CM en f, f, F. Que les lignes fA, fD, FC, fd, fB tirées depuis la droite Ff juſqu'à la courbe, aillent en décroiſſant depuis fA juſqu'à FC. & enſuite en croiſſant juſqu'à fB; la ligne FC eſt appellée la moindre, & les lignes fA, fB ſont appellées les plus grandes des lignes droites menées depuis la droite Ff juſqu'à la courbe ACB. Les Problêmes, par leſquels on cherche ces plus grandes & ces plus petites, s'appellent queſtions de *Maxi-*

FIG. 163. *mis & Minimis.* Il faut remarquer que *CM*, qui eſt une plus grande appliquée, eſt tirée ſur la concavité de la courbe, & que *CF*, qui eſt une plus petite, eſt tirée ſur la convexité. On appelle encore queſtion de *Maximis & Minimis* les Problêmes, où l'on chercheroit, en quel point, par exemple, il faut couper une ligne droite, afin que le rectangle formé des ſegmens de cette ligne ſoit plus grand ou plus petit, que tout autre rectangle fait de deux autres ſegmens quelconques de la même ligne, &c.

Suppoſons que *CM* eſt la plus grande des appliquées à la courbe *ACB*; ſi du point *M* comme centre je décris l'arc *DHd*, qui coupe la courbe aux points *D*, *d*; il y aura là deux appliquées égales *DG*, *dg*, que je nomme x: mais les abſciſſes *AG*, *Ag*, que je nomme y, ſont certainement inégales. Ainſi l'équation, qui exprimera le rapport des points *D*; *d* avec la droite *AB*, contiendra deux valeurs inégales de y. Maintenant à meſure que je diminuerai le rayon du cercle décrit du centre *M*; les points *D*, *d*; *G*, *g* s'approcheront; & quand je décrirai un cercle, dont le rayon ſera *MC*; ce cercle touchera la courbe en *C*, les points *D*, *d* ſe reüniront en *C*, & les points *G*, *g* en *M*; & l'équation qui exprimera le rapport du point *C* de la courbe au point *M* de la droite *AB*, contiendra deux racines égales de x & de y, & l'on pourra ſans y rien changer la comparer avec l'équation $yy - 2ey + ee = 0$, ou avec telle autre d'un degré convenable.

De même ſi du point *F* on décrit pluſieurs cercles, dont les rayons ſoient plus grands que *FC*, ils couperont la courbe en deux points, & le cercle, dont le rayon ſera *FC*, la touchera en *C*.

C'eſt encore ici le Problême des tangentes ſuivant * Mr DESCARTES, qui aſſure que les tangentes ſont des plus grandes & des plus courtes ſous certaines conditions. La tangente *PC* Fig. 156. eſt la ſecante la plus courte qu'on puiſſe tirer du point *C*, de ſorte qu'elle coupe la courbe en deux points reünis en un ſeul; car on ſuppoſe qu'une touchante coupe la courbe en deux points infiniment proches.

* Tom. 1. Lettr. 45.

La ligne droite *PC*, Figure 158. eſt auſſi la plus courte qu'on puiſſe tirer de la droite *AP* ſur la courbe *ACF*, de ſorte qu'elle ſoit en même tems tangente & ſecante de la courbe. La droite *PC*, Fig. 151. eſt encore la plus courte, qu'on puiſſe tirer de la ligne *AG* ſur le point *C* de la courbe *AC* de ſorte que *PC* ſoit perpendiculaire à la courbe. Ou bien, parceque ces lignes *PC* ſont les ſeules qu'on puiſſe tirer avec toutes ces conditions, on peut dire, qu'elles ſont en même tems les plus grandes & les moindres.

De ce que nous venons de dire, il ſuit, qu'il ne faut point faire de changement dans les équations des courbes, pour en tirer les plus grandes & les moindres. En effet 1° comparez les Figures 151. 163. vous verrez que les lignes *CP*, *CM*, de Fig. 151. deviennent la ſeule *CM* de Fig. 163. & que les deux *AP*, *AM*, de Fig. 151. ſont la ſeule *AM*, de Fig. 163.

Ainſi étant, Fig. 151. CP, s, CM, x; AM, y; AP, v; PM, $v-y$, l'on a Fig. 163. CP, $s = CM$, x; AM, $y = AP$, v. Et l'équation $ss = xx + vv - 2vy + yy$, dont on s'eſt ſervi, Art. 1. 3. 4. ſe reduit à $xx = xx + yy - 2yy + yy$, pour Fig. 163. $o = o$. Or c'eſt avec l'équation $ss = xx + vv - 2vy + yy$, qu'on a fait un changement dans les équations des courbes : on n'en peut donc point faire dans la Fig. 163.

Comparez 2° les Figures 156. 163. vous obſerverez qu'au point C, Fig. 163. où eſt la plus grande appliquée CM, la tangente PC eſt parallele à l'axe AG ; & AK eſt égale à CM. C'eſt pourquoi étant, Fig. 156. PA, s; AK, r; AG, y; GC, x; PG, $s+y$; & l'équation que donnent les triangles ſemblables PAK, PGC, & dont on s'eſt ſervi Art. 4. Art. 5. §. 1. étant $sx = sr + ry$; cette équation pour Fig. 163. où AK, $r = CD$, x, ſe reduit à $sx = sx + ry$; $ry = o$. Et comme c'eſt avec l'équation $sx = sr + ry$, qu'on a fait des changemens dans les équations des courbes pour les Problêmes, à qui elle convenoient ; il ſuit, qu'on n'en peut point faire dans la Fig. 163. Voici des Exemples.

1. Il faut Fig. 163. aſſigner la plus grande appliquée CM à l'ellipſe ACB. Si l'on nomme l'axe AB, q; le parametre r; chaque appliquée GD, x; chaque coupée AG, y; l'équation à l'ellipſe ſera $qxx = qry - ryy$; $yy - qy + \frac{q}{r}xx = o$. Qu'il faut comparer avec $yy - 2ey + ee = o$. Fig. 163.

Les ſeconds termes ſuffiront $-2ey = -qy$; $e = \frac{1}{2}q$; AM, $y = \frac{1}{2}q$. C'eſt donc l'abſciſſe AM, $y = \frac{1}{2}q$, qui détermine le point M, où la plus grande appliquée CM ſe trouve : & ce point eſt le centre. Subſtituons cette valeur de y dans $yy - qy + \frac{q}{r}xx = o$, il vient $x = \sqrt{\frac{1}{4}qr} = \frac{1}{2}\sqrt{qr}$. Valeur de la plus grande appliquée CM, ou de la moitié du petit axe, car comme on l'apprend dans les Traitez des Sections coniques, le petit axe eſt $\sqrt{qr}$, c'eſt-à-dire la moyenne proportionelle entre le grand axe, & le parametre du grand axe.

Pour le cercle, dont l'équation eſt $yy - qy + xx + o$, on trouvera auſſi $y = \frac{1}{2}q$, & la ſubſtitution donnera $x = \frac{1}{2}q$.

Si l'on demandoit la plus grande coupée de l'ellipſe, je rangerois ainſi les termes $xx * {-ry \atop +\frac{r}{q}yy} = o$, & je comparerois cette équation avec $xx - 2ex + ee = o$. Les ſeconds termes ſont $-2ex = o$, $x = o$. Et ſubſtituant cette valeur dans l'équation à l'ellipſe, elle ſe reduit à $-ry + \frac{r}{q}yy = o$; d'où l'on tire 1° $y = o$, 2° $y = q$. Ainſi $x = o$ nous apprend 1° qu'au point A, où $x = o$, nous avons la plus petite coupée $y = o$; 2° qu'au point B, où encore $x = o$, nous avons la plus grande coupée AB, $y = q$. On trouvera la même pour le cercle.

Vous remarquerez, que lorſque l'inconnuë, qui regle les termes dans l'équation, eſt la coupée y, comme dans le premier cas : elle détermine

FIG. 163. le point, où ſe trouve la plus grande ou la moindre ordonnée & que le contraire arrive dans le ſecond cas.

2. Que l'équation de la courbe AC ſoit telle que le cube de l'abſciſſe quelconque AG, y, avec le cube de l'appliquée correſpondante GD, x ſoient égaux au parallelepipede ſous $AG \times GD \times a$ ligne donnée. C'eſt donc $y^3 + x^3 = axy$, $y^3 * - axy + x^3 = 0$.

Il faut trouver la plus grande appliquée CM. Comparons l'équation avec $y^3 \begin{matrix} -2eyy \\ +fyy \end{matrix} \begin{matrix} +eey \\ -2efy \end{matrix} + eef = 0$. Les ſeconds termes $-2eyy + fyy = 0$ donnent $f = 2e$. Les troiſiémes ſont $-axy = +eey - 2efy$; $-ax = ee - 2ef$, ſubſtituons la valeur trouvée de f, nous ferons $-ax = ee - 4ee = -3ee$; $x = \frac{3ee}{a}$. Les derniers ſont $x^3 = eef = 2e^3$. Cubons la premiere valeur de $x = \frac{3ee}{a}$, il viendra $x^3 = \frac{27e^6}{a^3} = 2e^3$; $\frac{27e^3}{a^3} = 2$; dont les racines cubiques ſont $\frac{3e}{a} = \sqrt[3]{2}$. $e = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2} = y$. La plus grande appliquée CM à nôtre courbe ſera celle qui répond à l'abſciſſe AM, $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$. Mettons pour y ſa valeur & pour y^3 ſa valeur $\frac{2}{27}a^3$. Dans $y^3 - axy + x^3 = 0$; l'on fera $x^3 - \frac{1}{3}a^2x\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3 = 0$, dont la reſolution, telle qu'on la fera, Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. donnera la longueur de CM, x.

Si l'on vouloit la plus grande abſciſſe Ag, l'on ordonneroit ainſi les termes $x^3 - ayx + y^3 = 0$, & l'on trouveroit $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$. Et pour avoir y, on reſoudra l'équation $y^3 - \frac{1}{3}a^2y\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3 = 0$.

3. Il faut trouver FC la moindre ligne droite tirée depuis la ligne Ff parallele à l'axe AB, juſqu'à l'ellipſe ACB. Nommons la diſtance fA, FM, &c. des paralleles a; les appliquées exterieures fD, FC, z, & le reſte comme n. 1. Nous avons $DG = fG - fD$, $a - z = x$.

Mettons pour xx, le quarré $aa - 2az + zz$ dans l'équation à l'ellipſe $yy - qy + \frac{q}{r}xx = 0$; il ſe fait $yy - qy + \frac{q}{r}zz - \frac{2aq}{r}z + \frac{aaq}{r} = 0$. qui ſera comparée avec $yy - 2ey + ee = 0$, Les ſeconds termes $-qy = -2ey$ donnent $e = \frac{1}{2}q = y$. Ainſi la plus courte appliquée CF, eſt celle qui étant prolongée ſe termine au centre M, où l'on a AM, $y = \frac{1}{2}q$. Subſtituons cette valeur de y dans l'équation $yy - qy + \frac{q}{r}zz - \frac{2aq}{r}z + \frac{aaq}{r} = 0$, nous trouverons $z = a - \sqrt{\frac{1}{4}qr} = FC$.

Il eſt aiſé de voir que pour le cercle on aura AM, $y = \frac{1}{2}q$; $z = a - \frac{1}{2}q$.

Si à preſent on veut trouver les plus grandes appliquées exterieures fA, fB à l'ellipſe, on ordonnera ainſi l'équation $zz - 2az + aa - ry + \frac{r}{q}yy = 0$. dont le ſecond terme $-2az$ comparé avec le ſecond terme $-2ez$ de l'équation $zz - 2ez + ee = 0$, donne $z = a$. Ainſi les plus grandes appliquées exterieures ſont fB, fA. Ce qui ſe confirme en mettant a pour z dans l'équation propoſée qui ſe change en $aa - 2aa + aa - ry + \frac{r}{q}yy = 0$, $yy - qy = 0$, dont les deux racines ſont $y = 0$; $y - q = 0$, ou $y = q$. Or y eſt zero au point A, & q au point B.

4. L'équation à la parabole $xx * - py = o$, & $xx - 2ex + ee$ donnent $- 2ex = o$, $x = o$; ſubſtituez dans $xx - py = o$, il vient $y = o$. La moindre x & la moindre y ſont au même ſommet de la parabole.

En ordonnant ainſi les termes pour l'hyperbole $yy + qy - \frac{q}{r}xx = o$, les ſeconds termes ſont $+ qy = - 2ey$, $- y = \frac{1}{2}q$; & la ſubſtitution donne $x = \sqrt{-\frac{1}{4}qr}$ imaginaire. Mais en ordonnant les termes de cette façon $\begin{array}{l} xx * - ry = o \\ \quad - \frac{r}{q}yy \end{array}$, les ſeconds termes ſont $- 2ex = o$, $x = o$; & la ſubſtitution fait $- ry - \frac{r}{q}yy = o$, d'où vous tirez $y = o$, $y = q$. Ainſi à l'un des ſommets vous avez enſemble les moindres x, y; à l'autre vous avez $y = q$ le diametre, $x = o$ une moindre.

5. Diviſer la ligne AD au point F Figure 165. de ſorte que le rectangle Fig.
des ſegmens $AF \times FD$ ſoit le plus grand de tous les rectangles, qui peu- 165.
vent ſe faire ſous deux autres ſegmens quelconques de la ligne AB.

Nommons la ligne AD, a; le ſegment AF, y; le ſegment FD, $a - y$; le plus grand rectangle x. Par l'hypotheſe nous avons $ay - yy = x$, $yy - ay + x = o$. que nous comparerons avec $yy - 2ey + ee = o$. Les ſeconds termes $- ay = - 2ey$ donnent $e = \frac{1}{2}a = y = AF$, qui eſt par conſequent la moitié de AD. Mettons cette valeur de y dans $yy - ay + x = o$, il vient $x = \frac{1}{4}aa$. Ce qui prouve que le point F eſt au milieu de AD, & que le plus grand rectangle cherché eſt le quarré de la moitié de AD.

6. On demande maintenant que le parallelepipede ſous le quarré du premier ſegment AF & ſous l'autre ſegment FD ſoit le plus grand de tous les parallelepipedes, qui peuvent ſe former d'une ſemblable maniere en quelqu'autre point, que AD ſoit diviſée.

La ſuppoſition donne $ayy - y^3 = x$; $y^3 - ayy * + x = o$, que vous comparerez avec $\begin{array}{llll} & - 2eyy & + eey & \\ y^3 & & & + eef = o. \\ & + fyy & - 2efy & \end{array}$ Des troiſiémes termes $+ eey - 2efy = o$ il vient $f = \frac{1}{2}e$. Dans les derniers $x = eef$ mettez pour f ſa valeur, vous ferez $x = \frac{1}{2}e^3 = \frac{1}{2}y^3$. Subſtituez cette valeur de x à ſa place dans $y^3 - ayy + x = o$ pour avoir $y^3 - ayy + \frac{1}{2}y^3 = o$; $\frac{3}{2}y^3 - ayy = o$, $\frac{3}{2}y = a$, $y = \frac{2}{3}a$. Ce qui marque en quel point il faut couper la donnée AD, & le parallelepipede cherché x eſt $\frac{1}{2}y^3 = \frac{4}{27}a^3$.

7. Il faut couper la ligne AD Fig. 165. en trois parties aux points B, Fig.
C, de telle ſorte que le triangle BEC fait de ces trois parties ſoit le plus 165.
grand qui ſe puiſſe faire des trois parties quelconques de la même ligne.

Suppoſez la choſe faite & nommez la donnée AD, a; le ſegment AB, $x = BE$, le ſegment BC, y; le ſegment $CD = a - x - y = CE$, s;

Fig. 165. tout le triangle soit nommé v, & du sommet E abbaissez la perpendiculaire EF sur la base BC, soit $EF = r$; le petit segment BF, z; l'autre segment $FC = y - z$.

La Géometrie ordinaire nous apprend que le triangle BEC est égal au produit de $EF \times \frac{1}{2} BC$, donc $v = \frac{1}{2} ry$; $r = \frac{2v}{y}$.

$\overline{EF}^2$, $rr = \overline{BE}^2 - \overline{BF}^2$, $xx - zz = \overline{EC}^2 - \overline{FC}^2$, $aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + 2yz - zz$. Des deux dernieres équations il reste $z = \frac{-aa + 2ax + 2ay - 2xy}{2y}$.

Substituez cette valeur de z dans $rr = xx - zz$, pour avoir $rr = xx \frac{-a^4 + 4a^3x + 4a^3y - 12aaxy - 4aaxx + 8axxy - 4aayy + 8axyy - 4xxyy}{4yy} = \frac{4vv}{yy}$. Multipliez cette derniere équation par $4yy$, divisez-la par $8ax - 4aa$, & ordonnez ainsi les termes

$$yy \frac{\begin{matrix} & -a^4 \\ +4a^3y & +4a^3x \\ -12aaxy & -4aaxx \\ +8axxy & -16vv \end{matrix}}{8ax - 4aa} = 0$$

qu'il faut comparer avec $yy - 2ey + ee = 0$.

Les seconds termes sont $\frac{+4a^3y - 12aaxy + 8axxy}{8ax - 4aa} = -2ey$; pour e mettez y, rangez les termes, vous trouverez $8axx - 12aax + 16ayx = 8aay - 4a^3$; $xx - \frac{3}{2}ax + 2yx = ay - \frac{1}{2}aa$, dont les racines sont $x - \frac{3}{4}a + y = \frac{1}{4}a - y$; $x = a - 2y$.

Substituez cette valeur de x 1° dans $s = a - x - y$, cela fait $s = y$, $CD = CB$.

Substituez la 2° dans l'équation

$$\begin{matrix} & & -a^4 \\ 8axyy & +4a^3y & +4a^3x \\ & -12aaxy & -4aaxx = 0. \\ -4aayy & +8axxy & -16vv \end{matrix}$$

Elle se reduira à $16ay^3 - 20aayy + 8a^3y - a^4 - 16vv$, que vous diviserez par $16a$, & il viendra $y^3 - \frac{5}{4}ayy + \frac{1}{2}aay - \frac{a^3}{16} - \frac{vv}{a} = 0$.

Dans cette derniere équation vous supposerez encore deux racines égales, afin de la comparer avec

$$y^3 \begin{matrix} -2eyy & +eey & \\ & & +eef = 0. \\ +fyy & -2efy & \end{matrix}$$

Les seconds termes $-\frac{5}{4}ayy = -2eyy + fyy$ donnent $f = 2e - \frac{5}{4}a$.

Dans les troisiémes $+\frac{1}{2}aay = eey - 2efy$, ou $\frac{1}{2}aa = ee - 2ef$, mettez pour f sa valeur trouvée, & vous aurez $\frac{1}{2}aa = -3ee + \frac{5}{2}ae$; $yy - \frac{5}{6}ay = -\frac{1}{6}aa$, dont une des racines est $-y + \frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a$; $y = \frac{1}{3}a$.

Nous

Nous avons donc $y = \frac{1}{3}a = s$, qui sera aussi $\frac{1}{3}a$; & $x = a - 2y = \frac{1}{3}a$. C'est pourquoi le triangle équilateral *BEC* est le plus grand triangle cherché. Mettez ces valeurs de x & de y dans $z = \frac{-aa + 2ax + 2ay - 2xy}{2y}$, vous trouverez $z = \frac{1}{6}a = BF$. Ainsi le point *F* est au milieu de *BC* & de *AD*. Vous aurez la valeur de la perpendiculaire *EF*, r ; si vous mettez les valeurs de x & de z dans $rr = xx - zz = \frac{1}{12}aa$; donc $r = \sqrt{\frac{1}{12}aa}$. De même vous trouverez la valeur du triangle $BEC = v$, si vous mettez les valeurs de r & de y dans $v = \frac{1}{2}ry$, & cette valeur sera $\frac{1}{12}aa\sqrt{\frac{1}{3}}$. Fig. 166

On a extrait la racine $-y + \frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a$ de l'équation $yy - \frac{5}{6}ay = -\frac{1}{6}aa$; & l'on ne s'est pas servi de l'autre racine $y - \frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a$; $y = \frac{1}{2}a$, parceque cela ne donneroit pas la division de *AD* en trois parties comme on le demande, mais serviroit plûtôt à trouver le plus petit triangle. Ce qui se prouve ainsi.

Mettons $\frac{1}{2}a$ pour y dans $z = \frac{-aa + 2ax + 2ay - 2xy}{2y}$, il viendra $z = x$.

Et l'équation $r = \sqrt{xx - zz}$ se change en $r = \sqrt{xx - xx} = 0$. C'est-à-dire que la perpendiculaire $EF = r$ est nulle, ou infiniment petite.

Il suit aussi que $v = \frac{1}{2}ry$ devient $v = 0$, & que le triangle cherché v est nul ou infiniment petit.

Substituons enfin zero pour x, $\frac{1}{2}a$ pour y dans $s = a - x - y$, ce sera $s = \frac{1}{2}a = y$. De sorte que le triangle le plus petit aura $y = \frac{1}{2}a$ pour un côté, $s = \frac{1}{2}a$ pour le second côté, x nul ou infiniment petit pour le troisiéme, ou bien le plus petit triangle cherché n'est pas possible.

8. Vous pouvez appliquer aux nombres ce qui vient de se faire pour les lignes.

Qu'il faille diviser un nombre $16 = a$ en deux parties, de telle sorte que le produit x de ces deux parties, dont l'une soit nommée y, l'autre $a - y$, soit le plus grand produit, qui puisse se faire de la multiplication de deux autres parties quelconques de ce même nombre. Vous ferez ce que vous avez fait n. 5. & vous trouverez $y = \frac{1}{2}a = 8$, &c.

9. On demande entre tous les parallelepipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtez la droite donnée b ; celui, qui a la moindre surface y. Nommons le second côté x, le troisiéme z.

Par la supposition le parallelepipede bxz est égal au cube a^3 ; donc $z = \frac{a^3}{bx}$. De plus tout parallelepipede est composé de six plans, dont les deux opposez sont toûjours égaux. Cherchons à en exprimer trois, qui soient opposez à trois autres égaux ; l'un de ces trois est le produit bx du côté b par le côté x ; le second est le produit $\frac{a^3}{x}$ du côté b par le côté $z = \frac{a^3}{bx}$; le troisiéme est le produit $\frac{a^3}{b}$ du côté x par le côté $z = \frac{a^3}{bx}$. Ces trois plans doublez feront les six qui sont égaux à la surface cherchée ; & l'équation est $2bx + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{b} = y$, ou $2bbxx + 2a^3b + 2a^3x = bxy$. $xx +$

FIG. 163. $\frac{a^3x}{bb} - \frac{yx}{2b} + \frac{a^3}{b} = 0$. que je compare avec $xx - 2ex + ee = 0$.

Les derniers termes $\frac{a^3}{b} = ee$, donnent $e = x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$, les seconds $\frac{a^3x}{bb} - \frac{yx}{2b} = -2ex$ font $\frac{y}{2b} = \frac{a^3}{bb} + 2e$, & mettant pour e sa valeur, $\frac{y}{2b} = \frac{a^3}{bb} + 2\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; $y = \frac{2a^3}{b} + 4b\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Mais l'on a $z = \frac{a^3}{bx}$, donc $z = \frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$, & $z = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Ainsi $z = x$, & $bxz = a^3$.

10. Il faut observer, que dans les cinq derniers Exemples & leurs semblables, on trouve la même solution soit qu'on cherche un plus grand, soit qu'on cherche un moindre. Ainsi pour distinguer lequel c'est des deux qu'on a trouvé, on doit regarder l'équation qu'on a resoluë, comme exprimant la nature d'une courbe que l'on décrira. Si dans cette construction l'appliquée x, à qui la valeur trouvée de x convient, tombe sur la concavité de la courbe, on a trouvé un plus grand; si elle tombe sur la convexité, on a trouvé un moindre. Quelques Exemples éclairciront cette Regle.

1°. Il faut déterminer si n. 5. on a trouvé un plus grand, ou un plus petit rectangle x. L'équation est $ay - yy = x$, & parcequ'on a trouvé $x = \frac{1}{4}aa$, c'est un quarré, & l'équation peut se changer en $ay - yy = xx$ qui est un lieu au cercle, que je peux construire ainsi.

Fig. 163. soit AB, a; dont M est le milieu: du centre M, de l'intervale MA je décris le demi-cercle AHB; ses abscisses AG, AM, Ag sont y; ses appliquées GD, MH, gd, x. Ce cercle est le lieu de l'équation $ay - yy = xx$; car à tous les points D l'on a DG, x; AG, y; $GB = AB - AG$, $a - y$; & par la nature du cercle $AG \times GB = \overline{GD}^2$, $ay - yy = xx$.

Ensuite je cherche l'appliquée, à qui la valeur de $xx = \frac{1}{4}aa$, $x = \frac{1}{2}a$ trouvée n. 5. convient; & je trouve que c'est MH appliquée au centre M, dont le quarré $\overline{MH}^2$ est le plus grand ou le plus petit rectangle cherché. Mais parceque MH est appliquée à la concavité du cercle AHB, je détermine que c'est un plus grand rectangle, comme MH est la plus grande appliquée.

2°. Il faut fixer, si n. 9. on a trouvé une plus grande, ou une moindre surface. L'équation est $xx + \frac{a^3x}{bb} - \frac{xy}{2b} + \frac{a^3}{b} = 0$. Dont vous ferez évanoüir les seconds termes, pour la construire. Soit donc $x + \frac{a^3}{2bb} - \frac{y}{4b} = s$; $s - \frac{a^3}{2bb} + \frac{y}{4b} = x$. Substituez cette valeur de x à sa place, & le quarré de cette valeur à la place de xx; la premiere reduite sera, $ss - \frac{a^6}{4b^4} + \frac{a^3y}{4b^3} - \frac{yy}{16bb} + \frac{a^3}{b} = 0$; $\frac{yy}{16bb} - \frac{a^3y}{4b^3} = ss - \frac{a^6}{4b^4} + \frac{a^3}{b}$. Multipliez par $16bb$, vous produirez $yy - \frac{4a^3y}{b} = 16bbss - \frac{4a^6}{bb} + 16a^3b$.

Faites encore $y - \frac{2a^3}{b} = v$, $v + \frac{2a^3}{b} = y$; & par la substitution vous aurez la seconde reduite $vv - 16a^3b = 16bbss$, lieu à l'hyperbole par ses diametres, que vous construirez ainsi.

Sur l'infinie AB, Fig. 164. mettez au point A le commencement des y; coupez $AC = \frac{2a^3}{b}$, & les AB étant y, les $CB = AB - AC$ seront $y - \frac{2a^3}{b} = v$. Et l'origine des v sera au point C centre de l'hyperbole. Ensuite prenez $CK = CL = 4a\sqrt{ab}$, LK est le diametre déterminé, & K le sommet de l'hyperbole, dont le diametre LK est $8a\sqrt{ab}$, le parametre $\frac{a}{2bb}\sqrt{ab}$, les appliquées perpendiculaires sur AB: ainsi l'on peut décrire l'hyperbole KH. Fig. 164.

Maintenant faites $AF = 4b$, au point F élevez la perpendiculaire $EF = 1$; & par les points E, A tirez l'infinie EAD, à cause des triangles AFE, ABD équiangles, AF, $4b$: FE, 1 : : AB, y : BD, $\frac{y}{4b}$. Coupez encore $DG = \frac{a^3}{2bb}$, menez Gg parallele à DE, & nommez GH, x. Vous aurez $BH = DG + GH - DB = \frac{a^3}{2bb} + x - \frac{y}{2b} = s$. Je dis que l'hyperbole KH est le lieu de l'équation proposée.

Car LB est $CB + CL$, $v + 4a\sqrt{ab}$; KB est $CB - CK$, $v - 4a\sqrt{ab}$. Or par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $8a\sqrt{ab}$ est au parametre $\frac{a}{2bb}\sqrt{ab}$: de même le rectangle $LB \times BK$, $vv - 16a^3b$ est au quarré $\overline{BH}^2$, ss. donc $8ass\sqrt{ab} = \frac{a}{2bb}vv\sqrt{ab} - \frac{8a^4}{b}\sqrt{ab}$, multipliez par $2bb$, divisez par $a\sqrt{ab}$, vous ferez $16bbss = vv - 16a^3b$. Substituez par ss & vv leurs valeurs, & vous referez l'équation proposée $xx + \frac{a^3x}{bb} - \frac{yx}{2b} + \frac{a^3}{b} = 0$.

Après cela par le point A menez l'infinie Aa parallele aux appliquées interieures HB de l'hyperbole HK, & concevez une infinité d'appliquées exterieures AK, aN tirées depuis la droite Aa jusqu'à la convexité de l'hyperbole; & que toutes ces appliquées soient paralleles à la ligne AK, elles representeront toutes les y, qui peuvent se prendre sur AB, & aN par exemple répondra à AB, de sorte que ce que nous avons démontré de AB convient à aN qui lui est égale. De plus AK, y est ici $AC + CK$, $= \frac{2a^3}{b} + 4a\sqrt{ab}$, $y = \frac{2a^3}{b} + 4b\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ comme on l'a trouvé n. 9.

Donc l'appliquée exterieure AK a les conditions necessaires pour representer la superficie cherchée y de n. 9. & parceque AK est terminée à la convexité de l'hyperbole KH, elle est une moindre quantité, ou la moindre superficie.

3° On veut savoir si n. 7. on a trouvé un plus grand, ou un moindre triangle $v = \frac{1}{6}aa\sqrt{\frac{1}{12}}$. Parceque $x = y$, je mets x pour y dans

l'équation $\begin{matrix} 8axyy & +4a^3y & -a^4 \\ -4aayy & -12aaxy & +4a^3x \\ & +8axxy & -4aaxx \\ & & -16vv \end{matrix} = 0$ & elle se reduit à

$16vv = 16ax^3 - 20a^2xx + 8a^3x - a^4$; $vv = ax^3 - \frac{5}{4}a^2xx + \frac{1}{2}a^3x - \frac{1}{16}a^4$.

Et suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. je décris une courbe, dont les x sont les abscisses, & les v les appliquées : & je trouve que l'appliquée $v = \frac{1}{6}aa\sqrt{\frac{1}{12}}$ qui répond à $x = \frac{1}{3}a$, tombe sur la concavité de la courbe. D'où je conclus, que le triangle cherché est un plus grand.

On découvrira aussi par cette courbe, que v est zero, lorsque x est $\frac{1}{2}a$, car alors les deux branches de la courbe coupent l'axe, en un même point, où elles font ce qu'on appelle un nœud : d'où l'on conclut que x étant $\frac{1}{2}a$, le triangle cherché est nul, ou infiniment petit.

ARTICLE VI.

De la construction des tangentes.

M. DESCARTES.

Exemple de la construction de ce Problême en la Conchoïde. FIG. 155.

JE n'ajoûte point les constructions, par lesquelles on peut décrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, ensuite du calcul que je viens d'expliquer, à cause qu'il est toûjours aisé de les trouver : bien que souvent on ait besoin d'un peu d'adresse pour les rendre courtes & simples.

Comme par exemple si *DC*, Fig. 155. est la premiere conchoïde des Anciens, dont *A* soit le pole, & *BH* la Regle : en sorte que toutes les lignes droites qui regardent vers *A*, & sont comprises entre la courbe *CD*, & la droite *BH*, comme *DB*, *CE*, soient égales : & qu'on veüille trouver la ligne *CG* qui la coupe au point *C* à angles droits. On pourroit en cherchant dans la ligne *BH*, le point par où cette ligne *CG* doit passer selon la Methode ici expliquée, s'engager dans un calcul autant ou plus long qu'aucun des

precedens. Et toutesfois la conſtruction, qui devroit après en être deduite, eſt fort ſimple. Car il ne faut que prendre CF en la ligne droite CA, & la faire égale à CH, qui eſt perpendiculaire ſur HB: puis du point F tirer FG, parallele à BA, & égale à EA. Au moyen dequoi on a le point G, par lequel doit paſſer CG la ligne cherchée.

La conſtruction des tangentes, le point C étant donné, dépend de la valeur trouvée de AP, Fig. 151. comme on a vû Art. 3. où le point P étant donné ſur l'axe, Fig. 156. ou ailleurs, Fig. 157. cette conſtruction dépend de la valeur connuë de PG, Fig. 156. & de AG, Fig. 157.

On a déterminé par le calcul Art. 3. n. 4. le point P, Fig. 155. d'où l'on doit tirer PC ſur le point donné C de la conchoïde à angles droits; de ſorte que la perpendiculaire, que l'on meneroit ſur PC par le point C, ſeroit tangente de la Conchoïde au point C. Et l'on a trouvé $BP = v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$, étant BD, $a = CE$; BA, b; MB, $y = CH$.

Il reſte à faire voir ici, que ſi, comme M. DESCARTES l'aſſure, on coupe ſur CA le ſegment CF égal à CH, y; & que du point F on tire FG parallele à BA & égale à EA; la droite CGP menée par les points C, G, coupe à angles droits la conchoïde DC, c'eſt-à-dire, que la droite CGP coupe l'axe AB au point P, de ſorte que BP ſoit $v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. Par le point E menez EI parallele à AB, & par le point I, IK parallele à EA.

A cauſe des paralleles AB, CH, les triangles EBA, EHC ſont équiangles; & donnent cette analogie CH, $y : CE$, $a :: AB$, b; EA, $\frac{ab}{y} = IK = FG$ ſupp. les lignes FG, EI, qui ſont paralleles à AB, ſont paralleles entr'elles; les triangles CFG, CEI ſont équiangles, & l'on a cette proportion CF, $y : FG$, $\frac{ab}{y} :: CE$, $a : EI$, $\frac{aab}{yy} = AK$.

Les triangles CFG, IKP équiangles à cauſe des paralleles EA, IK, fourniſſent cette proportion, CF, $y :: FG$, $\frac{ab}{y} :: IK$, $\frac{ab}{y} : KP$, $\frac{aabb}{y^3}$.

Ainſi la ligne $BP = BA + AK + KP$ eſt $b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3} = v$.

ARTICLE VII.

Autres manieres de tirer les Tangentes des Courbes.

§. I.

CEtte Methode obſerve, que la ligne PF, Fig. 156. qui coupe une courbe en deux endroits differens E, F, détermine deux appliquées inégales ED, FH, & deux coupées auſſi inégales AD, AH; que la même FIG. 156.

FIG. 156. PF, à mesure qu'on l'approchera de C déterminera toûjours deux autres appliquées & deux autres coupées inégales ; mais de telle sorte que les points E, F ; D, H s'approcheront toûjours plus des points C, G ; les appliquées ED, FH, de l'appliquée GC, & que HD difference des coupées deviendra toûjours moindre : qu'enfin lorsque la même PF sera la tangente PC, les points E, F tomberont en C, les points D, H en G, les appliquées ED, HF se confondront avec CG, & la difference DH des lignes PD, PH sera nulle ou égale à zero. C'est pourquoi dans la derniere équation, lorsque toutes les divisions & les autres operations auront été faites, on rejettera encore les termes, où la valeur de DH se trouvera, comme nuls, parcequ'ils sont multipliez par zero.

Maintenant nommons PD, s ; DH, v ; AD, x ; DE, y ; $PH = PD + DH$, $s+v$; $AH = AD + DH$, $x+v$. Et dans les triangles PDE, PHF, 29. 1. Eucl. équiangles à causes des paralleles ED, FH, nous avons PD, $s : DE$, $y :: PH$, $s+v : HF$, $\frac{sy+vy}{s}$.

1. Supposons que la courbe ACF est une parabole ordinaire, dont le parametre est p. Par la nature de cette courbe on a au point E, $p = \frac{yy}{x}$; & au point F, $p = \frac{ssyy + 2svyy + vvyy}{ssx + ssv} = \frac{yy}{x}$; $ss = 2sx + vx$; rejettons le terme, où v se trouve, afin de faire $ss = 2sx$, $s = 2x$. Or lorsque PF devient la tangente PC, la droite PD devient PG, donc PG, $s = 2x$. Ce qui détermine le point G, lorsque le point P est donné ; & l'appliquée GC détermine le point C, & PC est la tangente, en remarquant qu'à present AG est x. Mais si c'étoit le point C qui fût donné, nous couperions $PA = AG$ qui est maintenant x, & PG seroit $2x = s$.

2. Que la courbe AC soit une hyperbole, dont le diametre déterminé est a, le parametre p. Par la nature de l'hyperbole vous avez au point E, $ayy = apx + pxx$; $\frac{a}{p} = \frac{ax+xx}{yy}$. Au point F, vous avez aussi $\frac{assyy + 2asvyy + avvyy}{ss} = apx + pxx + 2pvx + apv + pvv$ d'où se forme $\frac{a}{p} = \frac{assx + ssxx + 2ssvx + assv + ssvv}{ssyy + 2svyy + vvyy} = \frac{ax+xx}{yy}$; d'où se formera encore $s = \frac{2ax + 2xx}{2x+a}$, qui est maintenant PG, parceque AG, est x. C'est pourquoi si le point C est donné, AG, x sera connuë, & l'on déterminera aisément PG. Que si c'étoit le point P, qui fût donné, vous connoîtriez PA, que vous nommeriez b, & vous auriez $AG = PG - AP$, $x = \frac{2ax+2xx}{2x+a} - b$; $x = \frac{ab}{a-2b} = AG$. Ce qui fait connoître le point G, & ensuite le point C, en appliquant CG au point G.

3. La courbe AC est une premiere parabole cubique, au point E on aura donc $aa = \frac{y^3}{x}$ & au point F, $aa = \frac{s^3y^3 + 3ssvy^3 + 3svvy^3 + v^3y^3}{s^3x + s^3v} = \frac{y^3}{x}$ d'où vous formerez $s = 3x$, qui est à present PG.

On peut dans la suite du calcul, pour en diminuer la difficulté, rejetter les termes où vv, v^3, &c. se trouvent ; parcequ'il est sur, qu'il resteroit toûjours un v dans ces termes après toutes les divisions.

4. Cette Methode sert à trouver les *maxima* & *minima*. Après avoir supposé ce qu'on a expliqué Art. 5. au commencement de §. 2. Fig. 163. & après avoir remarqué que la difference Gg des abscisses AG, Ag est nulle, lorsque les deux appliquées égales DG, dg se confondent avec CM: je nomme AG, x; Gg, v; Ag, $x+v$; la donnée AB, a; $GB = a - x$; $gB = a - x - v$; DG, $y = dg$. Fig. 163.

Si la courbe ACB est un cercle, j'ai au point D, $yy = ax - xx$: & au point d, $yy = ax - xx - 2vx + av - vv = ax - xx$, $x = \frac{1}{2}a$. C'est AM qui est maintenant x, ainsi AM est le rayon, & l'appliquée MC tirée par le centre M est la plus grande appliquée.

Si la courbe ACB est une ellipse, par sa nature vous avez au point D, $\frac{a}{p}yy = ax - xx$; vous aurez au point d, $\frac{a}{p}yy = ax - xx - 2vx + av - vv = ax - xx$, & le reste comme dans le cercle.

§. II.

Une autre Methode multiplie de la maniere, que les Exemples expliqueront, une équation, qui a deux racines égales, par une progression arithmetique quelconque; celle qui en a trois égales, par deux progressions arithmetiques quelconques, &c. & la nouvelle équation qui en resulte, contient une des deux, ou des trois racines égales; & cette racine se trouve en égalant entr'eux les termes de la nouvelle équation. Parmi les differentes progressions arithmetiques, on en choisit une, où zero se trouve, afin qu'il y ait plus de facilité à resoudre la nouvelle équation, laquelle aura un terme de moins que la proposée, & lorsqu'il y a quelque lettre dans l'équation proposée qui embarrasse dans le dessein qu'on a, de découvrir la valeur de certaine autre lettre, on prend une progression dans laquelle zero soit placé sous le terme, qui contient la lettre, qui embarrasse. Après avoir appliqué une ou deux progressions en même tems, pour connoître une quantité de l'équation proposée; on peut encore en appliquer une ou deux autres differentes des premieres, sous la même proposée; pour découvrir la valeur d'une autre quantité; & ainsi de suite. Les Exemples éclairciront cette Methode. La progression arithmetique dont zero est un terme, va en croissant & en décroissant de cette maniere $+4+3+2+1.0.-1-2-3-4$. de sorte que les grandeurs positives precedent zero, & vont en diminuant; les negatives suivent zero & vont en augmentant. ou au contraire.

1. Soit proposée l'équation à l'ellipse $\frac{q}{r}xx - qy + yy = 0$, dont q est le diametre r le parametre, y la coupée, x l'ordonnée.

$$\begin{array}{c} \frac{q}{r}xx - qy + yy = 0 \\ 0 \quad -1 \quad -2\,. \\ \hline * + qy - 2yy = 0 \end{array}$$

On cherche sa plus grande ordonnée, & par consequent l'équation pro-

Fig. 156. posée a deux racines égales. Si je veux connoître la valeur de x, j'applique la progression arithmetique $0 - 1 - 2$, afin que zero soit sous $\frac{q}{r}xx$; je multiplie la proposée par la progression, chaque terme par chaque terme seulement qui lui répond: le produit est $qy - 2yy = 0 . y = \frac{1}{2}q$. Comme Art. 5. §. 2. n. 1.

Multipliez la même équation par une autre progression $+ 1 \quad 0 - 1$; le produit est $\frac{q}{r}xx - yy = 0$; $yy = \frac{q}{r}xx$. Substituez cette valeur de $\frac{q}{r}xx$ à sa place dans la proposée, vous aurez $yy - qy + yy = 0$; $2yy - qy$; $y = \frac{1}{2}q$. Comme auparavant.

$$\begin{array}{l} \frac{q}{r}xx - qy + yy = 0 \\ +1 \quad 0 \quad -1. \\ \hline +\frac{q}{r}xx * - yy = 0. \end{array}$$

Multipliez la même proposée par la progression $+ 3 + 2 + 1$. le produit est $\frac{3q}{r}xx - 2qy + yy = 0$, divisez par 3, vous aurez $\frac{q}{r}xx - \frac{2}{3}qy + \frac{1}{3}yy = 0$; $\frac{q}{r}xx = \frac{2}{3}qy - \frac{1}{3}yy$. Mettez cette valeur de $\frac{q}{r}xx$ à sa place dans la proposée; il vient $\frac{2}{3}qy - \frac{1}{3}yy - qy + yy = 0$; $- \frac{1}{3}qy + \frac{2}{3}yy = 0$; $\frac{2}{3}y = \frac{1}{3}q$, $y = \frac{1}{2}q$.

$$\begin{array}{l} \frac{q}{r}xx - qy + yy = 0 \\ +3 \quad +2 \quad +1 \\ \hline \frac{3q}{r}xx - 2qy + yy = 0. \end{array}$$

Il est certain, que quelques progressions arithmetiques demandent un plus grand calcul que d'autres.

Quand même les lettres de l'équation proposée seroient autrement disposées, l'operation réussiroit: au lieu de $\frac{q}{r}xx - qy + yy = 0$, proposez $xx - ry + \frac{r}{q}yy = 0$, qui est la même que la precedente, après qu'elle a été multipliée par r, & divisée par q. Multipliez cette nouvelle équation par la progression $0 - 1 - 2$, le produit est $+ ry - \frac{2r}{q}yy = 0$; $y = \frac{1}{2}q$.

$$\begin{array}{l} xx - ry + \frac{r}{q}yy = 0 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \\ \hline + ry - \frac{2r}{q}yy = 0. \end{array}$$

2. Soit proposée l'équation de Art. 5. §. 1. n. 4. $y^3 - 2ayy - \frac{as}{r}yy - aay - asy + 2a^3 = 0$.

$$\begin{array}{l} y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = 0. \\ \quad - \frac{as}{r}yy - asy \\ \hline +1 \quad 0 \quad - \quad -2 \\ \hline 3y^3 \quad * \quad * \quad + 4a^3 = 0 \end{array}$$

Parcequ'il s'agit de trouver un point d'inflexion, il y a trois racines égales, & vous en multiplierez chaque terme, par le terme de deux progressions arithmetiques qui sont sous lui, par exemple ici y^3 sera multiplié par $+ 1$ de la premiere progression, & par $+ 2$ de la seconde, après que 1 & 2 se sont multipliez. Le produit est $2y^3 + 4a^3 = 0$; $y^3 + 2a^3 = 0$; $- y^3 = 2a^3$; $- y = \sqrt[3]{2a^3}$. Comme dans l'endroit cité.

FIG. 156.

$$\begin{array}{llllll} y^3 & x & * & -\frac{aasy}{r} & +aas & =0. \\ 2 & 1 & & 0 & -1 & \\ +1 & 0 & & -1 & -2 & \\ \hline +2y^3 & * & & * & +2aas & =0 \end{array}$$

3. Soit proposée l'équation de Art, 5. §. 1. n. 2. $y^3 * -\frac{aasy}{r} + aas = 0$. parcequ'il faut trouver un point d'inflexion, je me sers de deux progressions arithmetiques, dont je mets un des termes sous le second terme de la proposée, quoiqu'il soit nul, & parceque c'est s que je veux d'abord connoître, je mets zero sous le terme, où r se trouve, le produit $2y^3 + 2aas = 0$, $s = \frac{-y^3}{aa}$.

$$\begin{array}{lllll} y^3 & * & -\frac{aasy}{r} & +aas & =0. \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \\ \hline * & * & -\frac{2aasy}{r} & +6aas & =0. \end{array}$$

Ensuite pour connoître r je me sers de deux autres progressions arithmetiques de la maniere, que vous voyez.

Le produit est $\frac{-2aasy}{r} + 6aas = 0$, $+2aay = 6aar$; $r = \frac{1}{3}y$. Après cela on substituë la valeur de s & r dans $y^3 * \frac{-aasy}{r} + aas = 0$, & l'on fait $y^3 + 3y^3 - y^3 = 0$; $3y^3 = 0$; $y = \frac{0}{3}$, comme dans l'endroit cité.



PARTIE QUATRIE'ME.

De quelques Figures de verres, qui servent à la reflexion & à la refraction de la lumiere.

M. DESCARTES explique en premier lieu la nature & les effets de quatre genres d'ovales, qu'il a inventées; en second lieu il vient à la figure qu'il faut donner aux verres, qui rëünissent à un point donné les rayons, qui viennent d'un autre point donné.

Les choses qu'il nous faut expliquer, sont celles-ci. 1° La reflexion & la refraction de la lumiere en peu de mots. 2° La description des quatre sortes d'ovales. 3° Leurs proprietez par rapport à la reflexion & à la refraction de la lumiere, & la démonstration de ces proprietez. 4° Quelles proprietez le cercle, la parabole, l'ellipse, & l'hyperbole ont par rapport à la reflexion & à la refraction de la lumiere. 5° La Figure qu'il faut donner aux verres, afin qu'ils rëünissent à un point donné les rayons, qui viennent d'un autre point donné. Ce sera la matiere de cinq Sections.

SECTION I.

De la reflexion & de la refraction de la lumiere.

LOrsque le rayon de lumiere *AC* tombe obliquement sur un corps opaque & poli *DCE*, Fig. 166. & *GCH*, Fig. 167. 168. il ne continuë pas son chemin par la ligne *CK*; mais il revient, & se reflechit par la ligne *CB*. Menez par le point *C*, Fig. 167. 168. la tangente *DCE*. Au point *C* dans les trois Figures élevez *CF* perpendiculaire à *DCE*. Dans toutes, *AC* est le rayon d'incidence, *CB* le rayon de reflexion ou le rayon reflechi, *C* le point d'incidence & de reflexion, *ACD* l'angle d'incidence, *BCE* l'angle de reflexion, *ACF* l'angle d'inclinaison qui est compris par le rayon d'incidence *AC* & par la perpendiculaire *CF*, *FCB* l'angle reflechi compris par le rayon reflechi *CB* & par la perpendiculaire *CF*. On démontre dans la Catoptrique, que toûjours l'angle d'incidence *ACD* est égal à l'angle de reflexion *BCE*: de sorte que si le rayon d'incidence *FC* est perpendiculaire sur les plans reflechissans *DCE* des trois Figures, il s'en retourne par le même chemin *CF*, qui sera encore le rayon de reflexion; & alors les angles *FCD*, *FCE*, qui peuvent être également appellez angles d'incidence ou de reflexion, étant droits, sont égaux, & il n'y a point d'angle d'inclinaison. Au reste on mesure les angles d'incidence, de reflexion, d'inclinaison sur les lignes & sur les surfaces courbes, *GCH*, Fig. 167.168. comme si le rayon d'incidence tomboit sur la ligne droite ou sur le plan *DCE*, Fig. 167. 168. qui touche la courbe au point d'incidence *C*. Voyez Part. 3. Sect. 2. au commencement.

Fig. 167. 168.

Lorsque un rayon de lumiere *AC* tombe obliquement sur un corps transparent & poli *DCE*, Fig. 169. & *GCH*, Fig. 170. 171. qui lui donne un passage plus ou moins libre, que le corps transparent *DAF* d'où il vient; alors il ne continuë pas son chemin par la ligne *CK*; mais il se rompt, & traverse le corps *DCI*, en suivant la ligne *CB*, ou la ligne *CI*, & c'est ce qu'on appelle refraction. Par le point *C*, Fig. 170. 171. menez la tangente *DCE*, (car on mesure aussi la refraction faite sur une surface courbe, comme si elle se faisoit sur la ligne ou la surface plane, qui touche la courbe.) Et au point *C* des trois Figures élevez *FCL* perpendiculaire à la droite *DCE*. *AC* est le rayon d'incidence, *CK* le rayon d'incidence prolongé, *C* le point d'incidence ou de refraction, *CB* ou *CI* le rayon rompu, *FC* la perpendiculaire d'incidence, *CL*, qui est *FC* prolongée, la perpendiculaire de refraction; *ACF* est l'angle d'inclinaison, qu'on appelle aussi quelquefois angle d'incidence, *ACD* l'angle d'incidence, *KCB* ou *KCI* compris par le rayon d'incidence prolongé *CK* & par le rayon

Fig. 169. 170. 171.

rompu *CB* ou *CI* eſt l'angle de refraction, l'angle *BCL* ou *ICL* compris par la perpendiculaire de refraction *CL* & par le rayon rompu *CB* ou *CI* eſt l'angle rompu, que l'on nomme auſſi quelquefois l'angle de refraction.

Lorſque le rayon *AC* trouve un paſſage plus aiſé dans le corps où il entre, qu'il ne l'avoit dans le corps d'où il ſort; la refraction ſe fait en s'approchant de la perpendiculaire *CL*, par la ligne *CB* par exemple, qui eſt plus près de la perpendiculaire de refraction *CL*, que n'eſt le rayon d'incidence prolongé *CK*. Mais lorſque le rayon *AC* paſſe moins librement dans le corps où il entre, qu'il n'avoit fait dans celui d'où il ſort; la refraction ſe fait en s'éloignant de la perpendiculaire *CL*, par exemple dans la ligne *CI*, qui en eſt plus éloignée, que le rayon d'incidence prolongé *CK*.

Le rayon qui paſſe de l'air dans l'eau ou dans le verre, ſe rompt en s'approchant de la perpendiculaire; au contraire le rayon qui ſort de l'eau ou du verre pour entrer dans l'air, ſe rompt en s'éloignant de la perpendiculaire. C'eſt ce que l'experience apprend.

Differens angles d'inclinaiſon *ACF* & differens angles d'incidence *ACD*, ont differens angles de refraction & differens angles rompus.

Les angles d'incidence & de refraction correſpondans ne ſont pas égaux entr'eux, & leurs ſinus ne gardent pas une proportion conſtante. Il en eſt de même des angles d'incidence & des angles rompus, des angles d'inclinaiſon & des angles de refraction. Mais l'experience a fait connoître que les ſinus des angles d'inclinaiſon ont une proportion conſtamment la même avec les ſinus des angles rompus correſpondans, ainſi que M. DESCARTES l'aſſure dans ſa Dioptrique, Diſcours 2. Soit Fig. 172. *DAF* de l'air, *DCB* du verre, *DCE* leur ſurface commune; *ACF* un angle d'inclinaiſon dont *AF* eſt le ſinus, *BCL* l'angle rompu correſpondant, dont *BL* eſt le ſinus: *aCf* un autre angle d'inclinaiſon dont *af* eſt le ſinus, *bCl* l'angle rompu correſpondant dont *lb* eſt le ſinus: on a cette analogie *AF*: *BL*:: *af*: *bl*. L'experience a appris que la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de ſon angle rompu eſt à peu près comme 3 à 2, lorſque le rayon entre de l'air dans le verre; & qu'elle eſt fort près de 4 à 3, lorſque le rayon entre de l'air dans l'eau. De plus la refraction qui ſe fait dans deux milieux, eſt reciproque, c'eſt-à-dire, que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de ſon angle rompu, comme 2 à 3, lorſque le rayon ſort du verre pour entrer dans l'air; & comme 3 à 4, lorſqu'il paſſe de l'eau dans l'air. Il faut obſerver que le rayon d'incidence *FC* perpendiculaire ſur *DCE* dans ces quatre dernieres Figures ne ſe rompt point, mais qu'il continuë ſon chemin par la même ligne *CL*; de plus que l'angle rompu *BCL* ou *ICL* eſt appellé par quelques Auteurs angle de refraction. Fig. 172.

Soit *ABCDA*, Fig. 173. du verre, dont *ABC* eſt une ſurface conve-

FIG. 173. xe, *ADC* une concave, qui sont toutes deux entourées de l'air. Soit encore *G* le centre de la convexité circulaire *ABC*, *L* le centre de la concavité circulaire *ADC*, *GL* le diametre des deux cercles. Soit enfin *EB* un rayon parallele au diametre *GL*, & qui tombe sur la convexité *ABC*. Il faut examiner ce qui arrive à ce rayon, lorsqu'il entre dans le verre, ou lorsqu'il en sort. Comme il entre de l'air dans le verre au point *B*, par ce point je mene la tangente *IBK*, & la ligne *HBG*, qui sera perpendiculaire à *IK*, & la perpendiculaire d'incidence & de refraction. L'angle *EBH* est l'angle d'inclinaison du rayon *EB*. Ce rayon tombe obliquement sur la touchante *IK*, ou sur la convexitê *ABC*, ainsi il ne continuera pas son chemin vers *F*: mais il se rompra en s'approchant de la perpendiculaire *BG*, & ira dans le verre par la ligne *BN*, si le sinus de l'angle d'inclinaison *EBH* est au sinus de l'angle rompu *GBN*, comme 3 à 2. Maintenant par le point *N* je mene *PNQ* touchante du cercle *ADC* au point *N*, & la ligne *MNL* perpendiculaire sur *PNQ* ou sur la concavité *ANC*; cette ligne *MNL* est la perpendiculaire d'incidence & de refraction pour le point *N*. L'angle *BNM* est l'angle d'inclinaison du rayon *BN*. Ce rayon ne sortira pas du verre dans l'air par la droite *NR*; mais il s'écartera de la perpendiculaire *NL*, & il ira par la ligne *NS*; si le sinus de l'angle d'inclinaison *BNM* est au sinus de l'angle rompu *SNL*, comme 2 à 3.

Reciproquement le rayon *SN* se rompra en *NB* s'il entre de l'air *ALD* dans le verre, & *BN* se rompra en *BE* s'il sort du verre dans l'air *HBK*.

On considere ici trois sortes de rayons; les paralleles, les convergents & les divergents. Les convergents sont ceux, qui s'approchent les uns des autres; comme *AC*, *FC*, *BC*, Fig. 166. s'ils viennent des points *A*, *F*, *B*. Les divergents sont ceux, qui s'éloignent les uns des autres; comme les mêmes *CA*, *CF*, *CB*, lorsqu'ils viennent du même point *C*.

SECTION II.

La description des quatre Genres d'Ovales.

I. M. DESCARTES.

Explication de quatre nouveaux genres d'ovales.

AU reste afin que vous sachiez que la consideration des lignes courbes ici proposées n'est pas sans usage, & qu'elles ont diverses proprietez, qui ne cedent en rien à celles des Sections coniques, je veux encore ajoûter ici l'explication de certaines Ova-

les, que vous verrez être très-utile pour la Theorie de la Catoptrique & de la Dioptrique. Voici la façon dont je les décris. *qui servent à l'optique.*

Premierement ayant tiré les lignes droites *FA*, *AR*, Fig. 174. qui s'entrecoupent au point *A*, sans qu'il importe à quels angles, je prends en l'une le point *F* à discretion, c'est-à-dire plus ou moins éloigné du point *A* selon que je veux faire ces ovales plus ou moins grandes, & de ce point *F* comme centre, je décris un cercle, qui passe quelque peu au delà du point *A*, comme par le point 5; puis de ce point 5 je tire la ligne droite 5, 6, qui coupe l'autre au point 6, en sorte que *A6* soit moindre que *A5*, selon telle proportion donnée qu'on veut, à savoir selon celle qui mesure les refractions, si on s'en veut servir pour la Dioptrique. Fig. 174.

Après cela je prends aussi le point *G* en la ligne *FA*, du côté où est le point 5 à discretion, c'est-à-dire en faisant, que les lignes *AF*, & *GA* ont entr'elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis je fais *RA* égale à *GA* en la ligne *A6*, & du centre *G* décrivant un cercle, dont le rayon soit égal à *R6*, il coupe l'autre cercle de part & d'autre au point 1, qui est l'un de ceux, par où doit passer la premiere des Ovales cherchées. Puis dérechef du centre *F* je décris un cercle, qui passe un peu au deça ou au delà du point 5, comme par le point 7, & ayant tiré la ligne droite 7 8 parallele à 5 6, du centre *G* je décris un autre cercle, dont le rayon est égal à la ligne *R8*; & ce cercle coupe celui qui passe par le point 7 au point 1, qui est encore l'un de ceux de la même Ovale.

Pour la seconde Ovale il n'y a point de difference, sinon qu'au lieu de *AR*, Fig. 175. il faut de l'autre côté du poins *A* prendre *AS* égal à *AG*, & que le rayon du cercle décrit du centre *G*, pour couper celui qui est décrit du centre *F*, & qui passe par le point 5, soit égal à la ligne *S6*; ou qu'il soit égal à *S8*, si c'est pour couper celui qui passe par le point 7; & ainsi des autres. Au moyen de quoi ces cercles s'entrecoupent aux points marquez 2, 2, qui sont ceux de cette seconde Ovale *A2X*. Fig. 175.

Pour la troisiéme & la quatriéme Fig. 176. 177. au lieu de la Fig. 176. 177.

ligne *AG*, il faut prendre *AH* de l'autre côté du point *A*, à ſavoir du même qu'eſt le point *F*. Et il y a ici de plus à obſerver, que cette ligne *AH* doit être plus grande que *AF*, laquelle peut même être nulle, en ſorte que le point *F* ſe rencontre où eſt le point *A* en la deſcription de toutes ces Ovales.

Après cela les lignes *AR* & *AS* étant égales à *AH*; pour décrire la troiſiéme Ovale *A* 3 *Y*, je fais un cercle du centre *H*, dont le rayon eſt égal à *S* 6, qui coupe au point 3 celui du centre *F*, qui paſſe par le point 5; & un autre dont le rayon eſt égal à *S* 8, qui coupe celui qui paſſe par le point 7, au point auſſi marqué 3; & ainſi des autres. Enfin pour la derniere Ovale je fais des cercles du centre *H*, dont les rayons ſont égaux aux lignes *R* 6, *R* 8, & ſemblables, qui coupent les autres courbes aux points marquez 4.

La deſcription que M. DESCARTES donne des quatre genres d'Ovales eſt aiſée à ſuivre, & ſe reduit à ceci.

1° Dans les quatre genres d'ovales les lignes *AF*, *AR*, ou *AF*, *AS* ſe coupent à tels angles qu'on veut au point *A*. Le point *F* peut être le même que le point *A*, ou en être éloigné autant que l'on veut; plus il en ſera éloigné, plus grandes ſeront les ovales. La ligne *A 5* eſt plus grande que la ligne *A 6* ſelon la raiſon qu'on veut; mais lorſqu'il s'agit de faire des verres pour la refraction de la lumiere, la proportion de *A 5* à *A 6* eſt à peu près comme *3* à *2*, telle qu'eſt la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui paſſe de l'air dans le verre. M. DESCARTES la mettra comme *d* à *e*.

2° Dans les deux premiers genres d'Ovales, ſi le point *A* n'eſt pas le même que le point *F*, il eſt entre *F* & *G*; la raiſon de *AF* à *AG* eſt telle qu'on veut. Dans les deux derniers genres d'ovales, ſi le point *F* n'eſt pas le même que le point *A*, il eſt entre *A* & *H*, & la raiſon de *AF* à *AH* eſt telle qu'on veut.

3° Dans le premier genre d'Ovales *AR* eſt égale à *AG*, & le point *R* eſt pris du même côté, par rapport au point *A*, que ſont les points *6*, *8*. Dans le ſecond genre d'Ovales *AS* eſt égale à *AG*, & le point *S* eſt pris de l'autre côté, par rapport au point *A*, que celui, où l'on prend les points *6*, *8*. Dans le troiſiéme *AS* eſt égale à *AH*, & le point *S* eſt pris de l'autre côté, par rapport au point *A*, que celui, où l'on prend les points *6*, *8*. Dans le quatriéme *AR* eſt égale à *AH*, & le point *R* eſt pris du même côté, par rapport au point *A*, que l'on prend les points *6*, *8*.

4° Dans toutes ces ſortes d'Ovales on décrit differens cercles du point *F* comme centre, qui coupent tous la ligne *AF* au delà du point *A*.

Que le premier cercle la coupe au point 5; de ce point l'on tire la ligne 5 6 ſur *AR* ou *AS*. Enſuite pour le premier & dernier genre d'Ovales on ouvre ſon compas de la longueur de *R 6*, pour le ſecond & troiſiéme de la longueur de *S 6*: & du point G comme centre pour les deux premiers genres, ou du point H pour les deux derniers, avec cette ouverture de compas on décrit un cercle qui coupe le precedent de part & d'autre de la ligne *FA* en deux points, qui appartiennent à l'Ovale qu'on décrit. Ces deux points ſont *1*, *1*, Fig. 174. *2*, *2*, Fig. 175. *3*, *3*, Fig. 176. *4*, *4*, Fig. 177.

On décrit encore un nouveau cercle du centre *F*, qui coupe *AF* en un autre point *7*; on mene la ligne *7 8* parallele à *5 6*. Enſuite on ouvre ſon compas pour le premier & le quatriéme genre de la longueur de *A 8*, dans le ſecond & troiſiéme de la longueur de *S 8*; & du point G comme centre pour les deux premiers genres, ou du point H pour les deux derniers, avec cette ouverture de compas on décrit un cercle, qui coupe le precedent de part & d'autre de la ligne *FA*, en deux points qui appartiennent auſſi à l'Ovale qu'on décrit. Ces deux points ſont *1*, *1*, Fig. 174. *2*, *2*, Fig. 175. *3*, *3*, Fig. 176. *4*, *4*, Fig. 177.

On refait ces mêmes operations autant de fois, qu'on veut avoir de differens points de l'Ovale, qu'on cherche. Les cercles décrits du centre F par les points *A*, *V*, *X*, *Y*, *Z*, ne ſont coupez qu'en ces points-là par ceux, qui ſont décris des centres G ou H. Les cercles décrits du centre *F*, & qui coupe la ligne *FA*, au delà des points *V*, *X*, *Y*, *Z*, ne ſont plus coupez par ceux, qui ſont décrits des centres G ou H.

II. M. DESCARTES.

On pourroit encore trouver une infinité d'autres moyens pour décrire ces mêmes ovales, comme par exemple, on peut tracer la premiere *AV*, Fig. 178. lorſqu'on ſuppoſe les lignes *FA* & *AG* être égales, ſi on diviſe la toute *FG* au point *L*, en ſorte que *FL* ſoit à *LG*, comme *A 5* à *A 6*, c'eſt-à-dire qu'elles ayent la proportion, qui meſure les refractions. Puis ayant diviſé *AL* en deux parties égales au point *K*, qu'on faſſe tourner une Regle, comme *FE*, autour du point *F*, en preſſant du doigt *C*, la corde *EC*, qui étant attachée au bout de cette Regle vers *E*, ſe replie de *C* vers *K*, puis de *K* derechef vers *C*, & de *C* vers *G*, où ſon autre bout ſoit Fig. 178.

attaché, en sorte que la longueur de cette corde soit composée de celle des lignes *GA* plus *AL* plus *FE* moins *AF*. Et ce sera le mouvement du point *C*, qui décrira cette Ovale, à l'imitation de ce qui a été dit en la Dioptrique * de l'ellipse & de l'hyperbole. Mais je ne veux point m'arrêter plus long-tems sur ce sujet.

* Discours 8e.

On parlera de cette maniere de décrire le premier genre d'Ovales avec une corde, Sect. 3. Art. 1. n. 6.

III. M. DESCARTES.

Or encore que toutes ces Ovales semblent être quasi de même nature, elles sont neanmoins de quatre divers genres, chacun desquels contient sous soi une infinité d'autres genres, qui derechef contiennent chacun autant de diverses especes, que fait le genre des ellipses, ou celui des hyperboles. Car selon que la proportion, qui est entre les lignes *A5*, *A6*, ou semblables, est differente; le genre subalterne de ces Ovales est different.

Puis selon que la proportion, qui est entre les lignes *AF* & *AG*, ou *AH* est changée, les ovales de chaque genre subalterne changent d'espece. Et selon que *AG* ou *AH* est plus ou moins grande, elles sont diverses en grandeur. Et si les lignes *A5*, *A6* sont égales, au lieu des Ovales du premier genre ou du troisiéme, on ne décrit que des lignes droites; mais au lieu de celles du second, on a toutes les hyperboles possibles, & au lieu de celles du dernier, toutes les ellipses.

Après qu'on aura expliqué Sect. 3. les proprietez des quatre sortes d'Ovales, que M. DESCARTES propose ici, on concevra que ce sont quatre genres differens. Ensuite si la raison de la ligne *A5* à la ligne *A6* change, les Ovales du même genre, comme celle du premier sont de differente espece, & forment de nouveaux genres subalternes aux premiers. En effet si la raison de *A5* à *A6* n'est plus à peu près comme *3* à *2*, ou comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere qui de l'air passe dans le verre: les rayons qui Fig. 174. viennent du point *F*, & qui tombent sur la convexité du verre *1A1*, ne se réüniront plus au point *G*. De plus si la raison des lignes *AF*, *AG* change, Fig. 174. 175. ou celle de *AF*, *AH*, Fig. 176. 177. les Ovales du

du même genre changent encore d'eſpece : parceque dans l'ovale *A1v*, Fig. 174. par exemple, *A* eſt un ſommet, *F*, *G* les foyers de cette Ovale. Or, comme Mʳ DESCARTES l'a expliqué dans ſa Dioptrique, Diſcours huitiéme, la differente diſtance des ſommets de l'ellipſe & de l'hyperbole à leurs foyers, établit des eſpeces differentes, la même choſe arrive donc aux Ovales dont nous parlons. Mais s'il n'y a que la grandeur des lignes *AG*, *AH*, qui change, pourveu que ces lignes gardent toûjours la même raiſon avec *AF*, & que la raiſon de *A5* à *A6* demeure auſſi la même : alors les Ovales changent de grandeur ſans changer d'eſpece ; ſelon ce que M. DESCARTES a dit touchant les ellipſes & les hyperboles au même endroit. Enfin ſi la ligne *A5* eſt égale à *A6*, au lieu des Ovales du premier genre & du troiſiéme, on décrit des lignes droites ; au lieu des Ovales du ſecond genre, on a des hyperboles, & au lieu des Ovales du quatriéme genre, on fait des ellipſes, ſuivant le ſentiment de M. DESCARTES. Nous verrons qu'il peut ſe former auſſi des lignes droites dans ces deux autres genres.

Le changement qui peut arriver aux angles *RAF*, *SAF*, n'en apporte aucun aux differens genres d'Ovales, ſi ce n'eſt qu'ils ſont plus ou moins larges. Tout ce que nous venons de dire, ſera éclairci, Sect. 3. dans ſes quatre Articles.

SECTION III.

Les proprietez de ces Ovales par rapport à la reflexion & à la refraction de la lumiere, & la démonſtration de ces proprietez.

M. DESCARTES.

OUtre cela en chacune de ces Ovales il faut conſiderer deux parties, qui ont diverſes proprietez ; à ſavoir en la premiere Figure 174. la partie, qui eſt vers *A*, fait que les rayons, qui étant dans l'air viennent du point *F*, ſe retournent tous vers le point *G*, lorſqu'ils rencontrent la ſuperficie convexe d'un verre, dont la ſuperficie eſt *1A1*, & dans lequel les refractions ſe font telles, que ſuivant ce qui a été dit en la Dioptrique, elles peuvent toutes être meſurées par la proportion, qui eſt entre les lignes *A5* & *A6*, ou ſemblables, par l'aide deſquelles on a décrit cette Ovale.

Fig. 174. Les proprietez de ces Ovales, touchant les reflexions, & les refractions.

Mais la partie qui eſt vers *V* fait que les rayons qui viennent du point *G*, ſe reflechiroient tous vers *F*, s'ils y rencontroient la ſuper-

ficie concave d'un miroir, dont la Figure fût *1V1*, & qui fût de telle matiere, qu'il diminuât la force de ces rayons, ſelon la proportion, qui eſt entre les lignes *A5* & *A6*: car de ce qui a été démontré en la Dioptrique, il eſt évident, que cela poſé, les angles de la reflexion ſeroient inégaux, auſſi bien que ſont ceux de la refraction, & pourroient être meſurez en même ſorte.

FIG. 175. En la ſeconde Ovale, Fig. 175. la partie *2A2* ſert encore pour les reflexions, dont on ſuppoſe les angles être inégaux. Car étant en la ſuperficie d'un miroir compoſé de même matiere que le precedent, elle feroit tellement reflêchir tous les rayons, qui viendroient du point G, qu'ils ſembleroient après être refléchis venir du point F. Et il eſt à remarquer, qu'ayant fait la ligne *AG* beaucoup plus grande que *AF*, ce miroir ſeroit convexe au milieu vers *A*, & concave aux extrêmitez: car telle eſt la Figure de cette ligne, qui en cela repreſente plûtôt un cœur qu'une Ovale.

Mais ſon autre partie *2X2* ſert pour les refractions, & fait que les rayons, qui étant dans l'air, tendent vers *F*, ſe détournent vers G; en traverſant la ſuperficie d'un verre, qui en ait la Figure.

FIG. 176. La troiſiéme Ovale, Fig. 176. ſert toute aux refractions, & fait que les rayons, qui étant dans l'air, tendent vers *F*, ſe vont rendre vers *H* dans le verre, après qu'ils ont traverſé ſa ſuperficie, dont la Figure eſt *A3Y3*, qui eſt convexe par tout, excepté vers *A*, où elle eſt un peu concave, en ſorte qu'elle a la figure d'un cœur, auſſi-bien que la precedente. Et la difference qui eſt entre les deux parties de cette Ovale, conſiſte en ce que le point F eſt plus proche de l'une, que n'eſt le point *H*, & qu'il eſt plus éloigné de l'autre, que ce même point *H*.

FIG. 177. En même façon la derniere ovale, Fig. 177. ſert toute aux reflexions, & fait que ſi les rayons, qui viennent du point *H*, rencontroient la ſuperficie concave d'un miroir de même matiere que les precedens, & dont la Figure fût *A4Z4*, ils ſe reflechiroient tous vers *F*.

De façon qu'on peut nommer les points *F*, & *G*, ou *H* les points brûlans de ces ovales, à l'exemple de ceux des ellipſes & des

hyperboles, qui ont été ainsi nommez en la Dioptrique.

J'omets quantité d'autres refractions & reflexions, qui sont reglées par ces mêmes ovales, car n'étant que les converses, ou les contraires de celles-ci, elles en peuvent facilement être deduites. Mais il ne faut pas que j'omette la démonstration de ce que j'ai dit. Et à cet effet prenons par exemple le point C à discretion en la premiere partie de la premiere de ces ovales Fig. 179. qui est la même que Fig. 150. Puis tirons la ligne droite CP, qui coupera la courbe au point C à angles droits, ce qui est facile par le * Problême precedent; car prenant b pour AG, c pour AF, $c + z$ pour FC; & supposant que la proportion qui est entre d & e, que je prendrai ici toûjours pour celle qui mesure les refractions du verre proposé, designe aussi celle qui est entre les lignes $A5$, $A6$, Fig. 174. & semblables qui ont servi pour décrire cette Ovale, ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour GC: on trouve que la ligne AP est $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ainsi qu'il a été montré ci-dessus. ** De plus du point P ayant tiré PQ à angles droits sur la droite FC, & PN aussi à angles droits sur GC, considerons que si PQ est à PN, comme d est à e, c'est-à-dire comme les lignes, qui mesurent les refractions du verre convexe AC, le rayon qui vient du point F au point C doit tellement s'y courber en entrant dans ce verre, qu'il s'aille rendre après vers G: ainsi qu'il est très-évident, de ce qui a été dit dans la Dioptrique. Puis enfin voyons par le calcul, s'il est vrai que PQ soit à PN, comme d est à e.

Demonstration des proprietez de ces Ovales touchant les reflexions & refractions.

FIG. 179. 74.

* *Part. 3. Sect. 2. Art. 3. n. 3.*

** *Part. 3. Sect. 2. Art. 3. n. 3.*

Les triangles rectangles PQF, & CMF sont semblables; d'où il suit que CF est à CM, comme FP est à PQ; & par consequent que FP étant multipliée par CM, & divisée par CF, est égale à PQ. Tout de même les triangles rectangles PNG & CMG sont semblables; d'où il suit que GP multipliée par GM & divisée par CG est égale à PN. Puis à cause que les multiplications ou divisions, qui se font de deux quantitez par une même, ne change point la proportion qui est entr'elles; si FP multipliée par CM & divisée par FC, est à GP multipliée aussi par CM & divisée par CG, comme d est à e, en divisant l'une & l'autre de ces deux

ſommes par CM, puis les multipliant toutes deux par CF, & derechef par CG; il reſte FP multipliée par CG, qui doit être à GP multipliée par CF, comme d eſt à e.

Or par la conſtruction FP eſt $c \frac{+bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, ou bien $FP = \frac{bcdd+ccdd+bddz+cddz}{bde+cdd+ddz-eez}$; & GC eſt $b - \frac{e}{d}z$; ſi bien que multipliant FP par CG, il vient $\frac{bbcdd+bccdd+bbddz+bcddz-bcdez-ccdez-bdezz+cdezz}{bde+cdd+ddz-eez}$. Puis GP eſt $b \frac{-bcdd+bcde-bddz-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, ou bien $GP = \frac{bbde+bcde-beez-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$; & CF eſt $c+z$; ſi bien que multipliant GP par CF, il vient $\frac{bbcde+bccde-bceez-cceez+bbdez+bcdez-beezz-ceezz}{bde+cdd+ddz-eez}$.

Et pourceque la premiere de ces ſommes diviſée par d, eſt la même que la ſeconde diviſée par e, il eſt manifeſte que FP multipliée par CG eſt à GP multipliée par CF; c'eſt-à-dire que PQ eſt à PN, comme d eſt à e, qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

Et ſachez que cette même démonſtration s'étend à tout ce qui a été dit des autres refractions, ou reflexions qui ſe font dans les Ovales propoſées; ſans qu'il y faille changer aucune choſe, que les ſignes + & — du calcul. C'eſt pourquoi chacun les peut aiſément examiner de ſoi-même, ſans qu'il ſoit beſoin que je m'y arrête.

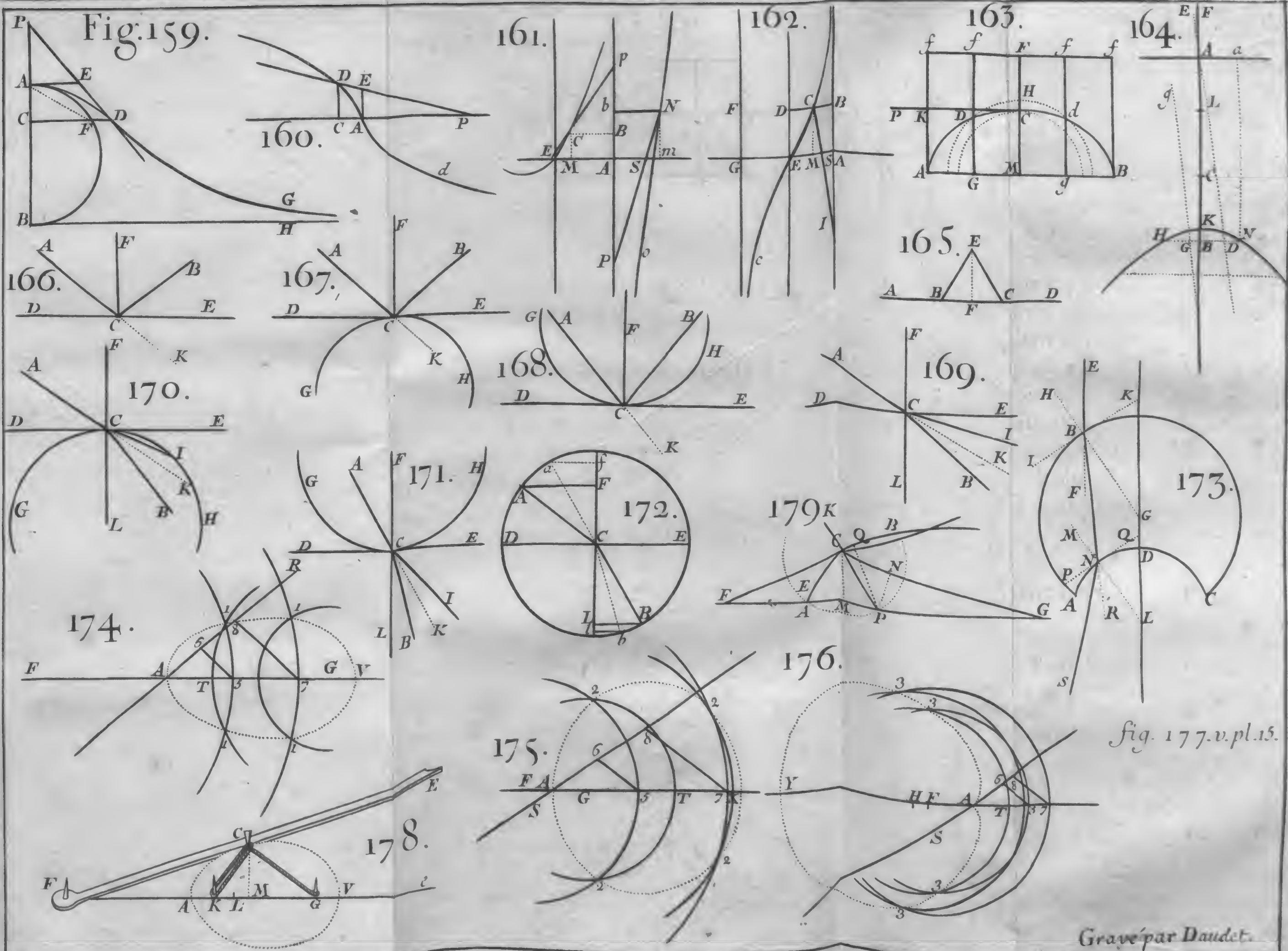
ARTICLE I.

Les proprietez du premier genre d'Ovales.

I.

FIG. 150. 179 174. IL faut faire voir d'abord, que l'Ovale de Figure 179. ou 150. dans laquelle M. DESCARTES fait la démonſtration, qui convient au premier genre d'Ovales, eſt la même que celle de Fig. 174.

Voyez la Figure 150. Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 4. dont la nature eſt, que l'excez dont FC ſurpaſſe FA, ſoit à l'excez dont GA ſurpaſſe GC, comme d eſt à e. Il faut obſerver que d & e expriment ici la proportion, qui eſt dans la refraction des rayons, qui viennent de l'air dans le verre, entre le ſinus de l'angle d'inclinaiſon & le ſinus de l'angle rompu, vous trouverez là $AF = c$; $AG = b$; l'excez dont CF ſurpaſſe $FA = z$; l'excez dont GA ſurpaſſe $GC = b - \frac{e}{d}z$; $CM = x$; $AM = y$; $FM = c + y$; $GM = b - y$. Au point C pris à volonté l'on tire PC perpendiculaire ſur la courbe; pour cela il faut connoître AP, v. M. DESCARTES ſe contente en cet endroit-là de former l'équation zz



Gravé par Daudet.

$$\frac{+2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-cddss+cddvv}{bdd+cee+eev-ddv}=0.$$

De cette équation il faut ensuite Art. 3. n. 3. cette valeur de AP, $v = \frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$.

Pour la Figure 174. M. DESCARTES vient d'en donner la description Sect. 2. cette description demande que $A5$ soit à $A6$, comme d est à e; & parceque les lignes 56, 78 sont paralleles, les triangles $A56$, $A78$ sont équiangles, & donnent cette proportion $A5 : A6 :: A7 : A8$. Ainsi $A7 : A8 :: d : e$. Ce que l'on peut dire par consequent de toutes les autres semblables lignes, qui doivent servir à trouver les differens points de la Figure 174. dans laquelle supposons les droites $F1$, $G1$ tirées; & que RA est égale à GA, $G1$ égale à $R6$, ainsi que la même description le demande.

Maintenant $F1$ est égale à $F5$, puisque ce sont les rayons d'un même cercle; mais $A5$ est l'excez de $F5$ sur FA: donc $A5$ est l'excez de $F1$ sur FA. De plus GA est égale à RA, & $R6$ égale à $G1$ ou GT, parceque $G1$, GT sont rayons du même cercle; mais $A6$ est l'excez de RA sur $R6$, AT l'excès de GA sur GT ou $G1$: donc AT & $A6$ sont égales. Après cela comme d est à e; de même $A5$ excez de $F5$ ou $F1$ sur FA est à $A6$ ou AT excez de GA sur GT ou $G1$. L'Ovale $A1v$, Fig. 174. a donc la même nature que l'Ovale AEC, Fig. 179. 150. qui est telle que l'excez dont FC surpasse FA est à l'excez dont GA surpasse GC comme d est à e. Ces deux courbes sont donc de même genre, & seront une même Ovale; si dans les deux, $FA = FA$, $GA = GA$, l'angle $RAF =$ l'angle RAF. Ainsi peu importe dans laquelle des deux Ovales on fasse la démonstration.

II.

M. DESCARTES fait donc sa démonstration sur la partie convexe AEC, Fig. 150. ou 179. qui est la même, que la partie convexe $1A1$ de Figure 174.

Il suppose 1° que deux quantitez quelconques a, b, étant multipliées par une troisiéme grandeur quelconque c; les produits ac, bc sont entr'eux, comme les quantitez a, b; c'est à dire que $ac : bc :: a : b$. 2° Que deux quantitez a, b, étant divisées par une troisiéme c; les quotients $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ sont entr'eux comme les quantitez a, b; c'est-à-dire que $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} :: a : b$. 3° Après avoir tiré PN perpendiculaire sur CG, & PQ perpendiculaire sur FC prolongée, s'il est necessaire; il suppose encore Fig. 179. que PQ est le sinus de l'angle d'inclinaison, PN le sinus de l'angle rompu, dans la refraction, que le rayon FC qui est dans l'air, souffre en entrant dans le verre, dont la surface convexe a la Figure AEC. Pour le démontrer, soit, comme on l'a déja dit PCK perpendiculaire sur la courbe AEC; & du point C comme centre, de l'intervale CP, soit décrit le cercle PB. FIG. 179.

FIG. 179. *PC* eſt perpendiculaire ſur la courbe *AEC* ; *FC* eſt le rayon d'incidence ſelon ce qui a été dit Sect. 1. *CG* le rayon rompu ; *FCK* l'angle d'inclinaiſon ; *PCG* l'angle rompu. Mais *FCK* eſt égal à *PCQ*, donc le ſinus de l'angle *PCQ* ſera le ſinus de l'angle d'inclinaiſon *FCK*. D'ailleurs il eſt clair par la definition des ſinus, que dans le cercle, dont *CP* eſt le rayon, la ligne *PQ* eſt le ſinus de l'angle *PCQ*, la ligne *PN* le ſinus de l'angle *PCG* : donc *PQ* eſt le ſinus de l'angle d'inclinaiſon, *PN* le ſinus de l'angle rompu dans la refraction, qui fait que *FC* ſe détourne en *CG*.

C'eſt pourquoi M. Deſcartes démontre ici que *PQ* eſt à *PN*, comme *d* à *e* : d'où il ſuivra que, *d* & *e* exprimant la raiſon que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon garde avec le ſinus de l'angle rompu dans la refraction d'un rayon qui paſſe de l'air dans le verre ; le rayon *FC* qui part du point donné *F*, & qui eſt dans l'air, ſe rompra en *C*, de ſorte qu'il ira au point donné *G*. Voici la démonſtration.

1° Les triangles *PQF*, *CMF* ſont équiangles, donc $CF : CM :: FP : PQ$. & $PQ = \frac{CM \times FP}{CF}$. 2° Les triangles *PNG*, *CMG* ſont auſſi équiangles : donc $GP : PN :: CG : CM$, $PN = \frac{CM \times GP}{CG}$.

3° Comme nous venons de le dire, quelque raiſon qu'il y ait entre les grandeurs $\frac{CM \times FP}{CF}$, $\frac{CM \times GP}{CG}$, elle ne changera point, de quelques multiplications ou diviſions que je me ſerve, pourveu que les deux quantitez ſoient multipliées & diviſées par une même grandeur. Je diviſe donc $\frac{CM \times FP}{CF}$, & $\frac{CM \times GP}{CG}$ par *CM*, les quotiens ſont $\frac{FP}{CF}$, & $\frac{GP}{CG}$ je multiplie $\frac{FP}{CF}$ & $\frac{GP}{CG}$ par *CF* & par *CG*, les produits ſont $CG \times FP$ & $CF \times GP$. Dans toutes ces operations la raiſon entre les termes n'a pas changé : ſi l'on fait donc voir que la raiſon des deux derniers $CG \times FP$, $CF \times GP$ eſt celle de *d* à *e* : on devra conclurre que la raiſon des deux premiers $\frac{CM \times FP}{CF} = PQ$, $\frac{CM \times GP}{CG} = PN$ eſt auſſi comme *d* à *e* : & les ſinus *PQ* de l'angle d'inclinaiſon, *PN* de l'angle rompu auront la raiſon requiſe dans la refraction preſente. 4° C'eſt ce que M. Deſcartes montre clairement par le calcul qui eſt dans ſa Geometrie, où il multiplie la valeur de *FP* par *CG*, & la valeur de *GP* par *CF* ; les deux produits ſont tels, que ſi le premier eſt diviſé par *d*, le ſecond par *e*, les deux quotients ſont entierement la même quantité $\frac{bbcd + bccd - bcez - ccez + bbdz + bcdz - bezz - cezz}{bde + cdd + ddz - eez}$. D'où il ſuit que les deux produits $FP \times CG$, $GP \times CF$ ſont entr'eux comme *d* à *e*. Car ſoient les deux quantitez $\frac{abd}{c}$, $\frac{abe}{c}$

telles que la premiere étant divisée par d, la seconde par e, leur quotient Fig. 179.
commun soit $\frac{ab}{c}$; elles sont entr'elles comme d à e, c'est-à dire $\frac{abd}{c} \cdot \frac{abe}{c} :: d : e$, parceque le produit des extrêmes $\frac{abde}{c}$ est égal au produit $\frac{abde}{c}$ des moyennes.

Mais le calcul rendra peut-être cet endroit plus clair. Dans les triangles PQF, CMF vous avez cette proportion CF, $c + z : CM$, $x :: FP$, $\frac{bcdd + ccdd + bddz - cddz}{bde + cdd + ddz - eez} : PQ = x \times \overline{\frac{bcdd + ccdd + bddz - cddz}{bde + cdd + ddz - eez}} \backslash \overline{c + z}$.
Dans les triangles PNG, CMG vous avez celle-ci CG, $b - \frac{e}{d}z : CM$, $x :: GP$, $\frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez} : PN = x \times \overline{\frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}} \backslash \overline{b - \frac{e}{d}z}$.

A present divisez ces valeurs de PQ, PN, chacune par CM, x, comme le dit M. Descartes ; multipliez-les aussi, quoique M. Descartes ne le dise pas, par leur denominateur commun $bde + cdd + ddz - eez$: ce qui restera de la valeur de PQ, est $\overline{bcdd + ccdd + bddz - cddz} \backslash \overline{c + z}$, ce qui restera de la valeur de PN, est $\overline{bbde + bcde - beez - ceez} \backslash \overline{b - \frac{e}{d}z}$. Multipliez ces restes chacun par CF, $c + z$, & par CG ; $b - \frac{e}{d}z$, comme M. Descartes l'ordonne : il restera de la valeur de PQ, $bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz$; & de la valeur de PN, $bbcde + bccde + bbdez + bcdez - bceez - cceez - beezz - ceezz$. Or la premiere de ces quantitez est à la seconde comme d à e, puisque si vous multipliez la premiere par e, & la seconde par d, vous trouvez le même produit.

III.

Enfin puisque PQ sinus de l'angle PCQ ou de l'angle d'inclinaison FCK est à PN sinus de l'angle rompu PCG, comme d est à e, qui est la raison, que doivent avoir ces sinus dans la refraction, que souffre un rayon de lumiere, qui passe de l'air dans le verre : il suit que si le rayon FC est dans l'air, & qu'il tombe sur la convexité AEC d'un verre, qui ait la figure du premier genre des Ovales ; ce rayon FC se rompra en CG.

Et parceque le point C a été pris à discretion, on peut dire la même chose de tous les points de la partie convexe AEC Figure 179. ou $1A1$ Fig. 174. De sorte que la proprieté de cette partie convexe est, que tous les rayons de lumiere qui partiront dans l'air du point donné F, & qui tomberont sur un verre poli dont la courbure soit semblable à la convexité AEC, se rompront, pour aller tous se reünir au point donné G.

Et comme la refraction est mutuelle dans les deux mêmes milieux, tous les rayons de lumiere, qui partiront dans le verre du point G, & qui tomberont sur la partie concave AEC pour sortir dans l'air, iront mutuellement, après avoir souffert uue refraction, se reünir tous au point F. Et

FIG. 179. dans ce cas *GC* eſt le rayon d'incidence, *CF* le rayon rompu, *GCP* l'angle d'inclinaiſon, *FCK* l'angle rompu : or la raiſon de *PN* ſinus de l'angle d'inclinaiſon *GCP* eſt à *PQ* ſinus de l'angle *PCQ* ou de l'angle rompu *FCK* : comme *e* eſt à *d* ; telle qu'elle doit être dans la refraction des rayons qui ſortent du verre pour entrer dans l'air.

IV.

Examinons ce qui arrive dans la partie concave *CV*, Fig. 180. qui eſt la même que *1V1*, Fig. 174. M. Deſcartes aſſure que, ſi *FC* eſt le rayon d'incidence, *CV* la ſurface concave d'un miroir fait d'une matiere, qui diminue tellement la force du rayon d'incidence *FC*, que le ſinus de l'angle d'incidence ſoit au ſinus de l'angle reflechi comme *d* à *e*, ou comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction : alors le rayon d'incidence *FC* qui vient d'un point donné *F*, ſe reflechira au point donné *G*, & *CG* ſera le rayon reflechi.

FIG. 180. Tirez *CP* perpendiculaire ſur la courbe *CV*, *PQ* ſur le rayon d'incidence *FC*, *PN* ſur le rayon de reflexion *CG*. Du point *C* comme centre, de l'intervale *CP* décrivez le cercle *PB* ; par la definition du ſinus droit, *PQ* eſt le ſinus de l'angle *FCP*, *PN* le ſinus de l'angle *PCG*, & par la Sect. 1. *FCP* eſt l'angle d'incidence, *PCG* l'angle de reflexion.

Vous démontrerez que Fig. 180. *PQ* eſt à *PN* comme *d* à *e*, de la même maniere que n. 2. on l'a démontré dans la Figure 179. parceque les triangles, qu'il faut conſiderer, ſont les mêmes dans les deux Figures, que toutes les quantitez, qui ſervent au calcul, ſont encore les mêmes ; excepté *PM*, qui Fig. 179. étoit *AP* — *AM*, $v - y$; & qui Fig. 180. eſt *AM* — *AP*, $y - v$. Mais cette difference n'apporte aucun changement, parceque le quarré de $v - y$ & de $y - v$ eſt le même $yy - 2vy + vv$, & que ce n'eſt que de ce quarré dont on a beſoin, pour avoir l'équation de Sect. 2. Art. 1. n. 4. dont on a tiré Art. 3. n. 3. *AP*, $v = \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$.

De ce que *PQ* eſt encore ici à *PN* comme *d* à *e*, ou de ce que le ſinus de l'angle d'incidence *FCP* eſt au ſinus de l'angle reflechi *PCG* dans la reflexion, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction ; il ſuit que ſi *FC* eſt le rayon d'incidence qui eſt dans l'air *VCFGV*, & qu'il tombe ſur la concavité du miroir *CV* composé d'une matiere capable de tellement reflechir les rayons de lumiere que le ſinus de l'angle d'incidence ſoit au ſinus de l'angle reflechi comme *d* à *e* : le rayon *FC* ſe reflechira en *CG*. Et comme le point *C* a été pris à volonté, tous les rayons qui partiront du point donné *F*, ſe reüniront après leur reflexion au point donné *G*.

Et au contraire, ſi la matiere du miroir concave *VC* peut faire que le ſinus de l'angle d'incidence ſoit au ſinus de l'angle reflechi, comme *e* à *d* : il

il suit que tous les rayons qui viendront du point donné G sur la superficie concave CV, se reflechiront & se reüniront tous au point aussi donné F. Car dans ce cas, qui est celui dont M. Descartes parle dans sa Geometrie, GC est le rayon d'incidence, FC le rayon de reflexion; GCP l'angle d'incidence, dont le sinus est PN; PCF l'angle reflechi, dont le sinus est PQ.

Or si PQ est à PN, comme d est à e: reciproquement PN est à PQ, comme e à d.

V.

Cherchons une équation qui exprime le rapport des abscisses AM, y; & des appliquées CM, x entr'elles dans le premier genre d'ovales, afin de connoître de quel degré il est.

Soit Fig. 179. FA, $c = AG = b = 1$. comme il arrive Fig. 178. FC qui étoit Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 4. $c + z$, sera $1 + z$; GC qui étoit $b - \frac{e}{d}z$ sera $1 - \frac{2}{3}z$ en supposant $d = 3$, $e = 2$. Soit encore CM, x; AM, y; FM qui étoit $c + y$, sera $1 + y$; GM qui étoit $b - y$, sera $1 - y$. Fig. 179.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{FM}^2$, $1 + 2z + zz = xx + 1 + 2y + yy$. Extrayons les racines quarrées $1 + z = \sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$, $z = -1 + \sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$; & $zz = 2 + xx + 2y + yy - 2\sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$.

Dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CG}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{GM}^2$, $1 - \frac{4}{3}z + \frac{4}{9}zz = xx + 1 - 2y + yy$; $-3z + zz = \frac{9}{4}xx - \frac{9}{2}y + \frac{9}{4}yy$. Substituons ici la valeur de z & de zz trouvée un peu auparavant, l'équation sera $\frac{5}{4}xx - \frac{13}{2}y + \frac{5}{4}yy - 5 = -5\sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$; $xx - \frac{26}{5}y + yy - 4 = -4\sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$. Quarrons les deux membres, & nous trouverons $y^4 - \frac{52}{5}y^3 + \frac{76}{25}yy + 2xxyy + \frac{48}{5}y - \frac{52}{5}xxy - 24xx + x^4 = 0$. Ainsi le premier genre d'Ovales est du quatriéme degré.

VI.

Il nous faut examiner à present, de quelle maniere M. DESCARTES a déterminé la description de l'Ovale du premier genre, Fig. 178. en supposant $AF = AG$, Sect. 2. n. 2. & en se servant d'une corde. Fig. 178.

Comme le foyer F est au dehors, & le foyer G au dedans de l'Ovale; on peut penser d'abord, qu'elle peut se décrire d'une maniere semblable à celle, dont l'hyperbole, qui a ses foyers ainsi disposez, a été décrite dans * la Dioptrique de M. Descartes. C'est pourquoi mettons deux piquets F, G sur l'axe FG, autour du pole F faisons tourner la Regle FE, l'un des bouts de la corde étant attaché à son extrêmité E, & l'autre au piquet G. Mais si la corde est plus courte que la Regle, on décrit une hyperbole; si elle lui est égale, on décrit une ligne droite; comme le dit M. Descar-

* *Discours 8.*

FIG. 178. tes au même endroit : il faut donc que la corde soit ici plus longue que la Regle. Il faut considerer ensuite, que si l'on ne se sert que des deux piquets F, G, & que pour commencer à décrire la courbe ACV, on mette la Regle FE sur l'axe FG ; le poinçon ou le doigt C marquera le point A, & la courbe sera là fermée : mais ensuite elle ira toûjours en s'élargissant. Il faut donc un troisiéme piquet K, autour duquel la corde se replie ; de sorte que après qu'une partie de la courbe sera décrite, le double CK de la corde augmentant, les restes CE, CG diminuant toûjours, la Regle soit contrainte de retomber sur l'axe FG : ce qui fera que la courbe sera encore, comme elle doit l'être, fermée en V.

Enfin mettant $FA = AG$, le point A pour l'un des sommets, & supposant que ACV est une Ovale du premier genre, il reste à déterminer le point K, c'est-à-dire la longueur de FK, ou de AK, ou de GK.

Pour cela on choisira la position, où la Regle FE touche l'Ovale ACV, ce qui arrive une fois pendant que la moitié superieure ACV se décrit : or dans cette position il est certain Art. 2. Sect. 2. Part. 3. que l'abscisse AM, & l'appliquée CM ont deux valeurs égales, & que l'équation aura deux racines égales au point C. Supposé que ce soit à ce point, que la Regle FE soit touchante.

Nommons comme Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 4. CM, x ; AM, y ; CG, $b - \frac{e}{d}z$, & parceque M. Descartes suppose $FA = GA$, nommons les b ; ainsi CF, qui étoit $c + z$, sera $b + z$, FM sera $b + y$; GM, $b - y$. Ensuite nommons AK, n ; $KM = AM - AK$, $y - n$; la longueur de la Regle FE, f ; la ligne droite CK, p ; & les parties CK de la corde $2p$. On aura $CE = FE - FC$, $f - b - z$; & toute la corde $= CE + CG + 2CK$, $f - b - z + b - \frac{e}{d}z + 2p = f - z - \frac{e}{d}z + 2p$.

On peut encore avoir une autre valeur de toute la corde, en la considerant dans la situation, où la Regle FE tombe sur l'axe FGV, le point E sur le point e, le point C sur le point A, c'est-à-dire lorsque le poinçon C décrit le sommet A : car alors la corde s'étend de e vers A, de A elle revient vers K, de K elle retourne vers A, & de A elle revient encore vers G.

Ainsi elle est égale à $eA + AK + KA + AG$: mais $AG = AF$, donc la corde est $eA + AF + 2AK$, ou parceque $eA + AF = eF = FE$, la corde est $FE + 2AK$, $f + 2n = f - z - \frac{e}{d}z + 2p$. De ces deux valeurs de toute la corde on tire $p = n + \frac{1}{2}z + \frac{ez}{2d} = CK$.

Maintenant nous avons trois triangles rectangles CMK, CMF, CMG. En premier lieu les triangles CMK, CMF donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2$, $xx = pp + 2ny - nn = zz + 2bz - 2by$. Pour pp substituons sa valeur l'équation se reduira à $\frac{3}{4}zz - \frac{ezz}{2d} - \frac{eezz}{4dd} + 2bz - nz - \frac{enz}{d} - 2by - 2ny = 0$. Multipliez tout par $4dd$, divisez par

$3dd - 2de - ee$, il viendra $zz \frac{\pm 8bddz - 4ddnz - 4denz - 8bddy - 8ddny}{3dd - 2de - ee} = 0$. Après quoi ſuivant la Methode de Part. 3. Sect. 2. Art. 3. Fig. 178.
prenez $z = g$, $z - g = 0$, $zz - 2gz + gg = 0$; & comparez le ſecond terme de cette équation avec le ſecond de la precedente, pour g mettez z qui lui eſt égale, vous aurez $z = \frac{4bdd - 2ddn - 2den}{2de + ee - 3dd}$. On prend ici la valeur de z, afin de la comparer avec une autre valeur de z, que l'on va trouver; & alors il ne reſtera que n d'inconnuë.

En ſecond lieu les triangles CKM, CMG donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$; $xx = pp + 2ny - nn = \frac{eezz}{dd} - \frac{2bez}{d} + 2by$. Mettez pour pp ſa valeur, vous ferez $\frac{1}{4}zz + \frac{ezz}{2d} - \frac{3eezz}{4dd} + \frac{2bez}{d} + nz + \frac{enz}{d} + 2ny - 2by = 0$. Multipliez tout par $4dd$, diviſez tout par $dd + 2de - 3ce$, il y aura $zz \frac{\pm 8bdez + 4ddnz + 4denz + 8ddny - 8bddy}{dd + 2de - 3ee} = 0$. Prenez encore $zz - 2gz + gg = 0$, & les ſeconds termes, qui doivent être comparez donneront $z = \frac{4bde + 2ddn + 2den}{3ee - dd - 2de}$.

Vous avez donc deux valeurs de z, & en les comparant enſemble vous trouverez $n = \frac{bd - be}{2d + 2e} = AK$.

On peut donc d'abord déterminer le point K, en faiſant, $2d + 2e : b :: d - e : \frac{bd - be}{2d + 2e} = AK$. Enſuite FK eſt $FA + AK$, $b + \frac{bd - be}{2d + 2e}$; $GK = GA - AK$, $b - \frac{bd + be}{2d + 2e}$, ces deux valeurs de FK & GK ſe reduiſent à $3d + e$, $d + 3e$. Ainſi, comme on l'a montré n. 2. $FK : GK :: 3d + e : d + 3e$; c'eſt pourquoi ſi l'on partageoit FG, $2b$ en deux parties, de ſorte que celle qui commenceroit en F fût à l'autre comme $3d + e$ eſt à $d + 3e$, le point de la diviſion ſeroit encore le point cherché K.

De plus FK eſt $\frac{3bd + be}{2d + 2e}$, FG eſt $2b = \frac{4bd + 4be}{2d + 2e}$, ces deux valeurs ſe reduiſent à $3d + e$, $4d + 4e$. Si l'on fait donc $4d + 4e : 3d + e :: FG : FK$, on fixera encore le point K. Après cela il faut diviſer FG en L, de ſorte que $FL : LG : d : e$, Nommez FL, v; LG ſera $FG - FL$, $2b - v$; & la ſuppoſition donne, $FL, v : LG, 2b - v :: d : e$; $v = \frac{2bd}{d + e} = FL$, ce qui fournit cette Analogie, $d + e : d :: FG, 2b : FL = \frac{2bd}{d + e}$, ce qui détermine le point L. Après quoi ſi vous faites reflexion, que ſi de FL, $\frac{2bd}{d + e}$ vous ſouſtrayez FA, b; le reſte AL eſt $\frac{bd - be}{d + e}$, qui eſt double de AK, $\frac{bd - be}{2d + 2e}$: vous comprendrez donc pourquoi M. Deſcartes dans la deſcription qu'il donne de l'Ovale ACV avec une corde, ordonne de diviſer FG en L de ſorte que FL ſoit à LG, comme d eſt à e; de diviſer enſuite AL en deux parties égales au point K, & de faire tourner la corde autour du point K.

On peut auſſi à preſent rendre raiſon, pourquoi M. Deſcartes dit que toute la corde eſt $GA + AL + FE - AF$. Car puiſque Fig. 178. FA & GA ſont ſuppoſées égales, toute la corde eſt $AL + FE$, ou $AL + Fe$; parcequ'on ſuppoſe $Fe = FE$; ou $2AK + Fe$, parceque AL eſt double de AK; ou $2AK + eA + AG$, parceque $eA + AG$ eſt égale à $eA + AF$, ou à eF.

Or on a déja fait voir, que la Regle FE étant dans la position Fe, & sur l'axe FGV, le point C & le stilet C sont sur A; & qu'alors la corde va de e en A, de A en K, de K en A, de A en G; & que par consequent elle est $eA + 2AK + AG$.

On trouvera de la même façon ce point K, quelque raison que AF ait avec AG; comme si elle étoit, double, soudouble, triple, &c. Mais la raison de AL à AK changera à mesure qu'on trouvera differentes valeurs de FL, AL, AK, &c. Si en conservant la même longueur de la corde, on faisoit tourner la Regle autour du point A, & que FA fût nulle, on trouveroit pour AK une valeur negative, qui marqueroit, que le point K seroit au dehors de l'Ovale du côté de F.

VII.

Fig. 180. 181. 182. 183. 184. 1° Vous avez Fig. 180. 181. 182. 183. 184. differentes Ovales du premier genre. L'Ovale de Fig. 180. suppose la raison de $A5$ à $A6$, & celle de FA à AG, telles qu'elles sont Fig. 179. 174. 150. de M. Descartes. L'Ovale de Fig. 181. suppose $AF = AG$, & $A5 : A6 :: 3 : 2$. L'Ovale de Fig. 182. suppose $AF = \frac{1}{2} AG$, & $A5 : A6 :: 2 : 1$. L'Ovale de Fig. 183. suppose $AF = 2AG$, & $A5 : A6 :: 2 : 1$. L'Ovale de Fig. 184. suppose le point F sur le point A, & $A5 : A6 :: 3 : 2$. ou $d : e$. Dans cette derniere espece d'Ovales les rayons ne partent que des points A, G; ainsi aucun ne tombe sur la convexité AC; & l'Ovale n'est pas propre à la refraction; mais à la reflexion seulement, ou des rayons qui partent du point donné A pour se reflechir en G, ou de ceux qui partent du point G pour se reflechir au point A, après être tombez sur la concavité ACV. L'on demande que le miroir soit de même matiere que ceux de Fig. 180. Voici l'équation de l'Ovale, Fig. 184.

Puisque AF est nulle, l'excez de FC sur FA est FC, z; GC, v; & l'on aura GC, en faisant $d : e :: z : GF - GC$, $b - v$; & $v = b - \frac{ez}{d} = GC$. L'on fera $CM = x$; $FM = y$; $GA = b$; $GM = b - y$. Maintenant les triangles rectangles CMF, CMG donnent $\overline{FC}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{CM}^2$, $zz = yy + xx$; & $\overline{GC}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{CM}^2$, $bb - \frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} = bb - 2by + yy + xx$. Mettons dans cette derniere équation la valeur de z & de zz tirée de la premiere équation, & nous ferons $yy - \frac{eeyy}{dd} - 2by + xx - \frac{eexx}{dd} = -\frac{2be}{d}\sqrt{yy + xx}$. Dont les quarrez donneront une équation du quatriéme degré comme n. 5.

Fig. 185. 2° Lorsque $A5 = A6$, Fig. 185. on décrit une ligne droite AV. Car par la description du premier genre d'Ovales, $AR = AG$; par la supposition $A6 = A5$; donc $R6 = G5$. Donc le cercle $5\ 6$ décrit du centre F sera touché au point 5 par le cercle décrit du centre G & du rayon $R6 = G5$. Ainsi tous ces points d'attouchement composeront la droite AV.

Que si $A6$ est plus grande que $A5$, $R6$ sera plus petite que $G5$, & le cercle décrit du centre G, du rayon $R6$ ne touchera pas même le cercle décrit du centre F, & il ne se décrira aucune ligne,

ARTICLE II.

Les proprietez du second genre d'Ovales.

Nous suivrons l'ordre qui a été gardé pour le premier genre d'Ovales.

I.

VOyez la maniere de décrire le second genre d'ovales, Fig. 175. dans Fig.
la Section II. Supposez les lignes droites $F2$, $G2$ tirées. $F5$, $F2$ sont 175.
égales; GT, $G2$ sont aussi rayons du même cercle, lequel rayon a été 186.
pris égal à $S6$. Nommons FA, c; AG, $b = AS$; $A5$, z qui est l'excez dont $F5$ ou $F2$ surpasse FA. Ainsi $F5 = FA + A5$, $c + z = F2$. 187.
Nous avons $d : e :: A5, z : A6, \frac{ez}{d}$; & $S6 = SA + A6$, $b + \frac{ez}{d} = G2$; & $A6 = \frac{ez}{d}$ est l'excez dont $S6$ ou $G2$ surpasse SA ou GA. Et la proprieté du second genre d'Ovales, est que z excez dont $F2$ surpasse FA est à $\frac{ez}{d}$ excez dont $G2$ surpasse GA, comme d est à e, puisque $\frac{dez}{d} = ez$. Dans la Figure 175. on suppose que la raison de d à e est celle du sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui entre de l'air dans le verre.

Les Figures 186. 187. sont aussi du second genre, car elles ont été décrites en supposant que comme d est à e, ainsi l'excez dont FC surpasse FA est à l'excez dont GC surpasse GA. C'est pourquoi si l'on nomme FA, c; GA, b; l'excez dont FC surpasse FA, z; l'on aura FC, $c + z$, & de plus $d : e :: z : \frac{ez}{d}$ excez dont GC surpasse GA, & GC sera $GA + \frac{ez}{d} = b + \frac{ez}{d}$. Et les points C, C des Figures 186. 187. répondent aux points 2, 2 de Fig. 175.

Au point C Fig. 186. pris à volonté tirez KCP perpendiculaire à la courbe AC; du même point C abbaissez CM perpendiculaire sur AX. Nommez CM, x; AM, y; AP, v; CP, s. Vous aurez $FM = FA + AM$, $c + y$; $MG = GA - AM$, $b - y$; $MP = AP - AM$, $v - y$; $FP = FA + AP$, $c + v$; $GP = AP - AG$, $v - b$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2$, $xx = zz + 2cz - 2cy - yy$. Dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$, $xx = \frac{eezz}{dd} + \frac{2bez}{d} + 2by - yy$. Donc $2by + 2cy = zz + 2cz - \frac{eezz}{dd} - \frac{2bez}{d}$; $y = \frac{ddzz + 2cddz - eezz - 2bdez}{2bdd + 2cdd}$. Mettez cette valeur de y dans l'équation $zz + 2cz - 2cy - yy = xx$, vous ferez: $\frac{bddzz + 2bcddz + ceezz + 2bcdez}{bdd + cdd} - yy = xx$. premiere valeur de xx.

Ensuite dans le triangle rectangle CMP, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ss -$

$vv + 2vy - yy = xx$. Subſtituez encore pour y ſa valeur trouvée un peu auparavant, vous aurez une ſeconde valeur de xx que vous comparerez avec la premiere, & vous arrangerez tous les termes des deux équations du même côté de cette maniere $zz \frac{+ 2cddvz - 2bdevz - 2bcddz - 2bcdez + bddff + cddff - bddvv - cddvv}{ddv - eev - bdd - cee} = 0$.

Comparez encore le ſecond terme de cette équation avec le ſecond terme de l'équation $zz - 2fz + ff = 0$; mettez z pour f, & vous trouverez $v = \frac{bcdd + bcde + bddz + ceez}{cdd - bde + ddz - eez}$.

I I.

Nous ferons la démonſtration ſur la partie convexe AC de Fig. 186. qui

FIG. 186. eſt la même que la partie convexe $A2$ de Fig. 175.

On ſuppoſe ici tout ce qui eſt au commencement de n. 2. Art. 1. On démontrera comme là, 1° que $PQ = \frac{CM \times FP}{CF}$; 2° que $PN = \frac{CM \times GP}{CG}$ dans les triangles équiangles PNG, CMG, qui ont les angles PNG, CMG droits, & les angles PGN, CGM égaux; 3° que PQ eſt à PN comme d à e, ſi $GC \times FP$ eſt à $CF \times GP$ comme d à e. 4° C'eſt ce qui ſe prouve ainſi, FP eſt $c + v$, GC eſt $b + \frac{ez}{d}$ on aura donc aiſément la valeur de $FP \times CG$; GP eſt $v - b$, CF eſt $c + z$, on aura donc également la valeur de $GP \times CF$. Or la valeur de $FP \times CG$ étant diviſée par d, & la valeur de $GP \times CF$ étant diviſée par e, les deux quotiens ſont parfaitement la même quantité $\frac{bbcd + bbdz + becd + bcdz + bcez + bezz + ccez + cezz}{cdd - bde + ddz - eez}$. Donc $d : e :: FP \times CG : GP \times CF :: PQ : PN$.

I I I.

De là il ſuit, que ſi l'on fait un miroir concave AC d'une matiere, qui reflêchiſſe tellement les rayons de lumiere, que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon ſoit au ſinus de l'angle reflêchi, comme e eſt à d; & que GC ſoit un rayon d'incidence ſur ce miroir, GCP l'angle d'inclinaiſon, dont PN eſt le ſinus: il ſuit, dis-je, que CQ ſera le rayon reflêchi, PCQ l'angle reflêchi, dont PQ eſt le ſinus, car on aura $e : d :: PN : PQ$. Ainſi comme la droite CQ n'eſt autre choſe, que la droite FC prolongée; le rayon GC tombant ſur le miroir concave AC, ſe reflêchira en CQ, de ſorte que ce rayon reflêchi ſemblera venir du point F, c'eſt ce que M. DESCARTES aſſure dans ſa Geometrie.

Au contraire ſi la matiere du miroir concave AC reflechiſſoit tellement les rayons de lumiere, que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon fût au ſinus de l'angle reflêchi, comme d à e: le rayon QC tombant ſur ce miroir, ſe reflêchiroit en G: mais la ſurface convexe ne peut point ſervir à la refrac-

tion telle, qu'on la cherche ici, où l'on veut que le rayon d'incidence *FC* qui eſt dans l'air, & qui vient du point donné *F*, ſe rompe tellement au point *C* en entrant dans le verre, qu'il aille au point donné *G*. En effet *FC* doit par la refraction, qu'il ſouffre au point *C*, s'approcher de la perpendiculaire *CP*, & demeurer dans l'angle *PCQ*; il n'ira donc jamais par la ligne *CG*.

I V.

Venons à la partie *XC*, Fig. 187. qui eſt la même que la partie *X2*, Fig. 175. M. DESCARTES dit qu'elle ſert aux refractions, & que les rayons, qui étant dans l'air comme *LC*, tendent vers *F*, ſe détournent vers *G* en traverſant la ſuperficie convexe *XC*. FIG. 187.

Menez *PCK* perpendiculaire ſur la courbe *XC*, *PQ* ſur le rayon d'incidence *LCF*, *PN* ſur le rayon rompu *CG*. Par la Sect. 1. *LCK* eſt l'angle d'inclinaiſon, égal à l'angle *PCF*; *PCG* eſt l'angle rompu : & par la définition du ſinus droit, *PQ* eſt le ſinus de l'angle *PCF*, ou de ſon égal *LCK* angle d'inclinaiſon; *PN* eſt le ſinus de l'angle rompu *PCG*. Ce qui ſe connoît, après avoir décrit l'arc *PB* du centre *C*, & du rayon *CP*.

Vous démontrerez que Fig. 187. comme Fig, 186. n. 2. $PQ : PN :: d : e$. Car les mêmes triangles ſont encore ici ſemblables, & les quantitez, qui ſervent au calcul, ſont auſſi les mêmes : excepté que *GM*, qui étoit $b - y$, eſt ici $AM - AG$, $y - b$; & *PM*, qui étoit $v - y$, eſt ici $AM - AP$, $y - v$. Mais parceque ces diverſes quantitez ont les mêmes quarrez, il n'y a aucune difference dans le calcul.

C'eſt pourquoi, puiſque comme $d : e :: PQ : PN$; & que la raiſon de *d* à *e* exprime celle que doit avoir le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction d'un rayon, qui de l'air entre dans le verre : le rayon d'incidence *LC*, qui eſt dans l'air, & qui tend vers *F*, aura pour angle d'inclinaiſon *LCK*, dont le ſinus eſt *PQ*, pour rayon rompu *CG*, & pour angle rompu *PCG*, dont le ſinus eſt *PN*, afin que les loix de la refraction ſoient gardées.

Et parceque la refraction eſt reciproque, le rayon *GC*, qui viendroit du point *G* dans le verre *XCA*, ſe romproit en ſortant dans l'air, pour aller en *CL*, comme s'il venoit du point *F* en droite ligne. De plus le rayon *IC* qui eſt dans le verre, & qui tend vers *G*, ſe rompra dans l'air en *CF*: parcequ'alors *PN* ſinus de l'angle *PCG*, ou de l'angle d'inclinaiſon *ICK* eſt à *PQ* ſinus de l'angle rompu *PCF*; comme *e* à *d*; comme il doit arriver lorſque le rayon paſſe du verre dans l'air.

Et reciproquement le rayon *FC* qui eſt dans l'air, ſe rompra en *CI* dans le verre, comme s'il venoit du point *G*.

Maintenant que le miroir concave *XC* ſoit d'une matiere, qui reflêchiſſe les rayons de lumiere, de ſorte que la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinai-

ſon au ſinus de l'angle reflêchi ſoit celle de d à e : le rayon FC, qui ſeroit tout dans l'air, ou tout dans le verre, & qui tomberoit ſur ce miroir XC, ſe reflêchiroit en CG. Car en ce cas FC eſt le rayon d'incidence, CG le rayon reflêchi, FCP l'angle d'incidence, dont ſe ſinus eſt PQ; GCP l'angle reflêchi, dont PN eſt le ſinus.

V.

En ſuivant n. 5. Art. 1. vous trouverez que l'Ovale AC Fig. 187. eſt du quatriéme degré. Les triangles & les valeurs des quantitez dont on ſe ſert, ſont les mêmes, excepté que CG eſt ici $b + \frac{ez}{d}$; étant $AG = AF = 1$, $d = 3$; $e = 2$. L'équation eſt $y^4 - \frac{52}{5}y^3 + 28yy + 2xxyy - \frac{48}{5}y - \frac{52}{5}xxy + \frac{24}{25}xx + x^4 = 0$.

VI.

On n'a auſſi qu'à ſuivre n. 6. Art. 1. pour trouver une maniere de dé-
Fig. 186. crire l'Ovale du ſecond genre. La Regle FE, Fig. 186. tourne auſſi autour du point donné F, la corde eſt attachée à l'extrêmité E de la Regle, & au point donné G; & elle ſe replie autour du point K. La longueur de la Regle eſt arbitraire, la longueur de la corde eſt $EF - AF + 2AK + AG$. Si l'on ſuppoſe $AF = AG$, on déterminera le point K, en faiſant $AK = \frac{bd^3 + bdde - bdee - be^3}{2d^3 - 2dde - 2dee + 2e^3}$.

VII.

1°. Dans ce genre d'Ovales, AG eſt b, GC eſt $b + \frac{ez}{d}$; ainſi GC eſt toûjours plus grande que GA; ce qui fait, que le point A rentre : il rentre ſenſiblement, lorſque AG eſt beaucoup plus grande que AF, & encore plus lorſque les points A, F ſont l'un ſur l'autre. Ce qui donne à l'Ovale une figure de cœur, comme Fig. 188. dans laquelle on trouve les mêmes reflexions & les mêmes refractions que Fig. 186. 187.

Fig. 189. 2°. Si la raiſon de AF à AG, Fig. 189. eſt la même que celle de $A5$ à $A6$ ou ſi AF eſt d, AG, e; au lieu d'une Ovale on décrira un cercle. Ce qui ſe démontre de cette façon.

FC ſera $d + z$; GC, $e + \frac{ez}{d}$; CM, x; AM, y; $FM = FA + AM$, $d + y$; $GM = AM - AG$, $y - e$.

Dans les triangles rectangles FCM, $\overline{FC}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{CM}^2$, $dd + 2dz + zz = dd + 2dy + yy + xx$; $z = -d + \sqrt{dd + 2dy + yy + xx}$, $zz = 2dd + 2dy + yy + xx - 2d\sqrt{dd + 2dy + yy + xx}$.

Dans le triangle rectangle GCM, $\overline{GC}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{CM}^2$, $\frac{eezz}{dd} + \frac{2eez}{d} = yy - 2ey + xx$. Subſtituez à la place de zz & de z leur valeur, qu'on vient de trouver; il viendra $yy \frac{-2ddey - 2deey}{dd - ee} = -xx$, équation à un cercle, dont le rayon eſt $\frac{dde + dee}{dd - ee}$, comme on le connoîtra par la reduction, dont on ſe ſert dans les lieux Geometriques.

Dans

Dans le cercle on trouvera les mêmes reflexions & les mêmes refractions que n. 3. 4. Bien plus, comme tous les cercles ont les mêmes proprietez, ils auront tous deux points sur leurs diametres, dont les effets seront les mêmes, que ceux des points *F*, *G* de Fig. 189. pourveu que ces points ayent le même rapport avec le rayon. Soit donc *f* le rayon d'un cercle quelconque, & faisons comme $\frac{dde+dee}{dd-ee}$ rayon du cercle de Fig. 189. est à *f* rayon d'un autre cercle : ainsi *AF*, *d* pris sur le diametre de Fig. 189. est à $\frac{ddf-eef}{dd+ee} = AF$ qui doit être pris sur le rayon du nouveau cercle. Et comme $\frac{dde+dee}{dd-ee}$ rayon du cercle de Fig. 189. est à *f* rayon de cet autre cercle : ainsi *AG*, *e* pris sur le diametre de Fig. 189. est à $\frac{ddf-eef}{dd+de} = AG$ qui doit être pris sur le diametre du nouveau cercle. C'est pourquoi dans quelque cercle que ce soit, si l'on prend sur son diametre $AF = \frac{ddf-eef}{de+ee}$, $AG = \frac{ddf-eef}{dd+de}$; les points *F* & *G* ainsi déterminez auront les mêmes proprietez par rapport à la reflexion & à la refraction, que les points *F*, *G* de Fig. 189.

3°. Lorsque Fig. 190. $A5 = A6$, & que *AF* n'est pas égale à *AG*; au lieu d'une Ovale du second genre, on décrit une hyperbole. Fig. 190.

Soit FA, c; $GA = SA$, b; $A5 = A6$, z; on aura $FC = F5 = FA + A5$, $c+z$; $GC = S6 = SA + A6$, $b+z$. Soit encore CM, x; AM, y; on aura $FM = FA - AM$, $c-y$; $GM = GA + AM$, $b+y$.

Dans les triangles rectangles CMF, CMG, $\overline{FC}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz + 2cy - yy = xx$; & $\overline{GC}^2 - \overline{GM}^2 = \overline{CM}^2$, $2bz + zz - 2by - yy = xx$. Donc $bz - cz = by + cy$; $z = \frac{by+cy}{b-c}$, $y = \frac{bz-cz}{b+c}$. On substituera cette valeur de z & celle de zz dans la premiere équation $2cz + zz + 2cy - yy = xx$; il vient $yy + by - cy = \frac{bbxx - 2bcxx + ccxx}{4bc}$, équation à l'hyperbole rapportée à ses diametres, dont l'axe déterminé LA est $b - c = GA - AF = GA - GL$, ainsi $GL = AF$; le parametre est $\frac{4bc}{b-c}$; les foyers G, & F; les sommets A, L.

Une proprieté de l'hyperbole, c'est que l'axe déterminé LA est égal à $GC - CF$, c'est-à-dire à la difference des lignes GC, FC tirées des foyers à un point quelconque C. En effet $GC - CF = b + z - c - z = b - c = LA$.

Une autre proprieté de l'hyperbole est que Figure 191. un rayon quelconque *NC* qui tombe sur la concavité *CA*, & qui tend au foyer *G*, se reflechit à l'autre foyer *F*. Ce qui doit arriver, si *CP* étant perpendiculaire sur la courbe *AC*, ou sur sa tangente *bCd*, l'angle *NCb* d'incidence est égal à l'angle *FCd* de reflexion ; & ces deux angles seront égaux, si les deux *PCN*, *PCF* le sont. Il faut donc prouver que les angles *PCN*, *PCF* sont égaux, ou ce qui est le même, que leurs sinus *PN*, *PQ* le sont. Fig. 191.

On a trouvé $y = \frac{bz - cz}{b + c}$, il faut mettre cette valeur dans $zz + 2cz$
$+ 2cy - yy = xx$, pour faire $zz \frac{+4bcz}{b+c} - yy = xx$.
On a, comme auparavant, dans le triangle rectangle CMP, $ss - vv$
$+ 2vy - yy = xx$, où l'on mettra aussi la valeur de y, & ce sera
$\frac{bss + css - bvv - cvv + 2bvz - 2cvz}{b + c} - yy = xx$. Il faut comparer ces deux
valeurs de xx, $zz \frac{+4bcz - 2bvz + 2cvz - bss - css + bvv + cvv}{b + c} = 0$; dont
le second terme se comparera avec le second de $zz - 2gz + gg = 0$. &
l'on trouvera AP, $v = \frac{2bc + bz + cz}{b - c}$. Ensuite suivant Art. 1. n. 2. il suffit
de démontrer $CG \times FP = CF \times GP$, pour conclurre $PQ = PN$, pour
cela multipliez CG, $b + z$ par FP, $v - c$ & GP, $v + b$ par CF, $c +$
z, & vous verrez que les deux produits sont composez des mêmes termes
avec les mêmes signes. C'est pourquoi tous les rayons NC qui tombent sur
la superficie convexe AC, & qui tendent au foyer G, se réünissent au
foyer F, & un miroir hyperbolique est un miroir ardent par reflexion.

Fig. 192. 4°. Lorsque Fig. 192. $As = A6$, & $AF = AG = AS$: on a Fs
$= S6$, & par consequent $FC = GC$; & les points F, G sont toûjours
également éloignez des points C, qui composeront la droite AC, laquelle
est perpendiculaire sur FG.

Mais si étant $As = A6$, le point F est le même que le point A, Fig.
Fig. 193. 193. on décrira la droite AI; car c'est sur elle, que se couperont les cercles, dont le centre est F & le rayon FC, avec les cercles dont le centre
est G & le rayon $S6$ ou GI : parceque $A6$ ou AI est l'excez dont $S6$ ou
GI surpasse AG ou AS.

Fig. 174 194. 195. 5°. Après cela posons Fig. 175. As plus petit que $A6$, & que leur raison est celle de e à d; l'Ovale se décrira de l'autre côté de A, & elle renfermera le point F, comme aux Figures 194. 195.

Nommons Figure 175. As, z; FA, c; AG, $b = SA$; nous aurons
$Fs = FA + As$, $c + z = F2 = FC$ de Fig. 194. 195. nous aurons
encore, Fig. 175. $e : d :: As, z : A6, \frac{dz}{e}$, & $S6 = SA + A6$, $b +$
$\frac{dz}{e} = G2 = GC$, Fig. 194. 195. Nommons encore Fig. 194. 195. CM, x;
AM, y; AP, v; PC, s. Nous aurons FM, $c - y$ ou $y - c$; GM, $b +$
y; MP, $v - y$ ou $y - v$; FP, $v - c$; GP, $b + v$. Après avoir tiré les
perpendiculaires PN, PQ, & supposé ce qu'on a dit, Art. 1. n. 2. il reste
à prouver, que $GP \times CF : FP \times GC ::$ ou $PN : PQ :: d : e$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz$
$+ 2cy - yy = xx$. Dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CG}^2 - \overline{GM}^2 =$
$\overline{CM}^2$, $\frac{2bdz}{e} + \frac{ddzz}{ee} - 2by - yy = xx$. Donc $y = \frac{ddzz + 2bdez +}{2bee +}$
$\frac{eezz - 2ceez}{2cee}$. Substituons cette valeur de y à sa place dans $2cz + zz +$
$2cy - yy = xx$, nous ferons $\frac{beezz + 2bceez + cddzz + 2bcdez}{bee + cee} - yy$
$= xx$.

Dans le triangle rectangle CMP, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ss - vv +$

$2vy - yy = xx$. Substituons encore ici la valeur de y, pour avoir $\frac{beeff + ceeff - beevv - ceevv + ddvzz + 2bdevz - eevzz - 2ceevz}{bee + cee} - yy = xx$, comparons ces deux valeurs de xx, & ordonnons ainsi les termes $zz \frac{+ 2bdevz - 2ceevz - 2bceez - 2bcdez + beeff + ceeff - beevv - ceevv}{ddv - eev - bee - cdd} = 0$. Il faut comparer le second terme de cette équation avec le second de $zz - 2gz + gg = 0$. Pour en tirer $v = \frac{beez + cddz + bcee + bcde}{bde - cee + ddz - eez}$.

FP est $v - c$, multipliez par GC, $b + \frac{dz}{e}$; vous aurez $FP \times GC$; GP est $v + b$, multipliez par CF, $c + z$, vous aurez $GP \times CF$.

Si l'on divise $FP \times GC$ par e, & $GP \times CF$ par d, le quotient sera le même : ainsi $FP \times GC$ est à $GP \times CF$, ou PQ est à PN, comme e est à d.

La partie convexe AC, Fig. 194. ne sert pas aux refractions qu'on cherche ici, c'est-à-dire que le rayon GC qui est dans l'air & qui tombe sur le verre AC, ne se rompra pas en F; parceque pour s'approcher de la perpendiculaire PCK, il doit se rompre dans l'angle PCN. Fig. 194.

La partie concave AC serviroit aux reflexions, si elle étoit composée d'une matiere qui fit, que le sinus de l'angle d'inclinaison fût au sinus de l'angle reflechi comme e à d. Car alors le rayon d'incidence FC se reflechiroit en CN, comme s'il venoit du point G. Puisque l'angle d'inclinaison seroit FCP dont le sinus est PQ; & l'angle reflechi seroit PCN, dont le sinus est PN. De même tous les rayons NC, qui tendent vers G, se reflechiroient en CF, si la matiere du miroir donnoit la raison du sinus de l'angle d'inclinaison PCN au sinus de l'angle reflechi PCF, comme d à e.

Mais sa partie concave XC, Figure 195. servira aux refractions. Les rayons IC, qui sont dans l'air & tendent au point donné G, se rompront en entrant dans le verre XC, & iront au point donné F. Car PN sinus de l'angle PCG, ou de l'angle d'inclinaison $ICK = PCG$ est à PQ sinus de l'angle rompu PCF; comme d est à e. Au contraire les rayons LC qui seroient dans le verre ICK & tendroient au point F, se romproient dans l'air XCA, & se réüniroient au point G: parceque PQ sinus de l'angle PCF ou de l'angle d'inclinaison $LCK = PCF$ seroit à PN sinus de l'angle rompu PCG, comme e à d.

Si l'on fait AG, b: AF, c :: $A6 : A5$ :: $d : e$. c'est-à-dire, que AG soit d; FA, e; on décrira un cercle.



ARTICLE III.

Les proprietez du troisiéme genre d'Ovales.

I.

Fig. 176. 196. 197. VOyez Sect. 2. la maniere de décrire le troisiéme genre d'Ovales Fig. 176. concevez les lignes droites $F3$, $H3$ tirées. Les lignes $F5$, $F3$ rayons du même cercle sont égales ; HT, $H3$ aussi rayons du même cercle sont égales entr'elles & à $S6$.

Nommons FA, c ; HA, $b = SA$; $A5$, z qui est l'excez dont $F5$ ou $F3$ surpasse FA ; ainsi $F5 = FA + A5$, $c + z = F3$. De plus $d : e :: A5, z : A6$, $\frac{ez}{d}$ excez dont $S6$ surpasse SA ; ainsi $S6 = SA + A6$, $b + \frac{ez}{d} = HT = H3$. Et la proprieté du troisiéme genre d'Ovales est, que z excez dont $F3$ surpasse FA, soit à $\frac{ez}{d}$ excez dont $H3$ surpasse HA comme d est à e, puisque ez produit des extrêmes est égal à $\frac{dez}{d} = ez$ produit des moyennes.

Les Figures 196. 197. sont aussi des Ovales du troisiéme genre : parce-qu'elles ont été décrites, en faisant que l'excez, dont FC surpasse FA, soit à l'excez, dont HC surpasse HA, comme d à e. Si l'on nomme donc FA, c ; HA, b ; l'excez dont FC surpasse FA, z ; on aura $FC = FA + z = c + z$; on aura encore $d : e :: z : \frac{ez}{d}$ excez dont HC surpasse HA, & HC sera $HA + \frac{ez}{d} = b + \frac{ez}{d}$.

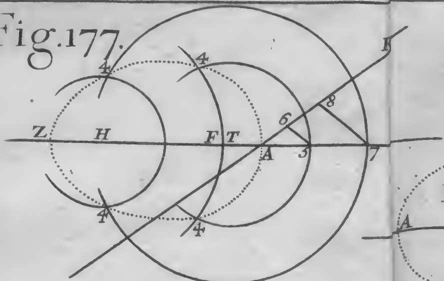
Les points C, c des Fig. 196. 197. répondront aux points 3, 3 de Fig. 176.

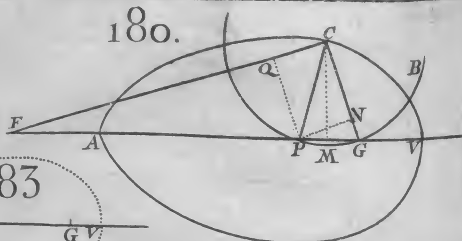
Dans ces trois Figures on suppose que la raison de d à e est celle du sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui de l'air entre dans le verre.

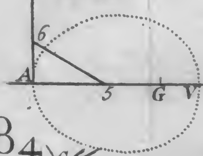
Au point C, Fig. 196. tirez CP perpendiculaire sur YC ; du même point C abaissez la perpendiculaire CM sur AY. Nommez CM, x ; AM, y ; AP, v ; CP, s ; vous aurez FM, $y - c$; HM, $y - b$; MP, $y - v$; FP, $v - c$; HP, $v - b$.

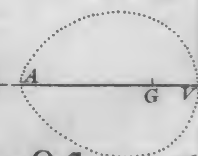
Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz - yy + 2cy = xx$. Dans le triangle rectangle CMH, $\overline{CH}^2 - \overline{MH}^2 = \overline{CM}^2$, $\frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} - yy + 2by = xx$. Donc $2cz + zz + 2cy = \frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} + 2by$; $y = \frac{2cddz + ddzz - 2bdez - eezz}{2bdd - 2cdd}$. Mettez cette valeur de y dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$, vous ferez $\frac{2bcddz + bddzz - 2bcdez - ceezz}{bdd - cdd} - yy = xx$.

Dans le triangle rectangle CMP, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ss - yy + 2vy - vv = xx$. Substituez encore la valeur de y, qui se reduit à $\frac{bddss - bddvv - cddss + cddvv + 2cddvz + ddvzz - 2bdevz - eevzz}{bdd - cdd} - yy = xx$. La comparaison de cette valeur de xx avec la precedente donne

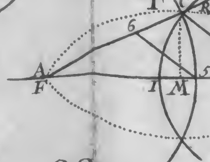


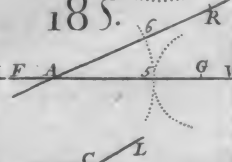


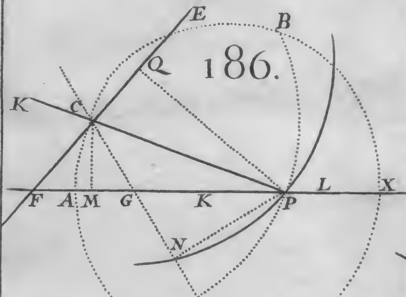


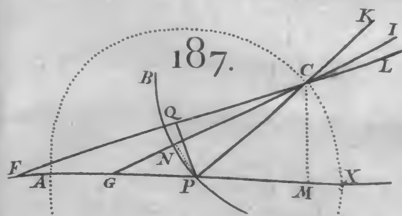


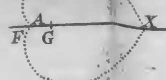


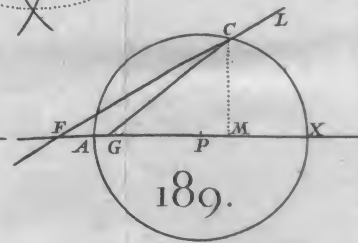


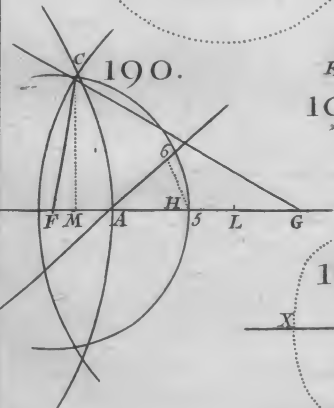


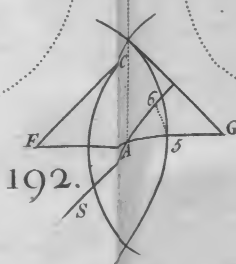


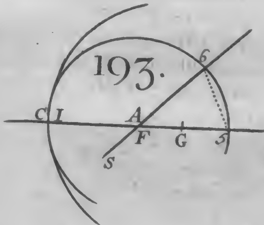


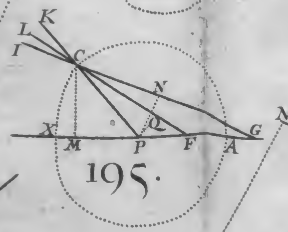


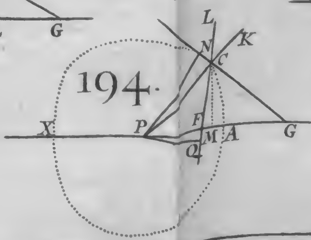


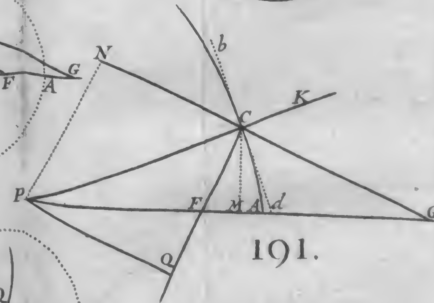


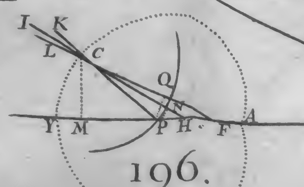












Gravé par Daudet.

$zz \frac{+2cddvz - 2bdevz - 2bcddz + 2bcdez + bddff - bddvv - cddff + cddvv}{ddv - eev - bdd + cee} = 0$. Il faut comparer le ſecond terme de cette équation avec le ſecond de $zz - 2gz + gg = 0$, & il vient $v = \frac{bddz - ceez + bcdd - bcde}{cdd - bde + ddz - eez}$. Ces preparations étant faites, voici la démonſtration.

I I.

On ſuppoſe ici ce qui a été dit au commencement de n. 2. Art. 1. il reſte à faire voir que PQ eſt à PN, Fig. 196. ou que $HC \times FP$ eſt à $CF \times HP$, comme d à e. Fig. 196.

FP eſt $v - c$, HC eſt $b + \frac{ez}{d}$, multipliez les enſemble; HP eſt $v - b$, CF eſt $c + z$, multipliez les encore.

La premiere ſomme $HC \times FP$ étant diviſée par d, donne le même quotient que la ſeconde ſomme $CF \times HP$ étant diviſée par e; donc $d : e :: HC \times FP : CF \times HP :: PQ : PN$.

I I I.

Soit le rayon LC qui tombe de l'air ſur la ſurface convexe de verre YC, de ſorte que s'il ne ſe détournoit pas, il iroit en F: l'angle d'inclinaiſon eſt $LCK = PCF$, dont le ſinus eſt PQ. Or dans la refraction de la lumiere, qui entre de l'air dans le verre, il faut un angle rompu, dont le ſinus ſoit à PQ, comme e eſt à d: & PN ſinus de l'angle PCH eſt tel: donc PCH eſt l'angle rompu de l'angle d'inclinaiſon LCK, & CH le rayon rompu du rayon d'incidence LC; ainſi le rayon LC ira en H: de même tous les autres rayons qui ſont dans l'air, & qui tombent ſur YC; & qui étant prolongez iroient en F, ſe réüniront après la refraction en H.

Mutuellement les rayons HC qui ſont dans le verre, & qui partent du point H, ſe rompront en CL en tombant ſur la ſurface convexe de l'air YC, comme s'ils venoient du point F.

De plus ſuppoſons que l'eſpace LIC eſt du verre, & l'eſpace YCA de l'air.

Le rayon IC qui étant dans le verre tend vers H, ſe rompra ſur la ſurface YC de l'air, pour aller en F.

Mutuellement le rayon FC dans l'air ſe rompra en CI dans le verre, comme s'il venoit du point H.

I V.

Dans l'autre partie AC de l'Ovale: Fig. 197. on trouve les mêmes valeurs des quantitez; excepté que MP, qui étoit $y - v$, eſt $v - y$; MH, qui étoit $y - b$, eſt $b - y$; ce qui n'apporte aucune difference au calcul. Les effets ſont auſſi les mêmes; de ſorte que toutes les Ovales du troiſiéme genre ne ſervent qu'à la refraction de la lumiere. Fig. 197.

V.

Supposons AF, $c = 1 = FH$; AH, $b = 2$; l'equation est $\frac{25}{16}y^4 - \frac{25}{2}y^3 + 23yy + 24y + \frac{25}{2}xxyy - \frac{35}{2}xxy - 6xx + \frac{25}{16}x^4$.

V I.

Si l'on opére comme n. 6. Art. 1. en supposant que la Regle FE, Fig. 197. dont la longueur est arbitraire, tourne autour du point F; que la corde, dont la longueur est $EF - AF + 2AK + AH$, est attachée aux points E, H, & qu'elle se replie autour du point K; & enfin que AH est $2AF$. On trouvera $AK = \frac{bd^3 + 4bdde + bdee - 2be^3}{4d^3 - 4dde - 4dee + 4e^3}$. (Fig. 197.)

La figure d'un cœur n'est jamais plus sensible au point A, que lorsque le point F tombe sur le point A.

Fig. 198 Lorsque la distance FH, Fig. 198. est fort petite, en comparaison de la distance FA, cette Figure paroît moins.

Fig. 199. Lorsque Fig. 199. $A5 = A6$, les cercles décrits des centres F, H se touchent & décrivent une ligne droite $A5$: parceque $S6 = H5$.

Mais dès que $A5$ sera plus petite que $A6$, les cercles ne se toucheront & ne se couperont pas.

ARTICLE IV.

Les proprietez du quatriéme genre d'Ovales.

I.

Fig. 177. 200. 201. VOyez Sect. 2. Fig. 177. la maniere de décrire les Ovales du quatriéme genre. Concevez les lignes droites $F4$, $H4$ tirées. Les lignes $F5$, $F4$ rayons du même cercle sont égales; HT, $H4$ aussi rayons du même cercle sont égales entr'elles & à $R6$. Nommons FA, c; HA, $b = RA$; $A5$, z qui est l'excez dont $F5$ ou $F4$ surpasse FA; ainsi $F5 = FA + A5$ est $c + z$; ensuite $d : e :: A5, z : A6, \frac{ez}{d}$, excez dont RA surpasse $R6$; ainsi $R6 = RA - A6$, $b - \frac{ez}{d} = HT = H4$. Et la proprieté du quatriéme genre est que z excez dont $F4$ surpasse FA soit à $\frac{ez}{d}$ excez dont HA surpasse $H4$, comme d est à e.

Les Ovales, Fig. 200. 201. sont aussi du quatriéme genre, parcequ'elles ont été décrites en supposant que l'excès dont FC surpasse FA, est à l'excès dont HA surpasse HC, comme d est à e. C'est pourquoi si l'on nomme FA, c; HA, b; l'excez dont FC surpasse FA, z; on aura $FC = FA + z = c + z$; on aura aussi $d : e :: z : \frac{ez}{d}$ excès dont HA surpasse HC, & HC sera $HA - \frac{ez}{d} = b - \frac{ez}{d}$. Les points C, C des Figures 200. 201. répondent donc aux points 4, 4 de Figure 177.

On suppose dans ces trois figures que la raison de d à e est la même, que celle du sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui passe de l'air dans le verre.

Du point C, Fig. 200. il faut tirer CP perpendiculaire sur AC, du même point C abbaisser CM perpendiculaire sur AZ; nommer CM, x; AM, y; AP, v; CP, s. On aura FM, $y - c$; HM, $b - y$; MP, $v - y$; FP, $v - c$; HP, $b - v$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz + 2cy - yy = xx$. Dans le triangle rectangle CMH, $\overline{CH}^2 - \overline{HM}^2 = \overline{CM}^2$, $-2bez + \frac{eezz}{dd} + 2by - yy = xx$. Donc $y = \frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd - 2cdd}$. Il faut substituer cette valeur de y dans $2cz + zz + 2cy - yy = xx$, pour avoir $\frac{bddzz + 2bcddz - ceezz + 2bcdez}{bdd - cdd} - yy = xx$.

On a encore dans le triangle rectangle PCM, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ss - vv + 2vy - yy = xx$, où il faut encore substituer la valeur de y, pour faire $\frac{bddss - bddvv - cddss + cddvv + ddvzz + 2cddvz - eevzz + 2bdevz}{bdd - cdd} - yy = xx$. On comparera cette valeur de xx avec la precedente, & il viendra $zz \frac{+2cddvz + 2bdevz - 2bcddz - 2bcdez + bddss - bddvv - cddss + cddvv}{ddv - eev - bdd + cee}, = 0$; dont le second terme étant comparé avec le second terme de l'équation $zz - 2fz + ff = 0$, donne $v = \frac{bcdd + bcde + bddz - ceez}{cdd + bde - eez + ddz}$.

II.

Après avoir supposé ce qui est au commencement de n. 2. Art. 1. il faut montrer que PQ est à PN, Fig. 200. ou que $HC \times FP$ est à $HP \times CF$, Fig. 200.
comme d est à e.

FP est $v - c$, HC est $b - \frac{ez}{d}$ multipliez les ensemble; CF est $c + z$, HP est $b - v$, multipliez les encore.

La valeur de $HC \times FP$ divisée par d donne le même quotient que $HP \times CF$ divisée par e: ainsi $d : e :: HC \times FP : HP \times CF :: PQ : PN$.

III.

Si l'on avoit un miroir d'une matiere, qui fît que le sinus PQ de l'angle d'inclinaison PCF fût à PN sinus de l'angle reflêchi PCH; comme d à e: tous les rayons FC qui viendroient du point F, & tomberoient sur la concavité AC; se reflêchiroient tous au point H.

Si au contraire la matiere de ce miroir faisoit que le sinus PN de l'angle d'inclinaison HCP fût à PQ sinus de l'angle reflêchi PCF, comme e à d: tous les rayons d'incidence HC, qui viendroient du point H, se reflechiroient en F, après être tombez sur la concavité AC.

On n'a point ici de refraction telle qu'on la cherche : car le rayon IC qui ſeroit dans l'air & tomberoit ſur la convexité AC du verre ACZ, devroit ſe rompre dans l'angle HCP, pour s'approcher de la perpendiculaire CP ; ainſi les rayons IC qui tendent vers le point donné H, ne ſe réüniroient pas à l'autre point donné F, comme on le demande.

I V.

Fig. 201. Au point C de l'autre partie ZC, Figure 201. on trouvera les mêmes proprietez, qu'au point C de la partie AC, Fig. 200.

V.

En ſuivant n. 5. Art. 1. l'équation de l'Ovale du quatriéme genre, dont $AF = 1 = \frac{1}{2} AH$ eſt $\frac{25}{16}y^4 - \frac{35}{2}y^3 + 43yy - 24y - \frac{35}{2}xxy + \frac{25}{8}xxyy - 6xx + \frac{25}{16}x^4 = 0$.

V I.

Fig. 200. Si vous ſuivez auſſi n. 6. Art. 1. en ſuppoſant la Regle, qui tourne autour du point F, d'une longueur arbitraire ; & la corde, qui eſt attachée au point H & à l'extrêmité E de la Regle, & ſe replie autour du point K, égale à $EA + 2AK + AH$; en ſuppoſant encore $AF = \frac{1}{4} AH$, & le point K entre F & H ; vous aurez $AK = \frac{bd^3 - 10bdde + 7bdee + 4be^3}{8d^3 + 8dde - 8dee - 8e^3}$ valeur negative. Ainſi le point K doit être pris de l'autre côté de A, en dehors de l'Ovale.

V I I.

Fig. 202. 1°. Soit $A5 = A6$, Fig. 202. le point F ſur le point A. Du centre F décrivez par le point 5 un cercle qui paſſera par les points 6, Z ; mais $AH = AR$, & $A6 = Az$: donc $R6 = HZ$; & le cercle décrit du centre H, & du rayon $R6$, touchera le premier cercle au point Z ; & l'on décrira la ligne droite AZ.

Fig. 203. 2°. Mais étant $A5 = A6$, & le point F ſeparé du point A, Fig. 203. on décrit une ellipſe.

Nommons AF, c ; AH, $b = AR$; $A5 = A6$, z ; du centre F décrivons le cercle $5C$, nous aurons $FC = F5 = FA + A5$, $c + z$; du centre H & du rayon $R6$, décrivons le cercle CL, nous aurons $HC = R6 = AR - A6$, $b - z$; ſur le point C de la courbe ACZ ainſi décrite tirez CP perpendiculaire ſur cette courbe, & du point C abaiſſez CM perpendiculaire à ZA. Nommons encore CM, x ; AM, y ; AP, v ; PC, s ; nous aurons $FM = AM - AF$, $y - c$; $HM = AH - AM$, $b - y$; $MP = AP - AM$, $v - y$; $FP = AP - AF$, $v - c$; $HP = AH - AP$, $b - v$.

Main

Maintenant dans les triangles rectangles CMF, CMH; $\overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$, $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$. $\overline{CH}^2 - \overline{HM}^2 = \overline{CM}^2$, $zz - 2bz + 2by - yy = xx$: donc $2cz + 2cy = -2bz + 2by$; $z = \frac{by - cy}{b + c}$; $y = \frac{bz + cz}{b - c}$. Et cette valeur de z étant miſe dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$, il vient $\frac{bbyy - 2bcyy + ccyy}{bb + 2bc + cc} + \frac{2bcy - 2ccy}{b + c} + 2cy - yy = xx$, qui ſe reduit à $\frac{bbxx + 2bcxx + ccxx}{4bc} = by + cy - yy$, lieu à l'ellipſe : dont l'axe, comme on le peut connoître par la reduction propre des lieux Geometriques, eſt $b + c = AH + AF = AZ$, donc $HZ = AF$. Son parametre eſt $\frac{4bc}{b + c}$, ſes ſommets ſont A, Z; ſes foyers F, H.

Une proprieté de l'ellipſe eſt que deux lignes FC, HC tirées des foyers F, H ſur un point quelconque C de la ligne elliptique, ſont enſemble égales à l'axe AZ. C'eſt ce qui ſe voit ici, car FC, $c + z + HC$, $b - z = AZ$, $b + c$.

Une autre proprieté de l'ellipſe eſt qu'un rayon quelconque FC de lumiere, qui part de l'un des foyers F & qui tombe ſur la concavité de l'ellipſe ſe reflechit à l'autre foyer H. Ce qui doit arriver, ſi PC étant perpendiculaire ſur l'ellipſe, ou ſur ſa tangente bCd, l'angle d'incidence FCd eſt égal à l'angle de reflexion HCb; & ces deux angles ſeront égaux, ſi les deux PCF, PCH le ſont. Il reſte donc à prouver que les angles PCF, PCH ſont égaux, ou ce qui revient au même; que les perpendiculaires PQ, PN, qui ſont leurs ſinus, ſont égales.

On vient de trouver $y = \frac{bc + cz}{b - c}$; ſubſtituez cette valeur dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$; vous ferez $\frac{bzz - czz + 4bcz}{b - c} - yy = xx$. Le triangle rectangle PCM, vous donne à l'ordinaire $ss - vv + 2vy - yy = xx$, & la ſubſtitution de la même valeur de y, $\frac{bss - css - bvv + cvv + 2bvz + 2cvz}{b - c} - yy = xx$. La comparaiſon de ces deux valeurs de xx produit l'équation $zz \frac{+ 4bcz - 2bvz - 2cvz - bss + css + bvv - cvv}{b - c} = 0$. Dont vous comparerez le ſecond terme avec le ſecond de $zz - 2fz + ff = 0$, pour avoir AP, $v = \frac{2bc + bz - cz}{b + c}$.

On prouve que $PQ = PN$, ſi l'on fait voir, ſelon ce qui a été expliqué Art. 1. n. 2. que $CH \times FP = CF \times HP$. Or FP eſt $v - c$. Multipliez par CH, $b - z$; HP eſt $b - v$; multipliez par CF, $c + z$, les deux produits ſeront égaux.

3°. Soit $A5$ moindre que $A6$, Fig. 204. & $e : d :: A5, z : A6, \frac{dz}{e}$; $FC = F5 = FA + A5$, $c + z$; $HC = R6 = RA - A6$, $b - \frac{dz}{e}$. On décrira encore une ovale du quatriéme genre. Soit CM, x; AM, y; CP, s; AP, v; on aura $FM = AF - AM$, $c - y$; $HM = HA - AM$, $b - y$; $PM = AP - AM$, $v - y$; $FP = AP - AF$, $v - c$; $HP = HA - AP$, $b - v$; on trouvera de la même maniere qu'auparavant la valeur de v. Fig. 204.

Suivant ce qui a été dit, Art. 1. n. 2. on aura $PQ : PN :: e : d$, si l'on a $FP \times HC : HP \times CF :: e : d$. Le rayon FC se reflechira en CH, supposé que le miroir ACZ soit composé d'une matiere, qui fasse que dans la reflexion de la lumiere PQ soit à PN comme e à d; multipliez en effet PF par HC, & HP par CF, vous aurez le même quotient en divisant la valeur de $FP \times HC$ par e, & la valeur de $HP \times CF$ par d.

SECTION IV.

De la Reflexion & de la Refraction de la lumiere dans les courbes du premier genre.

FIG. 203. 1°. Dans l'ellipse, on vient de voir Art. 4. n. 7. Fig. 203. qu'un rayon de lumiere FC, qui part du foyer F & qui tombe sur la convexité elliptique, se reflechit à l'autre foyer H: de sorte que si l'on fait un miroir elliptique, & qu'on mette une bougie allumée à un des foyers, tous ses rayons se réüniront à l'autre foyer, & y formeront l'image de la flamme, qui est au premier foyer.

M. DESCARTES démontre dans sa Dioptrique, Discours 8. que les rayons qui sont dans l'air paralleles à l'axe d'un verre de Figure elliptique, & qui tombent sur la surface convexe de ce verre, vont tous se réünir au foyer le plus éloigné de l'ellipse, dont l'axe est à la distance des foyers comme d à e, ou comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu.

FIG. 205. Soit Fig. 205. l'ellipse ACZ, dont AZ est l'axe; A, Z, les sommets; G, F les foyers; HC un rayon parallele à l'axe, qui tombe dans l'air sur la convexité AC du verre ACZ: je dis que CF est le rayon rompu, si l'axe AZ est à FG distance des foyers F, G, comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu. Au point C tirez PCK perpendiculaire sur la courbe AC, PQ perpendiculaire sur HC prolongée, PN sur CF. Comme on l'a dit plusieurs fois, PQ est le sinus de l'angle PCQ, ou de l'angle d'inclinaison HCK; PN est le sinus de l'angle rompu PCF. Soit E le centre de l'ellipse. Abaissez CM perpendiculaire sur AZ.

Puisque $AZ : GF :: d : e$, je puis nommer AZ, d; GF, e; je nomme CF, z; donc $CG = AZ - CF$, $d - z$. Je nomme encore CM, $x = PQ$, AM, y; PC, s; AP, v. On aura $EG = EF$, $\frac{1}{2}e$; $EA = EZ$, $\frac{1}{2}d$; AF, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; AG, $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e$; GM, $y - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; FM, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - y$; MP, $v - y$; PF, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - v$.

Il faut démontrer, qu'étant AZ, d; GF, e; HC le rayon d'incidence; PQ est à PN, comme d à e; 1°. Prenez les deux valeurs de xx dans les deux triangles rectangles CMG, CMF, vous trouverez $y = \frac{dd - 2dz + de}{2e}$;

substituez cette valeur de y dans l'équation $\overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$. Cette derniere valeur sera comparée avec une autre valeur de xx, que vous prendrez dans le triangle CMP, & dans laquelle vous aurez auparavant substitué la valeur trouvée de y. Cette comparaison donnera une grandeur $= 0$, dont le second terme comparé avec $-2fz$ découvrira la valeur de AP, $v = \frac{dd + de - 2ez}{2d}$; PF est donc $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - v = \frac{ez}{d}$. Les triangles CMF, PNF sont équiangles, donc $CF, z : CM, x :: PF, \frac{ez}{d} : PN, \frac{ex}{d}$. Or $PQ, x : PN, \frac{ex}{d} :: d : e$. $ex = ex$.

Si la raison de l'axe AZ à la distance des foyers G, F étoit la raison de m à n, on trouveroit aussi que PQ sinus de l'angle d'inclinaison auroit la même raison à PN sinus de l'angle rompu.

2°. Dans l'hyperbole on a vû Sect. 3. Art. 2. n. 7. Fig. 191. que tous les rayons NC, qui tombent sur la concavité AC d'une hyperbole, & qui étant continuez iroient au foyer G, se reflechissent tous au foyer F. Fig. 191.

M. DESCARTES démontre dans sa Dioptrique, Discours 8. que Fig. 206. le rayon quelconque HC, qui étant dans le verre, tombe sur la surface concave AC d'une hyperbole, va en sortant dans l'air, au foyer exterieur F: s'il étoit parallele à l'axe PAZ, & si la raison de l'axe déterminé AZ, à la distance FG des foyers est la même que celle de e à d, ou que celle du sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere qui passe du verre dans l'air. C'est-à dire que NC se rompra en CF. Fig. 206.

Soient donc AZ l'axe déterminé de l'hyperbole AC; G, F les foyers; puisque $AZ : GF :: e : d$, je puis nommer AZ, e; GF, d; & le point E étant le centre des hyperboles, $EG = EF$, $\frac{1}{2}d$; $EA = EZ$, $\frac{1}{2}e$; AG, $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e$; AF, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$. Soit PC perpendiculaire sur AC, & du point P tirez PN perpendiculaire sur HC rayon d'incidence, PQ sur FC prolongé; PN est le sinus de l'angle d'inclinaison HCP; PQ est sinus de l'angle PCQ ou de l'angle rompu FCK. Du point C menez CG au foyer G, & CM perpendiculaire sur l'axe ZAP. Si l'on nomme CF, z; CG sera $FC - AZ$, $z - e$, parceque comme on l'a dit, Sect. 3. Art. 2. n. 7. le diametre déterminé AZ est toûjours la difference des deux droites FC, GC tirées des deux foyers sur un point C de l'hyperbole. Nommons encore CM, $x = PN$; AM, y; AP, v; PC, s. Nous aurons GM, $y - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; FM, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e + y$; MP, $v - y$; PF, $v + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$.

Prenez encore les valeurs de xx dans les triangles CMF, CMG, vous trouverez $y = \frac{2ez - ee - de}{2d}$ vous substituerez cette valeur de y dans l'équation $\overline{CF}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{CM}^2$. Cette derniere valeur sera encore comparée avec une autre valeur de xx, que vous prendrez dans le triangle CMP, après avoir substitué la valeur de y dans celle-ci; cette comparaison donnera une grandeur $= 0$, dont le second terme comparé avec $-2fz$ donne AP, $v = \frac{2dz - de - ee}{2e}$.

Aprés cela $PF = v + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e = \frac{dz}{e}$. Les triangles CMF, PQF ſont équiangles, ainſi $CF, z : CM, x :: PF, \frac{dz}{e} : PQ, \frac{dx}{e}$. Or $PN, x : PQ, \frac{dx}{e} :: e : d$.

Quelque raiſon de m à n que l'on mette entre AZ axe déterminé & GF diſtance des foyers, elle ſe trouvera auſſi entre PN ſinus de l'angle d'inclinaiſon & PQ ſinus de l'angle rompu.

Fig. 207. 3°. Dans le cercle, Fig. 207. tout rayon PC, qui part du centre P, & tombe ſur la circonference concave d'un cercle ſe reflechit au même centre; parceque 18. 3. Eucl. PC eſt perpendiculaire ſur la circonference.

Tout rayon KC qui tombe perpendiculaire ſur la ſurface convexe du cercle, va au centre, & ne ſe rompt point.

Soit le rayon d'incidence HC, parallele au diametre AZ, & qui eſt dans l'air $ACKH$; qu'il ſe rompe en CF dans le verre $ACFZ$, dont la convexité AC eſt circulaire: de telle ſorte que PQ perpendiculaire ſur HC, & le ſinus par conſequent de l'angle PCQ, ou de l'angle d'inclinaiſon HCK, ſoit à PN perpendiculaire ſur le rayon rompu CF, & ſinus de l'angle rompu PCF; comme d à e, ſuivant la raiſon que demande la refraction de la lumiere, qui de l'air entre dans le verre. On cherche le point F, Du point C abaiſſez CM perpendiculaire ſur AZ.

Nommons AZ, $2a$; $AP = PZ$, $a = CP$; CM, $x = PQ$; AM, y; ZF, p, nous aurons PF, $a + p$; MP, $a - y$; MF, $2a + p - y$; on a ſupp. $d : e :: PQ, x : PN, \frac{ex}{d}$. Dans les triangles rectangles PNF, MCF, on a cette Analogie $PN, \frac{ex}{d} : PF, a + p :: CM, x : CF, \frac{ad + dp}{e}$.

Dans les triangles CMF, CMP prenez les valeurs de xx, comparez les, & vous trouverez $pp - \frac{4aeep - 2addp + 2eeyp}{dd - ee} = \frac{4aaee - aadd - 2aeey}{dd - ee}$, dont la racine fera voir que y ou AM changeant toutes les fois que le point C change; p, ou ZF, ou le point F change auſſi; & les rayons HC paralleles au diametre AZ ne s'uniſſent pas en un ſeul point de ce diametre.

Fig. 208. 4°. Dans la parabole, Fig. 208. Les rayons HC paralleles à l'axe AP, qui tombent ſur la ſurface concave AC, ſe reflechiſſent au foyer F. Soit CP perpendiculaire ſur la ligne parabolique AC; PN ſur le rayon d'incidence HC, PQ ſur le rayon de reflexion CF, CM ſur l'axe AP; bCd tangente.

Nommons le parametre, p; CM, $x = PN$; AM, y; on ſçait par les Traitez des Sections coniques que $AF = \frac{1}{4}p$; $MP = \frac{1}{2}p$; CF, $y + \frac{1}{4}p$; ainſi PF, $\frac{1}{4}p + y$: donc $PF = CF$.

Dans les triangles rectangles & ſemblables CMF, PQF, $CF : CM :: PF : PQ$. Mais les deux antecedens CF, PF ſont égaux: donc CM & PQ ſont auſſi égaux. Or $CM = PN$: donc $PQ = PN$, & l'angle d'inclinaiſon HCP, dont PN eſt le ſinus, ſera égal à l'angle reflechi PCK, dont PQ eſt le ſinus.

Otez ces deux angles des deux droits PCb, PCd; il restera l'angle d'incidence HCb égal à l'angle de reflexion FCd. C'est pourquoi le rayon HC se reflechira en F. Et si l'on fait un miroir parabolique concave, les rayons du Soleil qui sont paralleles à l'axe AP & qui tombent sur la concavité AC se reflechiront au foyer F, où étant réünis ils bruleront.

Venons à la refraction, soit AC Fig. 206. la convexité parabolique du verre $ACQP$, dans lequel HC est un rayon parallele à l'axe AP. & qui sort dans l'air $KCAF$; on demande le point F sur l'axe, où le rayon d'incidence HC doit aller, CF sera le rayon rompu. Soit G le foyer; PC perpendiculaire sur la courbe AC; PN sur le rayon d'incidence HC, & sinus de l'angle d'inclinaison PCH; PQ sur le rayon rompu CF prolongé, & le sinus de l'angle PCQ, ou de l'angle rompu KCF; CM perpendiculaire sur l'axe AP; tirez encore CG. Supposons enfin que PN est à PQ, comme e à d, ou suivant la raison, que ces sinus doivent avoir dans la refraction d'un rayon qui passe du verre dans l'air. Fig. 205.

Nommons le parametre de la parabole, p; AG est $\frac{1}{4}p$; MP, $\frac{1}{2}p$. Soit CM, $x = PN$; AM, y; AF, r; Nous aurons AP, $y + \frac{1}{2}p$; MG, $y - \frac{1}{4}p$; $CG = GP = y + \frac{1}{4}p$, comme on l'a dit un peu auparavant; MF, $y + r$; PF, $y + \frac{1}{2}p + r$. Ensuite par l'hyp. $e : d :: PN, x : PQ, \frac{dx}{e}$. Et dans les triangles CMF, PQF équiangles, PQ, $\frac{dx}{e} : PF$, $y + \frac{1}{2}p + r :: CM, x, CF$, $\frac{ey + \frac{1}{2}ep + er}{d}$. Nommons encore à l'ordinaire CP, s.

Dans les triangles CMG, CMF prenez deux valeurs de xx, faites en une grandeur $= o$, ordonnez les termes & vous trouverez une grandeur, dont la racine sera $y = -\frac{1}{2}p - r + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}ddpp + ddpr}{dd - ee}}$.

Le triangle CMP donne $ss - \frac{1}{4}pp = xx = py$ & $y = \frac{ss}{p} - \frac{1}{4}p = -\frac{1}{2}p - r + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}ddpp + ddpr}{dd - ee}}$, quarrez cette derniere équation, &c. ordonnez les termes, vous aurez une grandeur dont le second terme comparé avec le second de $rr - 2fr + ff = o$, donne $r = \frac{eep}{2dd - 2ee} - y$, en substituant pour ss sa valeur $py + \frac{1}{4}pp$.

Et comme la longueur de y varie chaque fois que C change de place, il suit que $AF = r$, ou le point F change aussi, & les rayons KC ne se réünissent pas en un seul point.

La valeur de $r = \frac{eep}{2dd + 2ee} - y = \frac{2}{5}p - y$, en supposant $e = 2$, $d = 3$, nous apprend, que dès que l'abscisse AM, y est plus grande que $\frac{2}{5}$ du parametre, la valeur de r devient negative, & qu'il la faut prendre de l'autre côté de A, c'est-à-dire en allant de A vers P; en un mot que le rayon d'incidence HC ne se rompt plus, mais qu'il se reflechit. La raison est, qu'alors les sinus des angles HCP d'inclinaison sont trop grands; pour avoir des sinus correspondans des angles rompus KCF.

Fig. 209. Mais Fig. 209. supposons que le rayon d'incidence HC parallele à l'axe AP est dans l'air, & qu'il tombe sur le verre parabolique AC, & qu'il se rompt en F: on demande le point F.

Nommons les lignes, comme auparavant pour Fig. 206. excepté $MF = AF - AM, r - y$; $PF = AF - AP, r - y - \frac{1}{2}p$; de plus $d : e :: PN, x : PQ : \frac{ex}{d}$; & dans les triangles équiangles PQF, CMF, $PQ, \frac{ex}{d} : PF, r - y - \frac{1}{2}p :: CM, x : CF, \frac{dr - dy - \frac{1}{2}dp}{e}$.

Les triangles rectangles CMG, CMF donnent deux valeurs de xx; vous les comparerez pour en tirer la valeur de $y = -\frac{1}{2}p + r + \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}eepp + eeppr}{dd - ee}}$.

Le triangle CMP donne encore $ff - \frac{1}{4}pp = py$. $\frac{ff}{p} + \frac{1}{4}p - r = \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}eepp + eepr}{dd - ee}}$ d'où vous tirerez encore une grandeur $= o$, dont le second terme comparé avec $-2fr$ découvre la valeur de r en substituant pour ff sa valeur; $r = \frac{ddp}{2dd - 2ee} + y = AF$. Les rayons se rompront toûjours & ils ne se réüniront pas en un même point.

SECTION V.

La Figure qu'il faut donner aux verres, pour qu'ils réünissent à un point donné, les rayons qui viennent d'un autre point donné.

1. LE premier cas, que M. DESCARTES explique ici, est celui, dans lequel les verres ont l'une de leurs superficies autant convexe, ou concave, que l'on veut. 2. Le second cas est celui, dans lequel la convexité de l'une des superficies a une proportion donnée avec la convexité de l'autre. 3. J'expliquerai quelques cas que M. DESCARTES n'a pas resolu. 4. Je montrerai comment M. DESCARTES a pu trouver ce qu'il enseigne ici touchant les verres, qui servent à la refraction de la lumiere.

ARTICLE I.

Les verres ont l'une de leurs superficies autant convexe, ou concave, que l'on veut.

§. I. M. DESCARTES.

* Discours 8. MAis il faut maintenant, que je satisfasse à ce que j'ai omis en la * Dioptrique, lorsqu'après avoir remarqué, qu'il peut y avoir des verres de plusieurs diverses figures, qui fassent aussi bien

l'un que l'autre, que les rayons venant d'un même point de l'objet, s'assemblent tous en un autre point après les avoir traversez. Et qu'entre ces verres, ceux qui sont fort convexes d'un côté & concaves de l'autre, ont plus de force pour brûler, que ceux qui sont également convexes des deux côtez : au lieu que tout au contraire ces derniers sont les meilleurs pour les lunettes. Je me suis contenté d'expliquer ceux que j'ai cru être les meilleurs pour la pratique, en supposant la difficulté que les Artisans peuvent avoir à les tailler. C'est pourquoi afin qu'il ne reste rien à souhaiter touchant la Theorie de cette science, je dois expliquer encore ici la figure des verres, qui ayant l'une de leurs superficies autant convexe, ou concave, que l'on voudra, ne laissent pas de faire que tous les rayons, qui viennent vers eux d'un même point, ou paralleles, s'assemblent après en un même point, & celles des verres, qui font le semblable, étant également convexes des deux côtez, ou bien la convexité de l'une de leurs superficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.

Comment on peut faire un verre autant convexe ou concave en l'une de ses superficies, qu'on voudra, qui rassemble à un point donné tous les rayons, qui viennent d'un autre point donné.

Posons pour le premier cas, que les points *G*, *Y*, *C*, & *F* étant donnez, Fig. 210. 211. les rayons qui viennent du point *G*, ou bien qui sont paralleles à *GA*, se doivent assembler au point *F*, après avoir traversé un verre si concave, que *Y* étant le milieu de sa superficie interieure, l'extrêmité en soit au point *C*, en sorte que la corde *CMC*, & la flêche *YM* de l'air *CYC* sont données.

AF est l'axe des courbes qu'on cherche, les points *C*, *c* appartiennent à ces courbes; *CM* est perpendiculaire sur *AH*, & une appliquée des deux courbes; *Y* étant le sommet de la courbe *CYC*, *YM* est une abscisse; *A* étant le sommet de la courbe *CAC*, *AM* en est une abscisse. La droite *AG* étant donnée de position avec le point *C*, la perpendiculaire *CM*, & le point *M* sont connus; lespoints *Y*, *M*, étant donnez; la droite *YM* est encore connuë.

§. II. M. DESCARTES.

La question va là, que premierement il faut considerer, de laquelle des Ovales expliquées, la superficie du verre *YC* doit avoir la figure, pour faire que tous les rayons, qui étant dedans, ten-

FIG. 210. 211. dent vers un même point, comme vers *H*, qui n'eſt pas encore connu, s'aillent rendre vers un autre, à ſavoir vers *F*, après en être ſortis. Car il n'y a aucun effet touchant le rapport des rayons changé par reflexion ou refraction d'un point à un autre, qui ne puiſſe être cauſé par quelqu'une de ces Ovales.

Et on voit aiſément, que celui-ci le peut être par la partie de la troiſiéme Ovale, qui a tantôt été marquée 3*A*3. Fig. 176. ou par celle de la même, qui a été marqué 3*Y*3. Fig. 176. ou enfin par la partie de la ſeconde, qui a été marquée 2*X*2. Fig. 175.

On a vû Sect. 3. Art. 3. n. 3. que Fig. 196. 197. qui ſont les mêmes que Fig. 176. le rayon *IC* qui étant dans l'air *ICK* tend vers le point *H* du verre *ACY*, ſe rompt pour aller au point *F*, & Art. 2. n.4. que Fig. 187. qui eſt la même que Fig. 175. le rayon *IC* qui eſt dans l'air *ICK* & tend vers le point *G*, ſe rompra dans le verre *XCA* pour aller au point *F*. On a prouvé la même choſe, Art. 2. n.7. touchant la Fig. 195. dans laquelle *IC* qui tend vers *G*, ſe rompt en *F*. Nous dirons bientôt en quel cas chacune de ces Ovales ſert.

Quand M. DESCARTES dit, que ſes Ovales ſervent aux reflexions de la lumiére, cela, comme il l'a dit ailleurs, ſuppoſe une matiere qui change tellement la détermination du rayon d'incidence, que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon ſoit au ſinus de l'angle reflechi, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon dans la refraction eſt au ſinus de l'angle rompu.

§. III. M. DESCARTES.

FIG. 210. 211. ET pourceque ces trois tombent ici ſous le même calcul, on doit tant pour l'une que pour l'autre prendre *Y* pour leur ſommet, *C* pour l'un des points de leur circonference, & *F* pour un de leurs points brulans; après quoi il ne reſte plus à chercher que le point *H*, qui doit être l'autre point brûlant. Et on le trouve en conſiderant que la difference qui eſt entre les lignes *FC*, *FY*, doit être à celle, qui eſt entre les lignes *HY* & *HC*, comme *d* eſt à *e*; c'eſt-à-dire comme la plus grande des lignes, qui meſurent les refractions du verre propoſé, eſt à la moindre; ainſi qu'on peut voir manifeſtement de la deſcription de ces Ovales.

FIG. 176. 197. On n'a qu'à relire la ſeconde Section, & le commencement de l'Article 2. Sect. 3. où le point *A* eſt celui, qu'on nomme ici *Y*. On trouvera que

que la difference de FA & de FC, Fig. 197. ou de FA & de $F3$; Fig. 176. est $A5 = z$; & que la difference de HA & HC, Fig. 197. ou de $HA = SA$ & de $H3 = HT = S6$, Fig. 176. est $A6 = \frac{ez}{d}$; & que $A5 : A6 :: d : e$. Voilà pour le cas, où la courbe CYC, Fig. 210. 211. est la partie $3A3$, Fig. 176. ou la partie AC, Figure 197. & il est évident qu'alors la difference, qui est entre les lignes FY, FC, Fig. 210. 211. est à la difference, qui est entre les lignes HY, HC comme d à e.

Il faut démontrer que la raison de ces differences est encore la même, lorsque la courbe CYC, Fig. 210. 211. est la partie YC, Fig. 196. ou la partie $3Y3$, Figure 176. Venons à la Figure 212. Lorsqu'en décrivant l'Ovale ACY du troisiéme genre, on a determiné le sommet Y; premierement du centre F on a décrit le demi-cercle $XV7$: donc $FY = F7$. Ensuite on a tiré la ligne $7\ 8$, de telle sorte que $A7 : A8 :: d : e$. Après cela l'on a pris la distance $S8$, & du centre H on a décrit l'arc YQ : donc $HY = S8$. Maintenant lorsqu'on a déterminé le point C, du centre F on a décrit le cercle $5C$: donc $FC = F5$. Ensuite on a tiré la ligne $5\ 6$ parallele à $7\ 8$, de sorte que $A5 : A6 :: d : e$. Après cela l'on a pris la distance $S6$, & du centre H on a décrit l'arc Cq : donc $HC = S6$. C'est pourquoi la difference de $FY = F7$ & de $FC = F5$ c'est la ligne $5\ 7$; la difference de $HY = S8$ & de $HC = S6$ c'est la ligne $6\ 8$. Or par la construction $A7 : A8 :: A5 : A6 : d : e$. & $A7 : A5 :: A8 : A6$. Mais $A5 : 5\ 7 :: A6 : 6\ 8$. & $A5 : A6 :: 5\ 7 : 6\ 8 :: d : e$. Donc 57 difference de FY, FC est à 68 difference de HY, HC; comme d est à e. Fig. 212.

On peut démontrer de la même façon, Fig. 175. 187. que la difference de FX & de FC ou $F2$ est à la difference de GX & de GC ou $G2$: comme d est à e. On peut encore faire la même chose, Fig. 195. à l'égard de la difference des lignes GX, GC & de la difference des lignes FX, FC.

Au reste toutes ces Ovales tombent sous le même calcul, puisque comme on l'a pû remarquer, Sect. 3. les calculs de toutes les Ovales ne different, que par le changement de quelques signes + —.

§. IV. M. DESCARTES.

Et pourceque les lignes FY, FC sont données, leur difference l'est aussi; & ensuite celle qui est entre HY, HC, pourceque la proportion qui est entre ces deux differences est donnée. Et de plus à cause que YM est donnée, la difference qui est entre MH & HC l'est aussi; & enfin pourceque CM est donnée, il ne reste plus qu'à trouver MH le côté du triangle rectangle CMH, dont on a l'autre côté CM, & on a aussi la difference qui est entre CH la base; Fig. 210. 211.

& *MH* le côté demandé : d'où il est aisé de le trouver. Car si on prend k pour l'excès de CH sur MH, & n pour la longueur de la ligne CM, on aura $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour MH.

Les lignes FY, FC sont connuës, parceque les points F, C, Y sont donnez. Je nomme a la difference des lignes FY, FC.

Je sçai encore que la difference des lignes FY, FC est à la difference des lignes HY, HC, comme d est à e. Si je fais donc, $d : e :: a : \frac{ae}{d}$, ce quatriéme terme sera la difference connuë des lignes HY, HC; de sorte que si la plus grande HY est m, la moindre HC est $m - \frac{ae}{d}$.

De plus YM est aussi connuë, comme nous l'avons dit dès le commencement de cet Article ; nommons la b, HM sera $HY - YM$, $m - b$; & la difference de HC & de HM, ou $HC - HM$ sera $m - \frac{ae}{d} - m + b = b - \frac{ae}{d}$, que j'appelle k avec M. DESCARTES, & qui est toute connuë.

Soit maintenant MH, r; CH est $MH + k = r + k$; soit aussi CM, n; qui est connuë. On aura $\overline{CH}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MH}^2$, $2kr = nn - kk$; $r = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k = MH$. & $CH = \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k$.

§. V. M. DESCARTES.

F. 210. 211. Et après avoir ainsi le point H, s'il se trouve plus loin du point Y, que n'en est le point F; la ligne CY doit être la premiere partie de l'Ovale du troisiéme genre, qui a tantôt été nommée $3A3$. Mais si HY est moindre que FY, ou bien elle surpasse FH de tant, que leur difference est plus grande à raison de la toute FY, que n'est e la moindre des lignes qui mesurent les refractions comparée avec d la plus grande ; c'est-à-dire que faisant $HF = c$. & $HY = c + h$; dh est plus grande que $2ce + eh$: & lors CY doit être la seconde partie de la même Ovale du troisiéme genre, qui a tantôt été nommé $3Y3$. Ou bien dh est égale ou moindre que $2ce + eh$: & lors CY doit être la seconde partie de l'Ovale du second genre, qui a ci-dessus été nommée $2X2$. Et enfin si le point H est le même que le point F, ce qui n'arrive que lorsque FY, FC sont égales, cette ligne YC est un cercle.

1. Fig. 211. le point H est plus loin du sommet Y, que le point F : ainsi il faut trouver une surface CYC, qui termine d'un côté le verre $CACY$, & qui soit telle, qu'un rayon quelconque bc, qui traverse le verre, &

tend vers H, ſe rompe au point C, par où il entre dans l'air, de telle ſorte qu'il aille en F. Or cela arrivera, ſi la ſurface CYC, Fig. 211. eſt la même que la ſurface $3A3$, Fig. 176. ou AC, Fig. 197. car on a fait voir, Sect. 3. Art. 3. n.4. que Fig. 197. le rayon IC qui eſt dans le verre LCK, & qui tend vers H, ſe rompra en F. Or dans Fig. 197. Le point H eſt plus éloigné du ſommet A que le point F, comme Fig. 211. le point H eſt plus éloigné du ſommet Y que le point F.

2. Fig. 210. HY eſt moindre que FY, & le point H eſt plus près du ſommet Y, que le point F. Alors ſi $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a plus grande raiſon à FY que e à d; la courbe CYC doit être la partie $3Y3$ de Fig. 176. ou CY de Fig. 196. parceque cette partie d'une Ovale du troiſiéme genre a cette proprieté.

Par la deſcription de l'ovale du troiſiéme genre, Fig. 212. on a $HY - HA = S8 - SA = A8$, parceque $HY = S8$, $HA = SA$; on a $FY - FA = F7 - FA = A7$, parceque $FY = F7$. FIG. 212.

Mais l'on a vû que $A8 : A7 :: e : d$; donc $HY - HA : FY - FA :: e : d$.

Dans cette proportion l'antecedent $HY - HA = A8$ eſt moindre que $FY - FA = A7$, & l'antecedent e moindre que le conſequent d: mettant FA dans le premier antecedent $HY - HA$, ce ſera $HY - HA + FA = HY - HF$; mettons encore FA dans le premier conſequent $FY - FA$, ce ſera $FY - FA + FA = FY$: donc $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a plus grande raiſon à FY, que e à d. Soit donc HF, c; la difference de HY & de HF, h; ſi vous coupez $Hf = HF$, c; la difference de HY & de Hf eſt Yf, h; donc HY ſera $Hf + fY$, $c + h$; & $FY = FH + HY$, $2c + h$; il ſuit donc que h a plus grande raiſon à $2c + h$ que e à d. Donc le produit dh des extrêmes eſt plus grand que le produit $2ce + eh$ des moyennes dans la partie $3Y3$ d'une Ovale du troiſiéme genre.

Quand même le point F tomberoit ſur le point A, l'ovale auroit la proprieté, qu'on vient de démontrer.

3. Etant Fig. 210. HY moindre que FY, & le point H plus près du ſommet Y que le point F; alors ſi $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a moindre raiſon à FY que e à d; la courbe CYC doit être la partie $2X2$ de l'ovale du ſecond genre, Fig. 175. Il faut montrer que telle eſt la proprieté de cette partie $2X2$, lorſque les points F, A ſont ſeparez. FIG. 210. 175.

Suppoſons que Fig. 175. le ſommet X & le point 7 ſont le même. Par la deſcription de l'Ovale du ſecond genre, on a $SA = GA$; $S8 = GX$; $GX - GA = S8 - SA = A8$; $AX = A7$. Mais $A8 : A7 :: e : d$; donc $GX - AG : AX :: e : d$. Mais $GX - GF$ eſt moindre, que $GX - AG$; donc $GX - GF$ aura moindre raiſon à AX, que e à d. Or

FX eſt plus grande que AX : donc $GX - GF$ aura beaucoup moindre raiſon à FX, que e à d. Soit GF, c ; $GX - GF$ ou la difference de GX & de GF, h ; GX eſt $c + h$; $FX = FG + GX$, $2c + h$. donc h a moindre raiſon à $2c + h$, que e à d. & le produit dh des extrêmes eſt moindre que $2ce + eh$ produit des moyennes. De ſorte que c'eſt là une proprieté de la partie $2X2$ des Ovales du ſecond genre.

Que ſi l'on fait reflexion que les points $2XG$ de Fig. 175. ſont les mêmes, que les points CYH de Fig. 210. on connoîtra que Fig. 210. $HY - HF$ ou la difference h de HY, FH a moindre raiſon à FY $2c + h$, que e à d.

4. Etant Fig. 210. HY moindre que FY, & le point H plus près du ſommet Y que le point F ; alors ſi $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a la même raiſon à FY que e à d ; la courbe CYC doit encore être la partie $2X2$ de l'Ovale 175. du ſecond genre, mais en ſuppoſant que le point F tombe ſur le point A, comme il arrive Fig. 188.

Concevons donc que Fig. 175. les points F, A, & les points 7, X ſont les mêmes. On a $SA = GA$; $S8 = GX$; $GX - GA$ ou $GX - GF = S8 - SA = A8$; AX ou $FX = A7$. Mais $A8 : A7 :: e : d$; donc $GX - AG$ ou $GX - FG$ eſt à AX ou FX, comme e à d. Soit GF ou GA, c ; $GX - GF$ ou $GX - GA$, ou la difference de GX & de GF, ou de GX & de GA, h ; GX eſt $c + h$; FX ou $AX = FG + GX$ ou $AG + GX$, $2c + h$; donc $h : 2c + h :: e : d$. $dh = 2ee + eh$. Ainſi c'eſt là une proprieté de la partie $2X2$ de l'Ovale du ſecond genre, lorſque le point F tombe ſur le point A.

On connoîtra comme auparavant, que Fig. 210. $HY - HF$ ou la difference h de HY & de HF a la même raiſon à FY, $2c + h$, que e à d.

5. Lorſque le point H eſt le même que le point F, Fig. 210. c'eſt-à-dire lorſqu'on veut que tout rayon bc qui eſt dans le verre $CACY$, & qui tend au point F, arrive à ce point, après qu'il ſera entré dans l'air CYF ; alors il ne ſouffre point de refraction au point C, ce qui prouve qu'il étoit perpendiculaire ſur la courbe CYC. Mais une proprieté du cercle eſt que les rayons qui tombent dans un milieu perpendiculaires ſur ſa convexité CYC, tendent tous à un ſeul point, qui eſt ſon centre ; & qu'ils y arrivent après être entrez même dans un autre milieu : donc dans ce cas CYC eſt un arc de cercle dont F eſt le centre ; & $FY = FC$.

§. VI. M. DESCARTES.

Fig. 210. 211. Après cela il faut chercher CAC l'autre ſuperficie de ce verre, qui doit être une ellipſe, dont H ſoit le point brûlant, ſi on ſuppoſe que les rayons qui tombent deſſus, ſoient paralleles ; & alors

il eſt aiſé de la trouver. Mais ſi on ſuppoſe qu'ils viennent du point *G*, ce doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre, dont les deux points brûlans ſoient *G* & *H*, & qui paſſe par le point *C*: d'où on trouve le point *A* pour le ſommet de cette Ovale, en conſiderant, que *GC* doit être plus grande que *GA* d'une quantité, qui ſoit à celle dont *HA* ſurpaſſe *HC*, comme *d* à *e*. Car ayant pris *k* pour la difference, qui eſt entre *CH* & *HM*, ſi on ſuppoſe *x* pour *AM*, on aura $x - k$, pour la difference qui eſt entre *AH* & *CH*; puis ſi on prend *g* pour celle, qui eſt entre *GC* & *GM*, qui ſont données, on aura $g + x$ pour celle, qui eſt entre *GC* & *GA*, & pourceque cette derniere $g + x$ eſt à l'autre $x - k$, comme *d* eſt à *e*; on a $ge + ex = dx - dk$, ou bien $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour la ligne *x* ou *AM*, par laquelle on détermine le point *A*, qui étoit cherché.

1. Fig. 205. le rayon *HC* tend au point *F*. De même Fig. 211. le rayon *Bb*, qui eſt dans l'air parallele à *GA* tombant ſur la ſurface elliptique *CAC*, de verre, ſe rompra au point *b*, de ſorte qu'il ira dans le verre par la ligne *bc* au point *H*, qui eſt le foyer le plus éloigné du ſommet *A*, pourveu que l'axe ſoit à la diſtance des foyers comme *d* eſt à *e*, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui de l'air entre dans le verre.

Voici comment on trouvera cette ellipſe, Fig. 213. dont un foyer *H*, & Fig. 213.
un point *C* de la circonference ſont donnez, avec $HC = \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k$, & $HM = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$, telles qu'on les a trouvées §. 4. pour Figures 210. 211. Car on ſuppoſe que les points *A*, *C*, *H* & la ligne *CM* de Fig. 213. ſont les mêmes que les points *A*, *C*, *H* & la ligne *CM* de Fig. 211. Soit Fig. 213. *F* le foyer de l'ellipſe *ACZ* qui eſt le plus près du ſommet *A*, joignez *FC*, & nommez-la *z*.

Par la nature de l'ellipſe les deux lignes *HC*, *FC* tirées des foyers à un point *C* de la circonference, ſont égales à l'axe *AZ*: donc $AZ = \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k + z$. De plus par l'hyp. j'aurai la diſtance *FH* des foyers, en faiſant $d : e ::$ le diametre *AZ*, $\frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k + z : FH$, $\frac{enn}{2dk} + \frac{ke}{2d} + \frac{ez}{d}$; donc $FM = FH - HM$, $\frac{enn}{2dk} + \frac{ke}{2d} + \frac{ez}{d} - \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k$. *CM* eſt *n*, §. 4.

Le triangle rectangle *CMF* donne l'équation $zz - \frac{4dek^3 + 4deknnz - 4eek^3z - 4eeknnz}{4ddkk - 4eekk} = \frac{2ddkknn + ddk^4 + 2dek^4 + 2eekknn + een^4 - 2den^4 + ddn^4 + eek^4}{4ddkk - 4eekk}$, ou $zz - 2fz = gg$ en faiſant $\frac{-4dek^3 + 4deknn - 4eek^3 - 4eeknn}{4ddkk - 4eekk} = -2f$, & ce qui eſt dans le ſecond membre égal à gg. Enſuite $zz - 2fz + ff = ff + gg$; $z = f = \sqrt{ff + gg} = CF$, ce qui détermine

le foyer *F*, & la longueur de *FH*, dont le milieu *I* eſt le centre de l'ellipſe. Je connois encore l'axe $AZ = \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k + z$; dont la moitié *IA* détermine le ſommet *A*. Toutes ces choſes étant connuës, il eſt aiſé de décrire l'ellipſe *ZCA*, Fig. 213. & d'en couper le ſegment *CAC*, qui convient au verre de Fig. 211. lorſque les rayons *EC*, *Bb* tombent ſur le verre *CA* paralleles à l'axe *AH*.

Fig. 210. 179. 3. Lorſque Fig. 210. les rayons *GC* viennent d'un point *G* de l'axe, la convexité *CAC* eſt la premiere partie *AC*, Figure 179. d'une Ovale du premier genre, dont les foyers ſont *F*, *G* Figure 179. qui ſont les points *G*, *H* Fig. 210.

Or on a fait voir Sect. 3. Art. 1. n. 3. que Fig. 179. le rayon *FC*, qui eſt dans l'air, ſe rompt au point *C*, & va dans le verre au point *G*.

Ainſi Fig. 210. le rayon *GC* qui eſt dans l'air, ſe rompra pour aller dans le verre en *H*; de même le rayon *Gb*, ſe rompra pour aller dans le verre au point *H*, ſi tout l'eſpace *ACH* eſt de verre : mais comme le verre finit en *CYC*, le rayon *bc* ſe rompra de nouveau en *c* pour aller en *F*, comme l'on a dit §. 2.

A preſent il s'agit de déterminer le ſommet *A* de l'Ovale *CAC*, Fig. 210. étant donnez les points *G*, *C*, *H*, *M*. Par la nature de l'Ovale du premier genre la difference de *GC* & de *GA* eſt à la difference de *HC* & de *HA*, comme *d* eſt à *e*.

Mettons *HC*, *b*; la difference de *CH* & de *HM*, qui eſt connuë, *k*; *HM* ſera $b - k$. Nommons *AM*, *x*; la toute $HA = HM + AM$ ſera $b - k + x$; ſouſtrayons *CH*, *b* de *HA*, $b - k + x$; la difference ſera $x - k = AH - CH$.

Mettons auſſi *GC*, *c*; & *g* la difference de *GC* & de *GM*, qui eſt connuë; la ligne *GM* ſera $c - g$; & $GA = GM - AM$, $c - g - x$; ſouſtrayons *GA* de *GC*, la difference eſt $g + x = GC - GA$.

Mais $d : e :: GC - GA, g + x : AH - CH, x - k$. Donc $ge + ex = dx - dk$; $x = \frac{eg + dk}{d - e} = AM$. Et parcequ'on a le point *M*, on aura le ſommet *A*; avec lequel & les foyers *G*, *H*, on décrira l'Ovale *CAC* du premier genre.



ARTICLE II.

La convexité de l'une des ſuperficies des verres a la proportion donnée avec la convexité de l'autre.

M. DESCARTES.

POſons maintenant pour l'autre cas, Fig. 214. 215. qu'on ne donne que les points *G*, *C* & *F*, avec la proportion qui eſt entre les lignes *AM* & *YM*, & qu'il faille trouver la Figure du verre *ACY*, qui faſſe que tous les rayons, qui viennent du point *G*, s'aſſemblent au point *F*.

Fig. 214. 215.

Comment on peut faire un verre, qui ait le même effet, que le precedent: & que la convexité de l'une de ſes ſuperficies ait la proportion donnée avec celle de l'autre.

On peut derechef ici ſe ſervir de deux Ovales, dont l'une *AC* ait *G* & *H* pour ſes points brûlans; & l'autre *CY* ait *F* & *H* pour les ſiens. Et pour les trouver, premierement ſuppoſant le point *H* qui eſt commun à toutes deux être connu, je cherche *AM* par les trois points *G*, *C*, *H*, en la façon tout maintenant expliquée; à ſavoir prenant *k* pour la difference, qui eſt entre *CH* & *HM*, & *g* pour celle qui eſt entre *GC* & *GM*: & *AC* étant Fig. 214. la premiere partie de l'Ovale du premier genre, j'ai $\frac{ge+dk}{d-e}$ pour *AM*. Puis je cherche auſſi *MY* par les trois points *F*, *C*, *H*, en ſorte que *CY* ſoit la premiere partie d'une Ovale du troiſiéme genre; & prenant *y* pour *MY*, & *f* pour la difference, qui eſt entre *CF* & *FM*, j'ai $f+y$ pour celle, qui eſt entre *CF* & *FY*: puis ayant déja *k* pour celle, qui eſt entre *CH* & *HM*, j'ai $k+y$ pour celle qui eſt entre *CH* & *HY*, que je ſçai devoir être à $f+y$, comme *e* eſt à *d*, à cauſe de l'Ovale du troiſiéme genre, d'où je trouve que *y* ou *MY* eſt $\frac{fe-dz}{d-e}$. Puis joignant enſemble les deux quantitez trouvées pour *AM* & *MY*, je trouve $\frac{ge+fe}{d-e}$ pour la toute *AY*. D'où il ſuit que de quelque côté que ſoit ſuppoſé le point *H*, cette ligne *AY* eſt toûjours compoſée d'une quantité, qui eſt à celle dont les deux enſemble *GC* & *CF* ſurpaſſent la toute *GF*, comme *e* la moindre des deux lignes qui ſervent à meſurer les refractions du verre propoſé eſt à $d-e$ la difference qui eſt entre ces deux lignes; ce qui eſt un aſſez beau Theorême.

Or ayant ainsi la toute *AY*, il la faut couper selon la proportion que doivent avoir ses parties *AM* & *MY*; au moyen de quoi, pour ce qu'on a déja le point *M*, on trouve aussi les points *A* & *Y*, & ensuite le point *H* par le Problême precedent. Mais auparavant il faut regarder, si la ligne *AM* ainsi trouvée est plus grande que $\frac{ge}{d-e}$, ou plus petite, ou égale. Car si elle est plus grande, on apprend de là que la courbe *AC*, Fig. 214. doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre, & *CY* la premiere d'une du troisiéme, ainsi qu'elles ont été ici supposées. Au lieu que si elle est plus petite, cela montre que c'est *CY*, Fig. 215. qui doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre; & que *AC* doit être la premiere d'une du troisiéme. Enfin si *AM* est égale à $\frac{ge}{d-e}$, les deux courbes *AC*, & *CY*, Figure 216. doivent être deux hyperboles.

1. Dans ce cas on donne la proportion d'une convexité à l'autre, c'est-à-dire que l'on vous détermine la proportion que la ligne *AM*, dont le point *A* est le sommet d'une convexité *CA*, doit avoir avec la ligne *MY*, dont le point *Y* est le sommet de l'autre convexité *CY*. Car on n'entend pas autre chose ici par la proportion des convexitez: de sorte que si *AM* étoit égale à *MY*, on diroit que les convexitez *CA*, *CY* sont égales, quoique l'une des lignes courbes, comme *AC* fût en effet bien differente de l'autre courbe *CY*, & que la courbure de l'une fût beaucoup plus grande que la courbure de l'autre.

Comme ce cas doit produire les mêmes effets que le precedent; il ne doit pas seulement traiter des rayons d'incidence, qui partent d'un point *G* de l'axe *GA*, & qui vont se réünir à un autre point *F* du même axe: mais encore des rayons, qui viennent dans l'air paralleles à l'axe *GA*, & qui doivent se réünir à un point donné *F*. Voyez n. 7. suivant, pourquoi M. DESCARTES n'a rien dit des rayons paralleles.

2. La convexité *CA*, Fig. 214. du verre *ACY* est la même, que la
Fig. premiere partie *AC*, Fig. 179. d'une Ovale du premier genre. Les foyers
214. *G*, *H* de l'Ovale *CA*, Fig. 214. sont les mêmes que les foyers *F*, *G* de
179. l'ovale *CA*, Figure 179. Ainsi il est certain, suivant ce qui a été
197. expliqué, Sect. 3. Art. 1. n. 3. que tout rayon *Gb*, Fig. 214. qui est dans l'air, & qui tombe sur la convexité *AC* du verre *ACY*, se rompra au point *b*, pour aller au foyer *H*, & il y iroit, si tout l'espace *ACH* étoit de verre. Mais parceque le verre est terminé par la courbe *CcY*, le rayon *Gb*, ne fera que le chemin *bc*. De plus la convexité *CY*, Fig. 214. est la même que la premiere partie *AC*, Figure 197. d'une Ovale du troisiéme genre; & leurs foyers sont les points *F*, *H*.

Ainsi

Ainſi ſelon ce qui a été dit, Sect. 3. Art. 3. n, 3. il eſt encore certain que le rayon *bc*, Fig. 214. qni eſt dans le verre *ACY*, & qui tend au point *H*, ſe rompra au point *c* pour aller dans l'air au point *F*. C'eſt pourquoi le verre *ACY*, Fig. 214. réünira au point *F* les rayons qui viennent du point *G*.

La convexité *CA*, Fig. 215. du verre *ACY* eſt la même, que la premiere partie *AC*, Fig. 197. d'une Ovale du troiſiéme genre. Les foyers *G*, *H* de l'Ovale *CA*, Fig. 215. ſont les mêmes que les foyers *F*, *H* de l'Ovale *CA*, Fig. 197. Donc par l'Art. 3. n. 3. Sect. 3. le rayon *Gb*, Fig. 215. qui eſt dans l'air, & qui tombe ſur la convexité *CA* du verre *CAY*, ſe rompra dans ce verre en *bc*, comme s'il venoit du point *H*, & qu'il eût ſuivi dans le même milieu la droite *Hbc*. Après cela la convexité *CY*, Fig. 215. eſt la même que la premiere partie *AC*, Fig. 179. d'une Ovale du premier genre. Les foyers *H*, *F* de l'Ovale *CY*, Fig. 215. ſont les mêmes que les foyers *G*, *F* de l'Ovale *AC*, Fig. 179. Donc par l'Art. 1. n.3. Sect. 3. le rayon *bc*, Fig. 215. qui va dans le verre *ACY*, comme s'il venoit du foyer *H*, & qui tombe dans l'air au point *c*, ſe rompra pour aller au foyer *F*. D'où il ſuit que le verre *ACY*, Figure 215. raſſemblera au point *F* les rayons qui viennent du point *G*. Fig. 215. 197. 179.

Le verre *ACY*, Figure 216. eſt convexe des deux côtez; la convexité *AC* eſt une hyperbole, dont le ſommet eſt *A*, & *G* le foyer exterieur; la convexité *CY* eſt encore une hyperbole, dont le ſommet eſt *Y*, *F* le foyer exterieur; une proprieté commune à ces deux hyperboles eſt, que la diſtance de leurs deux foyers eſt à leur axe déterminé comme *d* à *c*, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction, que la lumiere ſouffre en entrant de l'air dans le verre. Ainſi il eſt évident par ce qui a été demontré, Sect. 4. n. 2. qu'un rayon quelconque *Gb*, qui eſt dans l'air, & qui tombe ſur la convexité *CAb* du verre *CAY*, ſouffre refraction au point *b*, & qu'il ira par *bc* dans le verre, de telle ſorte que *bc* ſoit parallele à l'axe *GA*. Il eſt encore évident, que ce rayon *bc*, qui entre dans l'air au point *c*, ſe rompra pour aller au foyer exterieur *F*. Il ſuit donc que le verre hyperbolique *ACY* convexe des deux côtez réünira au point *F* les rayons qui viennent du point *G*. Fig. 216.

Les trois verres, Fig. 214. 215. 216. peuvent donc reſoudre le ſecond cas du Problême pour les rayons, qui viennent d'un point donné *G* de l'axe *GA*, & qui doivent ſe réünir au point *F* du même axe. Il reſte à examiner quand c'eſt que chacun de ces verres doit ſervir.

3. Fig. 214. Les points *G*, *C*, *F* ſont donnez avec la proportion de la ligne *AM* à la ligne *MY*; *A* doit être le ſommet de *CbA*, qui eſt la premiere partie d'une Ovale du premier genre, dont les foyers ſont *G* donné, *H* inconnu; *Y* doit être le ſommet de *CcY*, qui eſt la premiere partie d'une Ovale du troiſiéme genre, dont les foyers ſont *F* donné, *H* inconnu. Fig. 214.

FIG. 214. Je regarde le foyer H, qui eſt commun aux deux Ovales, comme donné; c'eſt-à-dire, que je le ſuppoſe là où je veux.

Je cherche la valeur de la droite AM par les trois points G, C, H.

Je nomme HC, r; la difference de CH & de HM, k; HM ſera donc $r - k$.

Je nomme encore AM, x; la toute HA ſera $r - k + x$. Si je ſouſtrais HC, r de HA, $r - k + x$, il reſtera $HA - HC$, $- k + x$ pour la difference de HA & de HC.

Je nomme GC, c; la difference de GC & de GM; g; GM ſera donc $c - g$; & $GA = GM - MA$, $c - g - x$; ſi l'on ſouſtrait GA, $c - g - x$ de GC, c; il reſte $GC - GA$, $g + x$ pour la difference de GC & de GA.

Mais par la nature de l'Ovale du premier genre, Sect. 3. Art. 1. n. 1. $d : e :: g + x$ difference de GC & de GA : $x - k$ difference de HA & de HC. Donc $x = \frac{ge + dk}{d - e} = AM$, proprieté de la premiere partie des Ovales du premier genre.

On doit à preſent chercher la ligne droite YM par les trois points F, C, H. On nommera CF, h; la difference de CF & de FM, f; FM ſera donc, $h - f$; il faut encore nommer MY, y; la ligne $FY = FM - FY$ ſera $h - f - y$. Si l'on ſouſtrait FY, $h - f - y$ de CF, h; il reſte $CF - FY$, $f + y$ pour la difference de CF & de FY.

On nommera comme auparavant CH, r; la difference de CH & de HM, k; HM ſera $r - k$; $HY = HM - MY$, $r - k - y$. Si l'on ſouſtrait HY, $r - k - y$ de HC, r; il reſte $HC - HY$, $k + y$ pour la difference de CH & de HY.

Mais par la nature de l'Ovale du troiſiéme genre, Sect. 3. Art. 2. n. 1. $d : e :: f + y$ difference de CF & de FY : $k + y$ difference de CH & de HY. Donc $y = \frac{ef - dk}{d - e} = MY$.

Ajoûtons AM, $\frac{ge + dk}{d - e}$ avec MY, $\frac{ef - dk}{d - e}$; la ſomme $\frac{eg + ef}{d - e}$ eſt la ligne AY, qui eſt toute connuë.

Après cela je coupe AY en deux parties, qui ayent la proportion donnée de AM à MY; afin de déterminer la longueur des lignes AM, MY, & par conſequent les ſommets A, Y.

Lorſque vous connoiſſez les trois points C, Y, F; vous cherchez par le Problême du premier cas, Art. 1. le point H, qui eſt encore inconnu, ce que vous ferez ainſi.

Les points F, C, Y ſont connus; donc les lignes FY, FC le ſont encore, auſſi bien que leur difference, que j'appelle a. Mais par la nature de l'ovale du troiſiéme genre $d : e : a$, la difference de FC, & de FY : $\frac{ae}{d}$ difference de HY & de HC. Et ſi vous nommez la plus grande HC, m; la plus petite HY ſera $m - \frac{ae}{d}$. Nommez la connuë YM, y; vous aurez $HM = HY + YM$, $m - \frac{ae}{d} + y$, que vous nommerez s.

De CH, m soustrayez HM, $m - \frac{ae}{d} + y$, il reste $\frac{ae}{d} - y$ difference de CH & de MH, que vous appellerez k, & CH sera $HM + k = s + k$. Nommez aussi la connuë CM, n.

Dans le triangle rectangle CMH, $\overline{CH}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{HM}^2$, $ss + 2ks + kk = nn + ss$; $2ks = nn - kk$; $s = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$, qui étant toute connuë donne le point cherché H.

Il faut remarquer 1° que $AM = \frac{eg + dk}{d - e}$ est plus grande que $\frac{ge}{d - e}$, ou que la quantité dk est positive, & que c'est là une proprieté de la premiere partie des ovales du premier genre, 2° que la toute AY est $\frac{ef + eg}{d - e}$; or $\frac{ef + eg}{d - e} : f + g :: e : d - e$. C'est-à-dire que AY, $\frac{ef + eg}{d - e}$ est à f difference de CF & de FM, $+ g$ difference de GC & de GM, ou que AY est aux deux quantitez dont GC & CF surpassent FG : comme e la moindre des quantitez qui mesurent la refraction de la lumiere, qui passe de l'air dans le verre, ou du verre dans l'air, est à $d - e$ difference des deux quantitez qui mesurent cette refraction.

4. Fig. 215. Les points G, C, F sont donnez avec la proportion de la ligne AM à la ligne AY. A doit être le sommet de CAb, qui est la premiere partie d'une Ovale du troisiéme genre, dont les foyers sont G donné, H inconnu; Y doit être le sommet de CYc, qui est la premiere partie d'une Ovale du premier genre, dont les foyers sont F donné, H inconnu. Je regarde le foyer H, qui est commun aux deux ovales, comme donné. Fig. 215.

Je cherche AM par les trois points G, C, H. Je nomme HC, r; la difference de HC & de HM, k; HM sera $r - k$; & nommant AM, x; j'aurai $HA = HM - AM$, $r - k - x$; je soustrais HA de HC, il reste $k + x$ pour la difference de HA & de HC.

On trouve comme n. 3. $g + x$ pour la difference de GC & de GA.

Maintenant par la nature de l'ovale du troisiéme genre, Sect. 3. Art. 3. n. 1. $d : e :: g + x$ difference de GC & de GA : $k + x$ difference de HC & de HA : donc $x = \frac{eg - dk}{d - e} = AM$.

Je cherche YM par les points F, C, H. On trouve comme n. 3. $f + y$ pour la difference de FC & de FY, étant MY, y.

On vient de trouver HM, $r - k$; $HY = HM + MY$ est $r - k + y$. Soustrayons HC, r de HY, $r - k + y$; il reste $y - k$ pour la difference de HC & de HY.

Maintenant par la nature de l'ovale du premier genre, Sect. 3. Art. 1. n. 1. $d : e :: f + y$ difference de FC & de FY : $y - k$ difference de HC & de HY. Donc $y = \frac{ef + dk}{d - e} = YM$.

Ajoûtons AM, $\frac{eg - dk}{d - e}$ à YM, $\frac{ef + dk}{d - e}$; la toute AY est $\frac{eg + ef}{d - e}$ connuë si l'on coupe AY selon la proportion donnée de AM à MY; l'on aura la longueur des lignes AM, MY; & les sommets A, Y.

Après que vous connoissez les points, C, Y, F; vous cherchez par le

Problême du premier cas, Article 1. le point H, qui reste encore inconnu.

Les points F, C, Y étant connus, les lignes FY, FC sont connuës, avec leur difference, que je nomme a. Mais par la nature de l'Ovale AYc du premier genre, $d : e :: a$, difference de FC & de FY : $\frac{ae}{d}$, difference de HY & de HC; & si l'on nomme la moindre HC, m; la plus grande HY sera $m + \frac{ae}{d}$; & $HM = HY - YM$, $m + \frac{ae}{d} - y$, que je nomme s.

De HC, m soustrayons HM, $m + \frac{ae}{d} - y$; il reste $y - \frac{ae}{d}$, difference de HC & de HM, que je nomme k; & HM étant s; HC sera $s + k$. Soit $CM = n$.

Dans le triangle rectangle HCM l'on trouvera comme n. 3. $s = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k = MH$, ce qui donne le point cherché H.

Il faut remarquer 1° que $AM = \frac{eg - dk}{d - e}$ est plus petite que $\frac{ge}{d - e}$, & que c'est là une proprieté de la premiere partie des Ovales du troisiéme genre. 2°. Que la toute AY est $\frac{eg + ef}{d - e}$, &c. comme n. 3. à la fin.

FIG. 216. 205. 5. Fig. 216. Les points G, C, F sont donnez avec la proportion de AM à MY; la convexité CAb est une hyperbole, dont le foyer exterieur est G; la convexité CYc est encore une hyperbole, dont le foyer exterieur est F.

Cherchons MY par les points F, C. On a trouvé Sect. 4. n. 2. Fig. 206. CF, $z = \frac{2dy + de + ee}{2e}$, étant F le foyer exterieur de l'hyperbole AC, FA distance du foyer F au sommet A, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; AM, y. L'hyperbole CYc, Fig. 216. a aussi d pour la distance de ses foyers, e pour son axe déterminé; YM, y; elle aura donc aussi FY distance du foyer F au sommet Y, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; & $FC = \frac{2dy + de + ee}{2e}$. Donc $FC - FY$ difference de FC & de FY, $\frac{2dy + de + ee}{2e} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e = \frac{dy}{e}$.

De plus $FM = FY + YM$, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e + y$; & $FC - FM$ difference de FC & de FM, $\frac{2dy + de + ee}{2e} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e - y = \frac{dy - ey}{e}$. Or 16. 6. Eucl. $\frac{dy - ey}{e} : \frac{dy}{e} :: d - e :: d$.

Ensuite nommons FC, z; la difference connuë de FC & de FM, f; FM sera $z - f$; & $FY = FM - YM$, $z - f - y$. Soustrayons FY de FC, le reste $f + y$ est la difference de FY & de FC. De sorte que si dans l'analogie $\frac{dy - ey}{e} : \frac{dy}{e} :: d - e : d$, nous substituons f pour $\frac{dy - ey}{e}$, parceque ces deux valeurs sont la difference de FC & de FM; & $f + y$ pour $\frac{dy}{e}$, parceque ces deux valeurs sont la difference de FC & de FY: nous aurons cette nouvelle analogie $f : f + y :: d - e : d$, & $y = \frac{ef}{d - e} = YM$.

Cherchons à present AM par les points G, C. L'hyperbole CA est semblable à l'hyperbole CY, c'est-à-dire que la distance des foyers est aussi à l'axe determiné comme d à e; & AM étant x, GC sera $\frac{2dx + de + ee}{2e}$,

comme FC étoit $\frac{2dy+de+ee}{2e}$, étant $MY = y$; GA ſera auſſi $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$. Donc $GC - GA = \frac{2dx+ee+de}{2e} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e = \frac{dx}{e}$, difference de GC & de GA.

On a $GM = GA + AM$, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e + x$, & $GC - GM$, $\frac{2dx+de+ee}{2e} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e - x = \frac{dx-ex}{e}$, & $\frac{dx-ex}{e} : \frac{dx}{e} :: d - e : d$.

Après cela appellons GC, c; la difference connuë de GC & de GM, $g = \frac{dx-ex}{e}$; GM ſera $c - g$; $GA = GM - AM$, $c - g - x$. Souſtrayons GA de GC, le reſte $g + x$ eſt la difference de GC & de $GA = \frac{dx}{e}$. De ſorte que ſi dans l'analogie precedente, nous ſubſtituons g pour $\frac{dx-ex}{e}$, $g + x$ pour $\frac{dx}{e}$; ce ſera $g : g + x : d - e : d$, & $x = \frac{eg}{d-e}$.

La ligne $AY = AM + MY$ eſt donc $\frac{ef+eg}{d-e}$, toute connuë. On la coupe, &c.

Il faut remarquer 1° que AM eſt égale à $\frac{eg}{d-e}$, & que c'eſt-là une proprieté des hyperboles. 2°. Que AY eſt $\frac{eg+ef}{d-e}$, &c. comme n. 3. à la fin.

6. De ce que l'on a expliqué n. 3. 4. 5. nous conclurrons avec M. DESCARTES, 1° que de quelque côté que l'on ſuppoſe le foyer H, la ligne AY eſt toûjours $\frac{eg+ef}{d-e}$, & qu'elle eſt toûjours composée d'une quantité, qui eſt à celle, dont les deux GC, FC ſurpaſſent GF; comme e la moindre des deux lignes, qui ſervent à meſurer les refractions du verre propoſé ACY, Fig. 214. 215. 216. eſt à $d - e$ la difference qui eſt entre ces deux lignes. 2°. Que ſi la ligne $AM = \frac{eg+dk}{d-e}$ eſt plus grande que $\frac{eg}{d-e}$, comme il eſt arrivé n. 3. Fig. 214. la courbe AC doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre, & CY la premiere d'une ovale du troiſiéme. Au lieu que ſi $AM = \frac{eg-dk}{d-e}$ eſt moindre que $\frac{eg}{d-e}$, comme n. 4. Fig. 215. la courbe AC doit être la premiere partie d'une ovale du troiſiéme genre, & CY la premiere d'une ovale du premier genre. Enfin ſi AM eſt égale à $\frac{ge}{d-e}$, n. 5. Fig. 216. Les deux courbes AC, CY doivent être des hyperboles. CA étant une hyperbole, CY peut encore être l'ellipſe, dont nous allons parler.

7. Fig. 214. Les points F, C, ſont donnez avec la proportion de AM Fig.
à MY, & il faut que les rayons gb, qui ſont dans l'air paralleles à l'axe 214.
GA, aillent, après avoir traverſé le verre ACY, ſe réünir au point F. 215.

La convexité CAb doit être une ellipſe, dont le foyer le plus éloigné du ſommet A ſoit H, & dont l'axe ſoit à la diſtance des foyers, comme d eſt à e. Car on a démontré, Sect. 4. n. 1. que le rayon bg ſe rompra alors en entrant dans le verre au point b, & ira par bc, de ſorte qu'il tendra au foyer H. Et parceque le rayon bc, lorſqu'il ſort du verre au point c, ſouffre une nouvelle refraction, il faut que la convexité CYc ſoit la premiere partie d'une ovale du troiſiéme genre, dont les foyers ſoient F, H; car les rayons qui dans le verre tendent au point H, ſe réüniſſent au point F, Sect. 3. Art. 3. n. 3.

Ensuite si comme n. 3. on cherche MY par les points F, C, H, c'est $y = \frac{ef - dk}{d - e}$.

Après cela l'on cherche AM par les points C, H. On a trouvé, Sect 4. n. 1. Fig. 205. CF, $z = \frac{dd + de - 2ey}{2d}$, étant F le foyer le plus éloigné du sommet A de l'ellipse; AM, y; FA distance du sommet A au foyer F, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$. L'ellipse CA, Fig. 214. a aussi d pour son axe, e pour la distance des foyers, étant AM, x; elle aura donc aussi AH distance du foyer le plus éloigné au sommet A, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; & HC, $\frac{dd + de - 2ex}{2d}$. Ainsi $HA - HC$ difference de HA & de HC sera $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e \frac{- dd - de + 2ex}{2d} = \frac{ex}{d}$.

De plus $HM = HA - AM$, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - x$; & $HC - HM$ difference de HC & de HM, $\frac{dd + de - 2ex}{2d} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e + x = \frac{dx - ex}{d}$. Or 16. 6. Eucl. $\frac{dx - ex}{d} : \frac{ex}{d} :: d - e : e$. Parceque le produit des extrêmes & des moyennes est le même.

Maintenant nommons HC, r; la difference de HC & de HM, k; HM sera $r - k$; & $HA = HM + MA$, $r - k + x$. Soustrayons HC de HA, le reste $x - k$ est la difference de HC & de HA. De sorte que si dans l'analogie on substituë k pour $\frac{dx - ex}{d}$, $x - k$ pour $\frac{ex}{d}$; on aura $x = \frac{dk}{d - e} = AM$.

Ainsi la toute $AY = AM + MY$ sera $\frac{ef}{d - e}$, qui est connuë, parceque les points C, F étant donnez, les lignes FC, FM, & leur difference f sont connuës. On divisera donc AY suivant la proportion donnée de AM à MY, ce qui déterminera la longueur des lignes AM, MY, & les sommets A, Y.

Après cela l'on cherchera comme n. 3. le foyer H, qui est encore inconnu.

Comme ce cas, où l'on demande que les rayons bc, qui tombent sur le verre ACY soient paralleles à l'axe GA, n'est pas fort different de celui qui a été expliqué n. 3. c'est peut-être pour cela que M. DESCARTES n'en a rien dit.

ARTICLE III.

De quelques cas, que M. DESCARTES *n'a pas resolus.*

M. DESCARTES.

ON pourroit étendre ces deux Problêmes à une infinité d'autres cas, que je ne m'arrête pas à déduire, à cause qu'ils n'ont aucun usage dans la Dioptrique.

On pourroit aussi passer outre, & dire, lorsque l'une des superficies du verre est donnée, pourveu qu'elle ne soit que toute plate, ou composée de Sections coniques, ou de cercles, comment on doit faire son autre superficie, afin qu'il transmette tous les rayons d'un point donné à un autre point donné. Car ce n'est rien de plus difficile, que ce que je viens d'expliquer; ou plûtôt c'est chose beaucoup plus facile, à cause que le chemin en est ouvert. Mais j'aime mieux, que d'autres le cherchent, afin que s'ils ont encore un peu de peine à le trouver, cela leur fasse d'autant plus estimer l'invention des choses, qui sont ici démontrées.

1. Les Figures convexes & concaves des ovales n'ont évidemment aucun usage dans la Catoptrique : puisque nous ne connoissons point de matiere, qui détermine l'angle d'incidence & de reflexion à être tel ; que le sinus de l'angle d'inclinaison soit au sinus de l'angle reflechi, comme dans la refraction le sinus de l'angle d'inclinaison est au sinus de l'angle rompu.

Ces mêmes Figures ovales ne sont pas d'un grand usage dans la Dioptrique ; non plus que les elliptiques & hyperboliques ; non seulemeut à cause de la difficulté qu'il y a à les travailler : mais encore parcequ'ils ne réünissent pas en un seul point les rayons, qui viennent de chaque point de l'objet, qui est autour de l'axe. De là vient, qu'on voit très-peu de verres elliptiques & hyperboliques, & qu'on n'en voit aucun d'ovales, tels qu'on vient de les décrire.

L'experience a fait connoître, que la Figure Spherique étoit la plus propre à produire les effets, qu'on attend des verres travaillez : peut-être parcequ'elle réünit mieux qu'aucune autre en chaque point de l'image tous les rayons, qui viennent de chaque point de l'objet.

2. Soit donnée, Fig. 217. la ligne *ADC*, qui selon M. DESCARTES peut être une droite, ou un cercle, ou une Section conique. Soit encore donné le point *G* sur l'axe *GA*, duquel partent les rayons incidens *GC*, *GD*. Soit aussi donné le point *H* sur ce même axe, où ces rayons après avoir traversé *ACca* doivent tous se réünir. Il faut trouver la courbe *cda*, qui produise cet effet. Fig. 217.

1°. Je prend le point *C*, qui deslors est donné, par lequel je tire *RCP* perpendiculaire à la ligne *ADC*. Je coupe *CR* d'une longueur arbitraire, que je divise en deux également au point *V*; d'où comme centre, & de l'intervale *VC* je décris le demi-cercle *CTR*, qui coupe *GC* en *S*. Ensuite je joints *RS*, & j'inscrits *RT*, qui soit à *RS*, comme *e* à *d*, & je mene *TCcF*. *CF* est le rayon rompu de l'incident *GC* : car l'angle *GCR* est l'angle d'inclinaison, l'angle *PCF* ou son égal *TCR* est l'angle rompu.

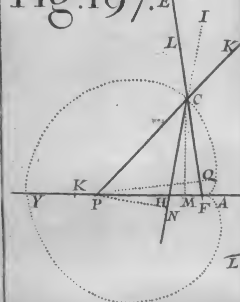
Mais par le Theorême de Trigonometrie, Liv. I. Part. 3. Sect. I. Art. 2. Dans le triangle rectangle *RSC*, comme *CR* est au sinus total : ainsi *RS* est au sinus de l'angle d'inclinaison *SCR* ou *GCR*. Et dans le triangle rectangle *RTC*, comme *CR* est au sinus total : ainsi *RT* est au sinus de l'angle rompu *TCR*. Donc 11. 5. Eucl. *RS* est au sinus de l'angle d'inclinaison : comme *RT* est au sinus de l'angle rompu ; & *RS* peut être pris pour le sinus de l'angle d'inclinaison, & *RT* pour le sinus de l'angle rompu. Or par la construction *RS : RT :: d : e* ; dont le rayon *CF* a les conditions necessaires pour être le rayon rompu de *GC*. On trouvera de la même maniere tous les rayons rompus *Df* des autres rayons incidens *GD*, de sorte que les points *C*, *D* étant pris à volonté, les points *F*, *f* sont connus. Ce qui prouve que la ligne donnée *ADC* peut être une ligne droite, & même toute courbe, dont on saura tirer les perpendiculaires sur chaque point *C*, *D* ; parceque deslors on trouvera les rayons rompus, qui répondent aux rayons d'incidence.

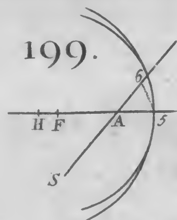
FIG. 217. 218. 2°. Nous avons donc Fig. 218. qui est la même que Fig. 217. les rayons *Cc*, *Dd*, qui sont dans le verre, qui tendent à differens points *F*, *f* de l'axe *GA*, & qui doivent tous se réünir dans l'air au point donné *H*. Il faut dans ce cas chercher l'un après l'autre, chaque point *c*, *d*, afin qu'en les joignant, on décrive la courbe *cda* cherchée.

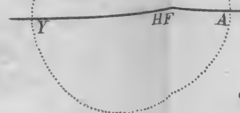
Cherchons le point *c*, qui est dans le rayon rompu *CcF*, dont les points *C*, *F* sont connus, la perpendiculaire *CM* détermine le point *M*, le point *H* est encore donné : & je prends le point *a* pour le sommet de la courbe *cda*.

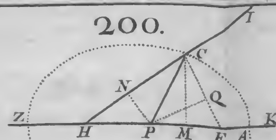
Ces choses étant connuës on cherchera comme Art. I. à quelle courbe appartient le point *c*, en examinant si le point *F* est plus près, ou plus loin du point *a* que le point *H*, si *dh* est plus grande, moindre ou égale à $2ce + eh$. Et l'on trouvera que le point *c* appartient à la premiere partie d'une Ovale du troisiéme genre dont *H*, *F* sont les foyers, si le point *H* est plus loin du point *a* que le point *F* ; mais si *H* est plus près que *F*, alors le point *c* appartiendra à la seconde partie d'une Ovale du troisiéme genre, pourveu que *dh* soit plus grande que $2ce + eh$; & il appartiendra à la seconde partie d'une Ovale du second genre, lorsque *dh* est égale ou moindre que $2ce + eh$; enfin si le point *F* est le même que le point *H*, le point *c* appartiendra à un cercle dont *H* est le centre. Ce qui a été assez expliqué, Art. I.

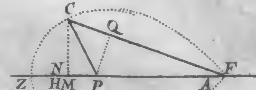
Supposons que le point *c* appartient à la seconde partie d'une Ovale du troisiéme genre. Du point *F* comme centre, de l'intervale *Fa* décrivez l'arc *aB*, qui coupera la ligne *Fc* en *B* ; du point *H* l'arc *ab*, qui coupera la ligne *Hc* en *b* ; *cB* est la difference de *Fc* & de *Fa* ; *bc* la difference de *Hc* & de *Ha*, abaissez *cm* perpendiculaire sur *GA*. Nommons les connuës *FC*, *a* ; *CM*, *f* ; *FM*, *h* ; *HM*, *k* ; & comme Sect. 3. Art. 3.

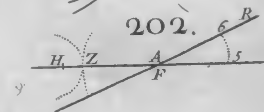


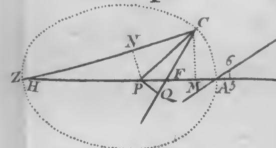


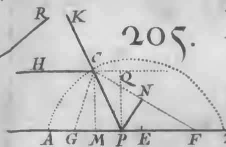


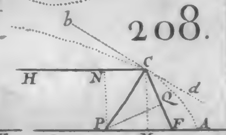


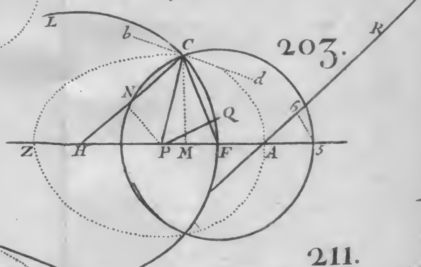


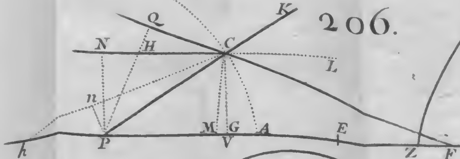


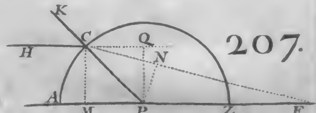


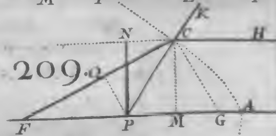




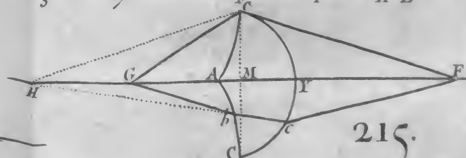


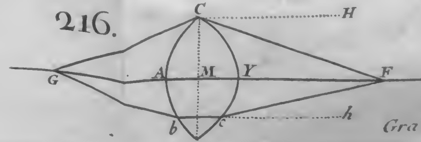


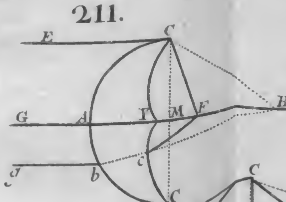


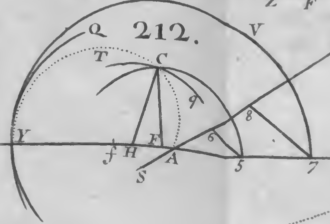


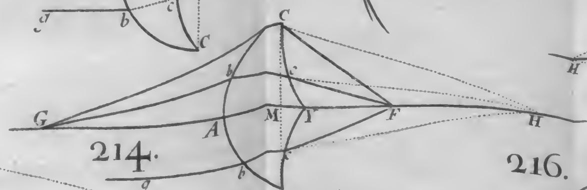


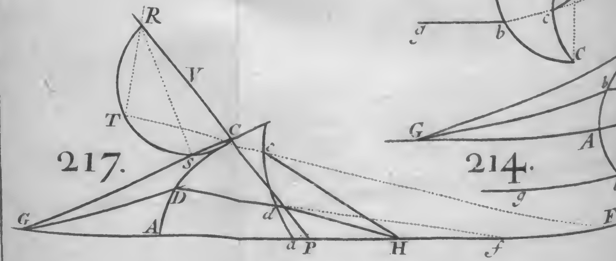












210.

Gravé par Daudet.

Art. 3. pour Fig. 196. $Fa = FB$, c; $Ha = Hb$, b; les inconnuës cm, x; am, y; cB, z; cb, $\frac{ez}{d}$; $Fc = FB + Bc$, $c + z$; $Hc = Hb + bc$, $b + \frac{ez}{d}$; $Fm = Fa + am$, $y + c$; Hm, $b + y = Ha + am$.

Maintenant dans les triangles FCM, Fcm, FM, h : FC, a :: Fm, $y + c$: Fc, $c + z$; $y = \frac{-ac + ch - hz}{a}$. Dans les triangles rectangles Fcm, Hcm, $\overline{Fc}^2 - \overline{Fm}^2 = \overline{cm}^2 = \overline{Hc}^2 - \overline{Hm}^2$, $2cz + zz - 2cy = \frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} - 2by$. Substituons la valeur de y dans ces deux valeurs de xx, nous aurons $zz \frac{+2acddz - 2cddhz - 2abdez + 2bddhz}{add - aee} = \frac{2abcdd - 2bcddh - 2accdd + 2ccddh}{add - aee} = zz + 2mz = nn$, en faisant $\frac{2acdd - 2cddh - 2abde + 2bddh}{add - aee} = 2m$, $\frac{2abcdd - 2bcddh - 2accdd + 2ccddh}{add - aee} = nn$. Et l'on trouve $z = -m + \sqrt{mm + nn} = cB$, & $Fc = FB + Bc$, $c - m + \sqrt{mm + nn}$. C'est pourquoi si sur FC vous coupez $Fc = c - m + \sqrt{mm + nn}$, vous aurez le point c de la courbe cherchée cda.

On cherchera de la même maniere le point d, qui appartiendra aussi à une Ovale, dont les foyers sont H, F. Enfin chaque point de la courbe adc, appartiendra à une ovale particuliere; & H sera le foyer commun de toutes, & F, f les foyers particuliers. Excepté lorsque le rayon rompu cF tombera au point H, car alors, comme on l'a déja dit, c'est un cercle, dont il faut déterminer le rayon Fc, en le faisant égal à Fa.

3°. Il faut ainsi chercher chaque point c, d de la courbe acd Fig. 218. lorsque ADC est une ligne droite, ou la convexité d'un cercle, d'une parabole; soit que les rayons incidens viennent paralleles à l'axe, soit qu'ils partent d'un seul point de cet axe; lorsque ADC est la convexité d'une ellipse, & que les rayons viennent d'un seul point de l'axe; lorsque ADC est la convexité d'une hyperbole, & que les rayons sont paralleles à l'axe.

ARTICLE IV.

Comment M. DESCARTES *a pû trouver ce qu'il enseigne dans cette quatriéme Partie.*

1. LE Problême que M. DESCARTES a ici resolu, consiste en ce que, l'on donne un point, d'où partent tous les rayons d'incidence, ou bien on les suppose tous paralleles entr'eux; l'on donne encore le point, où ces rayons doivent tous se réünir après avoir traversé un verre. Il faut trouver la Figure que doit avoir un verre pour produire cet effet; quelles doivent être ses deux convexitez, ou ses deux concavitez, ou sa convexité d'un côté, & sa concavité de l'autre.

Ce Problême doit donner des verres propres pour les lunettes, & des verres brûlans, Le verre qui rassemble en un seul point de l'image de l'ob-

jet tous les rayons qui partent d'un ſeul point de l'objet, rend cette image diſtincte; & il eſt bon pour des lunettes. Le verre qui ramaſſe en un point, ou en un petit eſpace, qu'on appelle foyer, tous les rayons qui viennent d'un corps lumineux, comme du Soleil, brûle les corps, qu'on applique à ce foyer.

Ou les rayons ſont dans l'air, & tombent ſur le verre; ou ils ſont dans le verre, & ſortent dans l'air, c'eſt-à-dire, ou ils entrent dans le verre par la ſurface, qui regarde l'objet & le corps lumineux; ou ils ſortent du verre par la ſurface, qui eſt tournée du côté de l'image & du foyer.

Dans ces deux circonſtances, l'image doit ſe peindre & le foyer doit ſe former dans un point ſeulement de la ligne droite, qu'on prend pour l'axe des courbes, qui terminent le verre des deux côtez; ou bien cela doit arriver & ſur l'axe & autour de l'axe. En un mot on cherche un point ſeulement, ou pluſieurs points de l'image & du foyer.

De tous les cas, qui ſe preſentent ici, voici ceux, que M. DESCARTES a examinez. Avant que de déterminer les refractions, qui ſe font ſur les deux ſurfaces d'un verre, il examine ſeparément celles, que les rayons ſouffrent ſur chacune. Il n'a conſideré que les rayons, qui étant dans l'air, partent d'un ſeul point de l'axe pour tomber ſur une ſurface de verre: il eſt vrai qu'il a conclud de là, ce qui regarde la refraction des rayons paralleles; & que dans les courbes qu'il a formées, il trouve ce qu'il ſouhaittoit par rapport aux rayons, qui du verre paſſent dans l'air.

Enfin il n'a conſideré que les rayons, leſquels après la refraction arrivans ſur la ſurface de verre, vont ſe réünir en un ſeul point.

Les foyers F, G, ou F, H étant donnez; vous choiſiſſez la poſition du ſommet A; lequel peut être ou entre les deux foyers, comme dans les deux premiers genres; ou au delà des deux foyers, comme dans les deux derniers; ou ſur l'un des deux, cas qui eſt renfermé dans les precedens.

Dans les deux premiers cas, étant toûjours FC plus grande que FA; GC peut être ou plus grande, ou moindre, ou égale à GA: ce dernier cas eſt auſſi renfermé dans les deux autres. Il reſte donc quatre cas. Lorſque le ſommet eſt entre les deux foyers, ou GC eſt moindre que GA, comme dans le premier genre; ou elle eſt plus grande, comme dans le ſecond.

Lorſque le ſommet A eſt d'un même côté par rapport aux deux foyers, ou HC eſt plus grande que HA, comme dans le troiſiéme genre; ou elle eſt moindre, comme dans le quatriéme.

On ſuppoſe toûjours FC plus grande que FA: parcequ'on décrit la même courbe, ſoit qu'on faſſe FC plus grande que FA, GC plus petite que GA; ſoit qu'on ſuppoſe GC plus grande que GA, FC plus petite que FA; ſeulement les foyers changeroient de place, Fig. 179. F ſeroit dans l'ovale, G dehors.

2. Il faut trouver par le calcul, quelle Figure doit avoir un verre, qui unisse dans un point donné *F* tous les rayons qui viennent d'un point donné *G*. Je suppose la chose faite.

Mais pour réüssir plus aisément, je n'examine d'abord que le premier cas.

Je suppose donc Fig. 179. que l'espace *FAC* est l'air, l'espace *ACG* le verre; que *AC* est la courbe, dont *A* est le sommet, que je détermine à volonté; *FC* le rayon d'incidence dans l'air, *CG* le rayon rompu dans le verre, d'où il suit que les points *F*, *G*, sont donnez; *F* d'où viennent les rayons, *G* où ils se rassemblent dans le verre aprés la refraction faite au point *C*, que je choisis pour y faire le calcul: je suppose enfin que *PCK* est perpendiculaire sur la courbe *AC*, *CM* perpendiculaire sur l'axe *GA*, & une des appliquées de la courbe, *AM* une de ses abscisses. Après quoi je considere que *FCK* est l'angle d'inclinaison, qui est égal à l'angle *PCQ*; que l'angle *PCG* est l'angle rompu; & que si du point *C* comme centre de l'intervale *CP*, l'on décrit le cercle *PB*: *PN* perpendiculaire sur *CG* est le sinus de l'angle rompu *PCG*; & *PQ* perpendiculaire sur *FC* prolongée est le sinus de l'angle *PCQ*, ou de l'angle d'inclinaison *FCK*. Fig. 179.

Ensuite les points *F*, *A*, *G* étant pris à discretion, *FA* & *GA* sont connuës, je nomme *FA*, c; *GA*, b; & comme je sai la raison que le sinus de l'angle d'inclinaison a au sinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui passe de l'air dans le verre, je la mets comme d connuë à e connuë; & je nomme le sinus *PQ*, d; le sinus *PN*, e. Je nomme encore les inconnuës *CM*, x; *AM*, y; *AP*, v, *CP*, s.

Je commence par le cas qui fait *FC* plus grande que *FA*, & *GC* plus petite que *GA*; & je reserverai pour un autre cas de faire *GC* plus grande que *GA*. On nomme donc la difference de *FC* & de *FA*, z; & $CF = FA + z$, sera $c + z$. Comme je ne connois pas le rapport de la difference de *FC* & de *FA* à la difference de *GC* & de *GA*, je la mets comme f inconnuë à g inconnuë: & si je fais $f : g :: z : \frac{gz}{f}$, ce sera la difference de *GC* & de *GA*, & $GC = GA - \frac{gz}{f}$, sera $b - \frac{gz}{f}$. On aura encore $FM = FA + AM$, $c + y$; $FP = FA + AP$, $c + v$; & suivant que le point *M* tombera de l'un ou de l'autre côté de *G* ou de *P*, $GM = GA - AM$, $b - y$; ou $AM - AG$, $y - b$; $MP = AP - AM$, $v - y$; ou $AM - AP$, $y - v$; $GP = GA - AP$, $b - v$; ou $AP - AG$, $v - b$. Mais comme les quarrez de ces differentes valeurs sont les mêmes, cela n'apporte aucune difference dans le calcul, où l'on ne se sert que de ces quarrez.

Le calcul est entierement le même que pour l'Ovale du premier genre, Sect. 3. Art. 1. excepté qu'on a f là où il y a d, g à où il y a e; on

le ſuivra donc juſqu'aux valeurs de *FP*, *GP*; & l'on trouvera l'équation $zz \frac{+2bcffz - 2bcfgz - 2cffvz - 2bfgvz - bffff + bffvv - cffff + cffvv}{bff + cgg + ggv - ffv} = 0$. *AP*, $v = \frac{cbff - bcfg + bffz + cggz}{cff + bfg - ggz + ffz}$. & comme Sect. 3. dans le Texte $FP = \frac{bcff + ccff + bffz + cffz}{bfg + cff + ffz - ggz}$; $GP = \frac{bbfg + bcfg - bggz - cggz}{bfg + cff + ffz - ggz}$.

Après cela j'opere ainſi : dans les triangles ſemblables *FQP*, *FCM*, *FP* : *QP* : : *FC* : *CM*. Donc $\frac{bcffx + ccffx + bffxz + cffxz}{bfg + cff + ffz - ggz} = cd + dz$, & diviſant par $c + z$, $\frac{bcffx + ccffx + bffxz + cffxz}{bcfg + ccff + cffz - cggz + bfgz + cffz + ffzz - ggzz} = d$, que j'appelle *A*.

Dans les triangles ſemblables *GNP*, *GCM*, l'on trouve cette Analogie, $GP = \frac{bbfg + bcfg - bggz - cggz}{bfg + cff + ffz - ggz}$: *PN*, e : : *GC*, $b - \frac{gz}{f}$: *CM*, x. & $be - \frac{egz}{f} = \frac{bbfgx + bcfgx - bggxz - cggxz}{bfg + cff + ffz - ggz}$ & diviſant par $b - \frac{gz}{f}$, $\frac{bbfgx + bcfgx - bggxz - cggxz}{bbfg + bcff + bffz - bggz - bggz - cfgz - fgzz + \frac{g^3zz}{f}} = e$, que j'appelle *B*.

Donc la quantité *A* eſt à la quantité *B*, comme d eſt à e.

Maintenant lorſque deux quantitez ſont diviſées & multipliées par les mêmes quantitez, la raiſon qu'elles avoient ne change pas : ſi je multiplie donc les premiers membres des équations *A*, *B* par *FC*, $c + z$, par *HC*, $b - \frac{gz}{f}$, & que je les diviſe par x; ce qui en reſultera aura encore la raiſon de d à e. C'eſt pourquoi je diviſe l'équation *A* par x, & je la multiplie par *FC*, $c + z$, & elle redevient *FP*, $\frac{bcff + ccff + bffz + cffz}{bfg + cff + ffz - ggz}$; que je multiplie par *CG*, $b - \frac{gz}{f}$, & c'eſt $\frac{bbcff + bccff + bbffz + bcffz - bcfgz - ccfgz - bfgzz - cfgzz}{bfg + cff + ffz - ggz}$, que j'appelle *C*. Je diviſe auſſi l'équation *B* par x, je la multiplie par *CG*, $b - \frac{gz}{f}$, & elle redevient *GP*, $\frac{bbfg + bcfg - bggz - cggz}{bfg + cff + ffz - ggz}$, que je multiplie par *CF*, $c + z$, & c'eſt $\frac{bbcfg + bccfg - bcggz - ccggz + bbfgz + bcfgz - bggzz - cggzz}{bfg + cff + ffz - ggz}$, que j'appelle *D*. Ainſi la quantité *C* ſera encore à la quantité *D* comme d eſt à e. Mais ſi l'on diviſe la quantité *C* par f, & la quantité *D* par g; les quotiens ſeront la même quantité $bbcf + bccf + bbfz + bcfz - bcgz - ccgz - bczz - cgzz$: donc la quantité *C* eſt auſſi à la quantité *D*, comme f à g : donc enfin $f : g : : d : e$. Et la difference des lignes *FC*, *FA*, qui étoit à la difference des lignes *GC*, *GA*, comme f à g; ſera auſſi à cette difference comme d à e. C'eſt pourquoi la premiere difference de *FC*, *FA* étant z, la ſeconde de *GC*, *GA* ſera $\frac{ez}{d}$, & $GC = b - \frac{ez}{d}$.

De ce que la difference des lignes *FC*, *FA* eſt toûjours à la difference des lignes *GC*, *GA*, comme d à e, l'on tire la maniere de décrire l'Ovale du premier genre, telle qu'on l'a expliquée, Sect. 2. Après qu'on l'a décrite, l'on examine, comment les refractions s'y font, & l'on trouve

qu'il n'y a que sa premiere partie AC, qui réünisse au point G les rayons qui viennent du point F, ainsi qu'on l'a dit, Sect. 3. Art. 1. n. 3. on fera les mêmes choses pour les trois autres genres d'Ovales.

Il faut observer touchant la maniere de décrire les Ovales, qu'après avoir tiré RA ou SA faisant un angle quelconque avec l'axe : vous transportez GA & SA en AR sur la ligne, où sont prises $A6$, $A8$, dans les deux cas, dans lesquels GC & HC sont moindres que GA & HA; & que vous les transportez en AS sur le prolongement de la même ligne, dans les deux cas, dans lesquels GC & HC sont plus grandes que GA & HA; voici la raison de cette difference. $A5$ est $A6$, comme d à e : ainsi $A5$ étant z, $A6$ est $\frac{ez}{d}$; & $F5$ étant $FA + A5$, $c + z$, $R6$ est $RA - A6$, $b - \frac{ez}{d}$; SA est $SA + A6$, $b + \frac{ez}{d}$.

4. Supposons que la difference de FC & de FA est toûjours égale à celle de GC & de GA : donc $z = \frac{ez}{d}$.

Ainsi pour le premier genre Fig. 179. vous aurez $FC = c + z$, comme auparavant, $GC = b - z$; $FM = c + y$; $GM = b - y$. Et dans les triangles rectangles CMF, CMG, vous trouverez $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$; $z = y$. Et substituant z dans l'équation $\overline{CM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$, il reste $x = o$. Ainsi l'on décrit la ligne GF, Figure 185. comme Sect. 3. Art. 1. n. 7. car lorsque y a plusieurs valeurs, & que x est toûjours zero : y s'étend sur une ligne droite.

Pour le second genre d'Ovales, on a déja prouvé, Sect. 3. Art. 2. n. 3. qu'on trouve une hyperbole.

Pour le troisiéme genre, Fig. 197. nous aurons CF, $c + z$; HC, $b + z$; on suppose toûjours HA, b; AF, c; & les triangles rectangles CMF, HMC donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{HM}^2$, $z = -y$. Substituez pour z sa valeur dans l'équation $2cz + zz - yy + 2cy = xx$, il vient $x = o$. Ainsi l'on décrit la droite $H5$, Figure 199. comme Sect. 3. Art. 3. n. 7. La valeur $z = -y$ montre que cette ligne commence en A, & va du côté de 5. Fig. 197.

Pour le quatriéme genre l'on a trouvé, Sect. 3. Art. 4. n. 7. Fig. 203. que c'est une ellipse.

5. Après avoir examiné les rayons d'incidence, qui sont dans l'air, ou paralleles, ou convergens, ou divergens par rapport à l'axe; & qui tombent sur une surface de verre; & après avoir connu les courbes propres à leurs refractions. Il faut à present examiner ces mêmes rayons dans le verre, & voir qu'elles Figures doivent avoir les verres pour la seconde refraction, qu'ils souffrent en passant du verre dans l'air.

Et c'est ce que l'on a déja conclud en examinant les courbes, dont on vient de parler.

6. Il reste à combiner ces Figures, & à donner aux verres les deux qui sont propres à réünir dans un point donné tous les rayons qui viennent d'un

autre point donné ſur l'axe, ou qui viennent paralleles à l'axe. Et c'eſt ce que M. DESCARTES a fait, & qui a été ſuffiſamment expliqué en détail, Art. 1. 2. 3.



PARTIE CINQUIE'ME.

Des Lignes qui ſe décrivent ſur une ſurface courbe.

M. DESCARTES.

Comment on peut appliquer ce qui a été dit ici des lignes courbes décrites ſur une ſuperficie plate, à celles, qui ſe décrivent dans un eſpace, qui a trois dimenſions.

AU reſte je n'ai parlé en tout ceci que des lignes courbes, qu'on peut décrire ſur une ſurface plate ; mais il eſt aiſé de rapporter ce que j'en ai dit, à toutes celles qu'on ſauroit imaginer être formées, par le mouvement regulier des points de quelque corps dans un eſpace qui a trois dimenſions. A ſavoir, en tirant deux perpendiculaires, de chacun des points de la ligne courbe, qu'on veut conſiderer, ſur deux plans, qui s'entrecoupent à angles droits, l'une ſur l'un, & l'autre ſur l'autre. Car les extrêmitez de ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes, une ſur chacun de ces plans, deſquelles on peut, en la façon ci-deſſus expliquée, déterminer tous les points, & les rapporter à ceux de la ligne droite, qui eſt commune à ces deux plans, au moyen de quoi ceux de la courbe, qui a trois dimenſions, ſont entierement déterminez. Même ſi on veut tirer une ligne droite, qui coupe cette courbe au point donné à angles droits : il faut ſeulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui coupent à angles droits les deux lignes courbes, qui y ſont, aux deux points, où tombent les perpendiculaires, qui viennent de ce point donné. Car ayant élevé deux autres plans, un ſur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle eſt, on aura l'interſection de ces deux plans, pour la ligne droite cherchée. Et ainſi je penſe n'avoir rien omis des élemens, qui ſont neceſſaires pour la connoiſſance des lignes courbes.

On peut décrire des lignes ſur des ſurfaces courbes, ou en ſuppoſant les ſurfaces immobiles, tandis qu'on fait mouvoir un point ſur elles à cer-

taines conditions ; ou en ſuppoſant que ces ſurfaces ſe meuvent, tandis que le point, qui trace la courbe eſt immobile ; ou en ſuppoſant que ces ſurfaces & ce point ſe meuvent.

Les lignes qui ſont ainſi décrites, peuvent être des lignes droites, par exemple ſi ſur la ſurface d'un cylindre on faiſoit un point, qui fût toûjours dans le plan d'un parallelogramme, qui coupe l'axe ; elles peuvent être de deux dimenſions, c'eſt-à-dire que tous leurs points ſont dans un ſeul plan, & que l'eſpace, qu'elles comprennent eſt une ſeule ſurface ; mais elles peuvent auſſi être de trois dimenſions, c'eſt-à-dire que tous leurs points ne ſont pas dans un ſeul plan, mais dans pluſieurs, & que l'eſpace dans lequel elles ſont décrites, eſt un ſolide, ou un eſpace de trois dimenſions ; & c'eſt pour cela qu'elles ſont appellées lignes de trois dimenſions, comme on pourroit appeller la parabole une ligne de deux dimenſions, & la ligne droite une ligne d'une dimenſion.

M. DESCARTES apprend ici deux choſes, la premiere eſt de déterminer tous les points des lignes décrites ſur une ſurface courbe, & de trouver l'équation qui convient à chacun de ces points indifferemment : la ſeconde eſt de mener des tangentes à ces lignes par un de leurs points donné.

Il faut apporter quelques Exemples, qui feront voir de quelle maniere on peut appliquer à ce ſujet, ce qui a été dit touchant les courbes décrites ſur un plan.

PROBLEME I.

1. ETant donné de poſition le ſolide paraboloïde bNM, Fig. 219. lequel a été produit par la circonvolution entiere de la demie-parabole bNM autour de ſon axe immobile bD ; qui eſt droit au plan-horizontal IP. Fig. 219.

Etant encore donné le point A & la droite AM hors de ce ſolide : on demande l'équation de la courbe MCN, qui eſt décrite ſur le paraboloïde immobile bNM, par l'extrêmité M de la droite AM, laquelle tourne autour du point fixe A. Et il faut déterminer tous les points de la courbe.

1. Par le point A & par l'axe bD faites paſſer un plan $ubTY$, qui 18. 11. Eucl. ſera droit au plan horizontal IP, & déterminera les points N, M, où il coupe la courbe MCN, qu'on ſuppoſe décrite, comme on l'a demandé. Si après cela ſur le plan horizontal IP vous élevez le plan vertical PQ, qui ſoit droit & au plan horizontal IP, & au plan coupant $ubTY$; PY commune Section des plans horizontal IP, & vertical PQ ſera 19. 11. Eucl. droite au plan coupant $ubTY$, & Yu commune Section des plans verticaux PQ, $ubTY$ ſera droite au plan horizontal IP ; & 6. 11. Eucl. les droites bDT, uY ſont paralleles.

2. Tirez la droite NM, qui joindra les deux points N, M de la courbe MCN, & ſera ſon axe. Et par ſon milieu F & par le point donné A tirez

la droite *DFA*, qui 1° sera toute dans le plan coupant *ubTY*, 1. 11. Eucl. parceque sa partie *FA* est dans ce plan ; qui 2° sera perpendiculaire à *NM*. De plus par le point connu *F*, menez *EFt*, parallele à *TY*: l'angle *fEG* est droit.

3. De tous les points de la courbe cherchée *MCN* abaissons 11. 11. Eucl. des perpendiculaires *MX*, *CR* sur le plan horizontal *IP* ; elles seront 6. 11. Eucl. paralleles aux lignes *bT*, *uY*, & elles décriront la courbe *VRX*. De tous les points de la courbe *MCN* tirez encore des perpendiculaires *Mx*, *Cr*, *Nu* sur le plan vertical *PQ* ; elles seront 6. 11. Eucl. paralleles à la ligne *TY*, & elles décriront la courbe *xru*.

4. Pour déterminer l'équation de la courbe *MCN*, je choisis le point *C*, & il faut observer que toutes les lignes droites ou courbes, qui passent par le point *C*, sont en l'air, & qu'elles ne sont pas dans le plan vertical *ubTY*. Par le point *C* je fais passer le plan horizontal *hCZf*, dont la commune Section *fh* avec le plan *ubTY* est 16. 11. Eucl. parallele à *TY*. La courbe *hCZ* est un arc du cercle que le point *h* décrit dans la circonvolution de la demie-parabole *bNM* autour de l'axe *bD* ; *f* est le centre de ce cercle, dont *fh*, *fC*, *fZ* sont rayons. Le plan *hCZf* horizontal est parallele au plan horizontal *IP*, & *bDT* qui est supp. droite au plan *IP*, est droite au plan *hCZf*. * C'est la converse de la 14. 11. Eucl. laquelle est aussi vraye. Donc l'angle *CfD* est droit, comme on peut le conclurre de la Prop. 4. 11. Eucl.

* Clavius.

5. Du point *C* tirez les lignes *CF* ; *CK* perpendiculaire à *DA* ; *CA* = *AM* parceque *CA* est *AM* qui décrit le point *C* de la courbe *MCN* ; *Cl* perpendiculaire à *NM* ; & du point *l* menez *lg* perpendiculaire à *EF*, & parallele à *ED*. Du point *C* on a tiré *CR* perpendiculaire au plan *IP* ; *Cr* perpendiculaire au plan *PQ*.

6. Par le point *C* faisons encore passer le plan *CLG* droit au plan *ubTY*, & parallele au plan *PQ* ; *GL* commune Section des plans *CLG*, *ubTY* est 16. 11. Eucl. parallele à *uY*, & par consequent à *Ef*, car n. 1. *uY*, *bDT* sont paralleles. Donc 34. 1. Eucl. *EG* = *fL*, *GL* = *Ef* ; & parceque n. 2. l'angle *fEG* est droit, l'angle *LGE* est encore droit, comme aussi l'angle *LGF*. La droite *CL* est la commune Section des plans *CLG*, *hCZf*, car elle est dans ces deux plans, & parceque n. 4. *hCZf* est droit au plan *ubTY* aussi bien que le plan *CLG*, il suit 19. 11. Eucl. que *CL* est droite au plan *ubTY*, & que déf. 3. 11. Eucl. les angles *CLf*, *CLG* sont droits. De plus puisque, comme on vient de le dire, le plan *CLG* est droit au plan *ubTY*, & que les angles *LGE*, *LGF* sont droits, *FG* perpendiculaire à la commune Section *LG*, & tirée dans le plan *ubTY*, est * par une suite de la déf. 4. 11. Eucl. droite à l'autre plan *CLG* : & déf. 3. 11. Eucl. l'angle *CGF* est droit. Joignez *CG*.

* Clavius.

7. Par le point *L* prolongez les lignes *LS* perpendiculaire au plan *IP*,

Ls perpendiculaire au plan PQ; joignez RS, RT; rs, rt. Les plans IP, $hCZf$ sont n. 4. paralleles; les perpendiculaires CR, LS, fT au plan IP, sont par la converse de la propos. 14. 11. Eucl. perpendiculaires au plan $hCZf$, & égales entr'elles; & 33. 1. Eucl. $CL = RS$, $Lf = ST$, $Cf = RT$; & les triangles CLf, RST sont égaux, & parceque n. 6. l'angle CLf est droit, l'angle RST l'est aussi. Ensuite parceque les plans CLG, PQ sont encore paralleles, on démontrera de la même maniere, que les triangles CLG, rst sont égaux; & que l'angle rst est droit, parcequ'il est égal à l'angle CLG, qui n. 4. est droit; & que $GL = ts$, $CG = rt$. Enfin la ligne PY droite n. 1. au plan $ubTY$, fait déf. 3. 1. Eucl. les angles PYT, PYu droits; c'est pourquoi les angles PYT, RST étant droits, les lignes PY, RS, 28. 1. Eucl. sont paralleles. & les angles PYu, rst étant droits, les lignes PY, rs sont encore paralleles. Menez $R\&$ parallele à SY; les lignes SR, $Y\&$ 34. 1. Eucl. sont égales. Mais $RS = CL = rs$ donc les quatre lignes CL, RS, $Y\&$, sr sont égales.

8. Les plans IP, PQ sont les deux plans, qui suivant le precepte de M. DESCARTES se coupent à angles droits en PY; les courbes VRX, urx sont celles qui se décrivent sur ces plans par les perpendiculaires CR, MX, Cr, Mx, Nu, qu'on abaisse sur eux de chaque point de la courbe MCN; PY est la commune Section de ces deux plans, à laquelle on doit rapporter les points des deux courbes VRX, urx: ce qui détermine les points & l'équation de la courbe cherchée MCN, comme on va le montrer.

9. Toutes ces choses étant supposées, nommez les connuës AB, a; DF, b; BF, c; $AF = AB + BF$, $a + c$; AM, $d = AC$; bD, e: DE, h; $bE = bD - ED$, $e - h = l$; $EF = \sqrt{\overline{FD}^2 - \overline{DE}^2} = \sqrt{bb - hh} = f$ dans le triangle n. 2. DEF; $FM = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{dd - aa - 2ac - cc}$ dans le triangle rectangle n. 2. AFM. Nommez les inconnuës bf, x; fh, $y = Cf$ n. 4. $= RT$ n. 7. CL, $s = RS = rs = Y\&$ n. 7.; Cl, z; Gg, r; fL, $v = EG$ n. 6. $= TS$ n. 7. FK, t; $Df = bf - bD$, $x - e$; $Ef = bf - bE$, $x - l = GL$ n. 6. $= ts$ n. 7.; $FG = EF - EG$, $f - v$; $Fg = Gg - GF$, $r - f + v$; $DK = DF - KF$, $b - t$; $AK = AB + BF + FK$, $a + c + t$.

10. Dans le triangle CKA rectangle en K n. 5. $\overline{CK}^2 = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - tt$.

Dans le triangle CKF rectangle en K n. 5. $\overline{CF}^2 = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct$.

Dans le triangle CGF rectangle en G n. 6. $\overline{CG}^2 = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - ff + 2fv - vv = \overline{rt}^2$ n. 7.

Dans le triangle RST rectangle en S n. 7. $\overline{RS}^2 = ff = yy - vv$, & c'est l'équation, qui se peut d'abord former de la courbe XRV. Or $RS^2 = \overline{\&\Upsilon}^2$ n. 7.

Dans le triangle rst rectangle en s n. 7. $\overline{rs}^2 = ss = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - ff + 2fv - vv - xx + 2lx - ll$, & c'est l'équation qu'on peut d'abord former de la courbe xru. Or $\overline{rs}^2 = \overline{\&\Upsilon}^2$ n. 7.

Et les points des courbes XRV, xru sont rapportez à la ligne $P\Upsilon$ commune Section des plans IP, PQ, puisqu'on a deux valeurs de $\overline{\&\Upsilon}^2$ ou de ff tirées de ces deux courbes.

11. En comparant les deux valeurs de ff, on trouve $v = \frac{yy - dd + aa + 2ac + 2at + cc + 2ct + ff + xx - 2lx + ll}{2f}$.

On trouvera la valeur de t dans le triangle DCF, dans lequel 13. 2. Eucl. $\overline{CF}^2 + 2\overline{DF} \times \overline{DK} = \overline{DF}^2 + \overline{CD}^2$, c'est-à-dire $dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct + 2bb - 2bt = bb + yy + xx - 2ex + ee$; puisque $\overline{CD}^2 = \overline{Df}^2 + \overline{Cf}^2 = x^2 - 2ex + ee + yy$ dans le triangle CfD rectangle en f n. 4. d'où il vient $t = \frac{dd - aa - 2ac - cc + bb - yy - xx + 2ex - ee}{2a + 2b + 2c}$. Mettez à present cette valeur de t à sa place dans la valeur de v, vous ferez $v = \frac{byy + bxx}{2af + 2bf + 2cf}$ &c. Nommez g la connuë qui multiplie yy, q celle qui multiplie xx, m celles qui multiplient x, n les autres, vous aurez $v = gyy + qxx + mx + n$.

12. Maintenant supposons que p est le parametre de la parabole bNM, laquelle par sa circonvolution a produit le paraboloïde $MNbD$; on aura au point f ou au point h, $\overline{fh}^2 = p \times bf$, $yy = px$. Substituons cette valeur de yy dans la valeur de v; il viendra $v = gpx + qxx + mx + n$.

L'équation $ff = yy - vv$ de la courbe VRX décrite sur le plan horizontal IP, si l'on y substituë les valeurs trouvées de yy & de vv, se changera en $ff = px - ggppxx - 2gpqx^3 - 2gmpxx - 2gnpx - qqx^4 - 2mqx^3 - 2nqxx - mmxx - 2mnx - nn$.

L'équation de la courbe urx décrite sur le plan vertical PQ sera, en substituant les valeurs de t & de v; celle-ci, $ff = dd - aa - 2ac - cc - ff - xx + 2lx - ll - \frac{add + a^3 + 2aac + acc - abb + apx + axx - 2aex + aee - cdd + aac + 2acc + c^3 - bbc + cpx + cxx - 2cex + cee}{af + bf + cf} + 2fgpx + 2fqxx + 2fmx + 2fn - ggppxx - 2gpqx^3 - 2gmpxx - 2gnpx - qqx^4 - 2mqx^3 - 2nqxx - mmxx - 2mnx - nn$, où pour yy l'on a substitué px.

13. Si l'on prend à volonté le point h sur la parabole bNM, ou ce qui est le même, l'abscisse bf, x sur l'axe bD; la quantité x sera donnée; ainsi l'on connoîtra la longueur de fL, v, puisque la valeur v ne contiendra plus que des quantitez connuës; l'on connoîtra aussi $EG = fL$ n. 6. & les points G, L.

On connoîtra aussi $\& Y$, ou la perpendiculaire CL, s; puisque dans les valeurs de ss il n'y a plus que des connuës. Elevez donc au point connu L la perpendiculaire CL de la longueur connuë, elle déterminera le point C de la courbe cherchée. C'est ainsi qu'on trouvera tous les autres points de cette même courbe.

14. Du point C connu abaissez la perpendiculaire Cl sur la droite MN axe de la courbe MCN, le point l sera donné. Du point l sur EG tirez la perpendiculaire lg, le point g sera encore donné. Et parcequ'on connoît le point G n. 13. la droite Gg, r sera connuë.

Après cela les triangles DEF, Fgl sont équiangles. Vous avez donc cette Analogie $DE, h : DF, b :: Fg, r - f + v : Fl$, $\frac{br - bf + bv}{h}$, ou mettant pour v sa valeur; $Fl = \frac{br - bf + bgpx + bqxx + bmx + bn}{h}$.

Enfin dans le triangle ClF rectangle en l, $\overline{Cl}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{lF}^2$, $zz = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - \overline{bbrr + 2bbfr - 2bbgprx - 2bbqrxx - 2bbmrx - 2bbnr - bbff + 2bbfgpx + 2bbfqxx + 2bbfmx + 2bbfn - bbggppxx - 2bbgpqx^3 - 2bbgmpxx - 2bbgnpx - bbqqx^4 - 2bbmqx^3 - 2bbnqxx - bbmmxx - 2bbmnx - bbnn} \backslash hh$; équation à la courbe MCN, dont l'expression ne contient d'inconnuës, que z, x, après qu'on aura mis dans la valeur de t n. 11. px pour yy. Elle est de trois dimensions, parceque les points C ne sont pas dans le plan du triangle AMN, dans lequel sont les points M, N.

15. Soit pris Figure 220. le point A sur l'axe AF du paraboloïde : les Fig. 220.
points f, E, F de Fig. 219. tombent tous sur le point F, de Fig. 220. les lignes fh, EF, NM de Fig. 219. deviennent la seule ligne NM de Fig. 220. les lignes CL, Cl de Fig. 219. sont la ligne CL de Fig. 220. le point D, & les lignes LG, lg, fE de Fig. 219. sont nulles dans Figure 220.

Ainsi dans le plan horizontal IP vous aurez la courbe VRX, & le triangle TRS égal au triangle CLF; mais dans le plan vertical PQ il n'y aura que la droite $rs = CL = RS = \& Y$. La raison de tout cela est, que la parabole MBN décrivant le solide $MBNC$, la ligne FM est demeurée dans un même plan horizontal, parallele au plan horizontal IP, & droit au plan vertical PQ.

De toutes les Lettres qu'on a employé n. 9. il ne reste donc que AB, a; AM, $d = AC$, BF, c; AF, $a + c$; $FC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AF}^2}$, $\sqrt{dd - aa - 2ax - cc}$; FL, v; CL, s.

Dans le triangle rectangle CLF, $\overline{CL}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FL}^2$, $ss = dd - aa - 2ac - cc - vv$; équation au cercle ou à la courbe cherchée MCN; dont le rayon FM est $\sqrt{dd - aa - 2ac - cc}$.

Il est évident par la seule description de la courbe MCN, que c'est une

circonference de cercle, dont FM eſt le rayon. Ce qui arrivera toûjours quelque courbe que ſoit NBM, pourveu que le point A ſoit pris ſur l'axe AF.

Fig. 219. 16. Que la courbe bNM, Fig. 219. ſoit à preſent une hyperbole, qui par ſa revolution autour de ſon axe bf décrive la ſolide hyperboloïde $MNbf$.

Si ſon équation eſt $yy = px + \frac{p}{a}xx$, on mettra cette valeur de yy à ſa place par tout, où elle ſe trouvera, le reſte eſt, comme pour le paraboloïde.

Que ſi bNM étoit une ellipſe & $MNbf$ un conoïde elliptique, on ſuivroit la même Methode.

Fig. 221. 17. Suppoſons que le ſolide $MBNbd$, Fig. 221. eſt une Sphere décrite par la circonvolution entiere du demi-cercle $bNMd$ autour de ſon diametre bd: on demande la nature de la courbe MCN décrite par le point C de la ligne droite donnée AC, qui ſe meut autour du point donné A.

Faites ce qui eſt preſcrit, n. 1. 2. 3. 4.

Enſuite BD eſt perpendiculaire à NM, n. 2. ainſi le point D eſt le centre du cercle dBb, & de la Sphere.

Du point C pris à diſcretion tirez CD, CF, CA. Les angles MDF, NDF, CDF ſont égaux; de même les angles DFN, DFM, DFC, ſont encore égaux, & droits, puiſque n. 2. DFN, DFM ſont droits, & 5, 11. Eucl. les trois lignes FM, FN, FC ſont dans un même plan.

Ce qui ſe pouvant encore démontrer à l'égard de tous les points de la courbe MCN, tous ſes points ſont dans un même plan $MCNFM$, & la courbe MCN eſt de deux dimenſions. Il ſuit encore 4. 11. Eucl. que DF eſt droite au plan $MCNF$; & que 18. 11. Eucl. le plan $ubTY$, ou le plan du demi-cercle bMd, qui eſt mené par DF, eſt droit au plan de la courbe MCN; & déf. 3. 11. Eucl. que l'angle CFD eſt droit. De ce que les triangles DFM, DFN, DFC ſont égaux, j'aurois auſſi pu conclurre, que les lignes FM, FN, FC ſont égales, & que le plan $MCNF$ eſt un cercle. Mais il faut à preſent le connoître par la Methode qu'on explique.

Pour cela, après avoir remarqué, que les plans $MCNF$, hCZ ſont droits au plan du demi-cercle bMd; l'on conclurra, que 19. 11. Eucl. CL leur commune Section eſt droite au plan de ce demi-cercle, & qu'étant toute dans le plan hCZ, 1. 11. Eucl. elle tombera ſur fh commune Section des plans hCZ, bMd; & qu'enfin l'angle CLF eſt droit déf. 3. 11. Eucl.

Faites comme n. 7. 8. 9. excepté 1° que FG eſt $EG - EF$, $v - f$; 2° que les termes, où les lettres, r, t, z ſe trouvent, ſont nuls, parce qu'on n'a pas eu beſoin des lignes, qu'elles expriment; 3° nommons FL, r.

La valeur de v eſt $\frac{yy - dd + aa + 2ac + cc + ff + xx - 2lx + ll}{2f}$, telle

que n. 11. en retranchant les termes, où t se trouve. Au point f, ou h du demi-cercle bMd on a l'équation au cercle $yy = 2ex - xx$. Substituez cette valeur de yy, vous aurez $v = \frac{2ex - dd + aa + 2ac + cc + ff - 2lx + ll}{2f}$.

Mettez $2e - 2l = \gamma$, le reste $= \delta\delta$, il viendra $v = \frac{\gamma x + \delta\delta}{2f}$.

L'équation à la courbe VRX est n. 10. $ff = yy - vv$, substituez les valeurs de yy, vv, c'est $ff = 2ex - xx - \frac{\gamma\gamma xx - 2\gamma\delta\delta x - \delta^4}{4ff}$ équation à l'ellipse VRX.

Dans l'équation à la courbe urx. Faites $dd - aa - 2ac - cc - ff - ll = -\delta\delta$, il viendra $ff = -\delta\delta - vv + 2fv - xx + 2lx$; pour v & vv mettez leur valeur, vous aurez $ff = -\delta\delta - \frac{\gamma\gamma xx - 2\gamma\delta\delta x - \delta^4}{4ff} + \gamma x + \delta\delta - xx + 2lx$, équation à l'ellipse urx.

Maintenant dans le triangle rectangle CLF, $\overline{CF}^2$ n. 10. $= \overline{CL}^2 + \overline{FL}^2$, $ff = dd - aa - 2ac - cc - rr$ équation au cercle MCN dont le rayon est $\sqrt{dd - aa - 2ac - cc} = FM = FN$, n. 9. CL une appliquée.

18. Lorsque Fig. 222. la ligne AD est perpendiculaire sur bF, elle se confond avec FE de Fig. 219. Il ne reste que FM, $\sqrt{dd - aa - 2ac - cc} = CG$ n. 10. bD, e; bF, x; DF, $x - e = GL = st$; CL, $s = RS = rs$; CF, $y = RT$; DG, $v = FL = TS$. Fig. 222.

Le triangle RTS rectangle en s donne $\overline{RS}^2 = \overline{RT}^2 - \overline{TS}^2$, $ff = yy - vv$.

Le triangle CLG rectangle en L, donne $\overline{CL}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GL}^2$, $ff = dd - aa - 2ac - cc - ee + 2ex - xx$ équation au cercle MCN.

Le triangle rst donne la même que le triangle CLG, ainsi xru est un cercle.

Parceque NCM est un cercle droit au plan horizontal IP, il ne formera que la droite RS.

19. Soit Fig. 223. le solide BbD un Cone droit produit par la circonvolution entiere du triangle rectangle fbh autour du côté immobile bf, qui est droit au plan horizontal IP. Fig. 223.

Faites comme n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. excepté que BF, c est nulle, étant AF, a; ainsi en retranchant les termes, où c se trouve, vous aurez $v = \frac{yy - dd + aa + 2at + ff + xx - 2lx + ll}{2f}$ n. 11. & $t = \frac{dd - aa + bb - yy - xx + 2ex - ee}{2a + 2b}$.

Au point h on a dans les triangles équiangles bEF, bfh cette Analogie bE, l : EF, f :: bf, x : fh, y. & $y = \frac{fx}{l}$.

Mettez dans la valeur de t cette valeur de y, & dans la valeur de v

celle de y & de t; faites k toutes les connuës, qui multiplient xx; m toutes celles qui multiplient x; nn toutes les autres, il viendra $kxx + mx + nn = v$.

Dans l'équation qui convient n. 10. au triangle RST, substituez pour yy & vv leur valeur, vous produirez l'équation à la courbe XRV.

Dans l'équation qui n. 10. convient au triangle rst substituez les valeurs de t, v, vv, vous aurez l'équation à la courbe xrv.

Faites comme n. 13. 14. Dans Fl, $\frac{br - bf + bv}{b}$, mettez la valeur de v, afin d'avoir Fl, $\frac{br - bf + bnn + bkxx + bmx}{b} = \frac{\delta\delta + bkxx + bmx}{b}$, en faisant $br - bf + bnn = \delta\delta$. Enfin dans le triangle ClF rectangle en l, $\overline{Cl}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{Fl}^2$, $zz = dd - aa - 2at - \frac{\delta^4 - 2bk\delta\delta xx - 2bm\delta\delta x - bbkkx^4 - 2bbkmx^3 - bbmmxx}{bb}$. équation à la courbe cherchée MCN, de trois dimensions, car tous les points C se trouveront dans des plans differens du plan AMN.

Fig. 224. 20. Soit Fig. 224. le solide $MNbD$ un cylindre produit par la circonvolution entiere du rectangle $MNbD$ autour du côté immobile bD perpendiculaire à l'horizon; menez AD perpendiculaire sur bD.

Faites comme n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. excepté qu'on laisse les termes où se trouvent c, h, f, t; étant AF, a; FD, $b = fh - Cf$; bf, x; Df, $x - e = Fh = GL$; fL, $v = DG$; $GF = DF - DG$, $b - v$; hl, r; $Fl = Fh + hl$, $r + x - e$; $AG = AF + FG$, $a + b - v$.

Dans le triangle ACG rectangle en G, $\overline{CG}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AG}^2$, $dd - aa - 2ab + 2av - bb + 2bv - vv$.

Dans le triangle CLG rectangle en L, $\overline{CL}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GL}^2$, $ff = dd - aa - 2ab + 2av - bb + 2bv - vv - xx + 2ex - ee$, ce qui pouvoit se trouver dans le triangle rst.

Dans le triangle CLf rectangle en L, $\overline{CL}^2 = \overline{Cf}^2 - \overline{fl}^2$, $bb - vv$, ce qui pouvoit aussi se trouver dans le triangle RST.

Donc de ces deux valeurs de ff l'on fait $v = \frac{2bb - dd + aa + 2ab + xx - 2ex + ee}{2a + 2b}$.

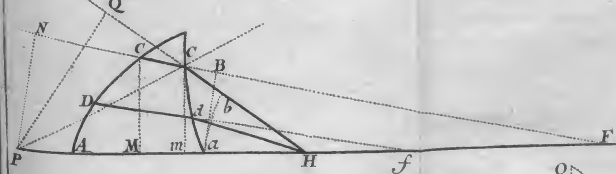
Nommez nn les quantitez connuës, c'est $v = \frac{xx - 2ex}{2a + 2b} + nn$.

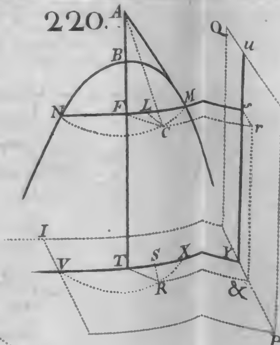
Substituez cette valeur dans $ff = bb - vv$, vous aurez l'équation de la courbe RST.

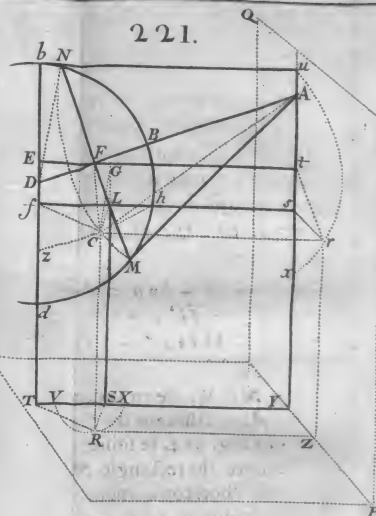
Substituez encore la valeur de v dans $ff = dd - aa - 2ab + 2av - bb + 2bv - vv - xx + 2ex + ee$, afin d'avoir l'équation de la courbe rst.

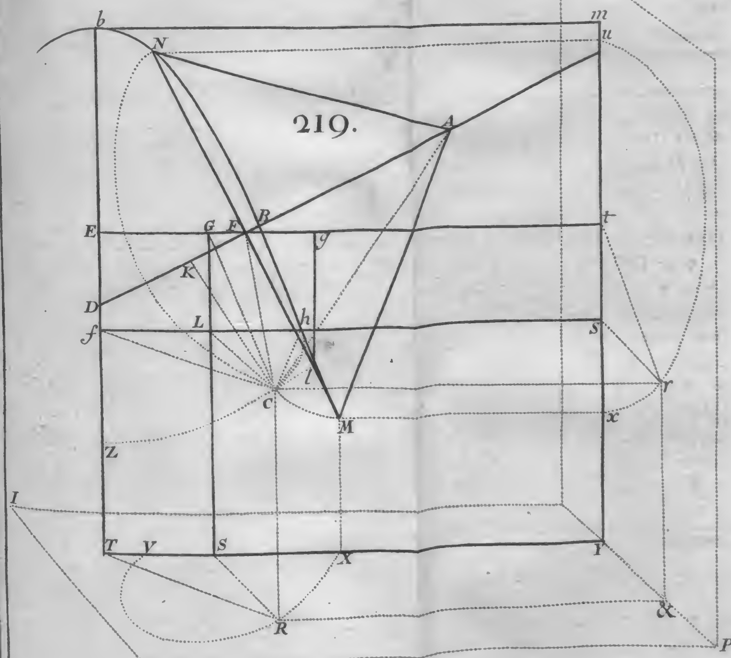
Faites comme n. 13.

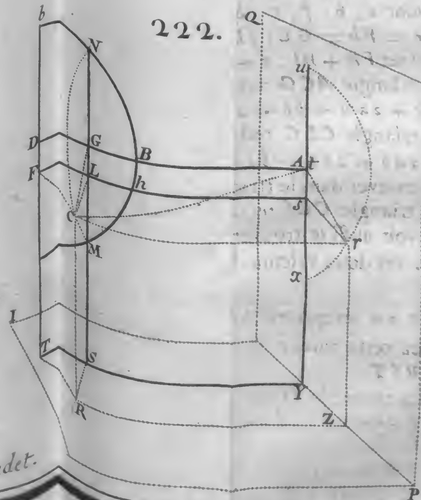
Dans le triangle CGF, rectangle en G, n. 5. $\overline{CF}^2$, en substituant la valeur de v, $= \frac{bdd - aab + axx - 2aex + aee}{a + b}$.











Gravé par Daudet.

Dans le triangle ClF rectangle en l n.14. $\overline{Cl}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{Fl}^2$, $zz = \frac{bdd - aab + axx - 2aex + aee}{a+b} - xx + 2ex - 2rx - ee + 2er - rr$, équation à l'ellipſe MCN. Il ſe fait donc une portion d'ellipſe MCN de ce côté du Cylindre, & une autre portion de l'autre côté, qui ont pour axe commun la droite MN, & qui ne ſont pas dans le même plan; car tous les points C ne ſont pas dans le plan du triangle AMN.

PROBLEME II.

IL faut trouver la ligne, que décrivent tous les points d'un corps, qui eſt pouſſé par trois mouvemens, dont le premier eſt horizontal, & uniforme d'Orient en Occident; le ſecond eſt vertical de haut en bas ſuivant l'effet de la peſanteur, le troiſiéme eſt encore horizontal uniforme ou variable du Midi au Septentrion. Et l'on ſuppoſe 1° que le milieu dans lequel le mouvement ſe fait, ne cauſe aucun changement; 2° qu'un corps peſant qui deſcend librement, parcourt des eſpaces, qui ſont entr'eux, comme le quarré des tems; c'eſt-à-dire, que ſi à la fin du premier inſtant il a parcouru 1. pié, à la fin du ſecond il en a parcouru 4, à la fin du troiſiéme 9. &c. 3°. Que ſi un corps A, Fig.225. eſt pouſſé ſur un plan horizontal par deux differens mouvemens, l'un, qui s'il étoit ſeul, le porteroit en un inſtant au point E; l'autre, qui, s'il étoit ſeul, le tranſporteroit en un inſtant au point g: le corps A ſe trouveroit à la fin de cet inſtant au point h, qui eſt l'extrêmité de la diagonale d'un parallelogramme $AghE$, dont les côtez ſont les eſpaces AE, Ag, qui auroient été parcourus ſeparément. 4°. Que le mouvement horizontal ne détruit pas le vertical, parcequ'il ne lui eſt pas contraire. Fig. 225.

1°. Lorſque le corps A ne ſera mû que de deux mouvemens, l'un horizontal uniforme, AB, BE, EF, qui lui fait parcourir des eſpaces égaux dans des tems égaux; l'autre vertical Ac; Cc, CK, qui lui fait parcourir des eſpaces tels que la gravité le demande: alors la ligne parcouruë eſt une parabole. Ce qui ſe démontre ainſi.

Les lignes AB, BE, EF ſont égales, & repreſentent les tems égaux, pendant leſquels le corps A s'eſt mû: donc les lignes AB, AE, AF repreſentent ces tems pris depuis le commencement du mouvement; & AB étant 1, AE eſt 2, AF 3, dont les quarrez ſont 1. 4. 9. De même comme les lignes AB, AE, AF ſont encore les eſpaces, qui ſeroient parcourus ſur l'horizontale AF pendant chaque inſtant à commencer depuis le point A: ainſi les lignes Ac, AC, AK repreſentent les eſpaces qui ſeroient parcourus ſur la verticale AK: donc Ac étant 1, AC eſt 4, AK eſt 9. C'eſt pourquoi ſi l'on mene Bd égale & parallele à Ac, ED égale & parallele à AC, &c. & qu'on joigne les lignes cd, CD: on aura $cd = AB$, 1; $CD = AE$, 2. Joignez les points $AdDL$, vous décrirez une

parabole. Car $Ac = 1$, $AC = 4$; $cd = 1$, $\overline{cd}^2 = 1$; CD, 2; $\overline{CD}^2 = 4$. Donc $Ac, 1 : AC, 4 :: \overline{cd}^2, 1 : \overline{CD}^2\ 4$. Ce qui est une proprieté de la parabole. Donc la courbe AdD est une parabole, qui est ici un plan vertical, parcequ'elle passe par la verticale AK. Appellons son parametre p; les AC, Ac, x; les cd, CD, y; son équation à chaque point d, D sera $yy = px$.

2°. Supposons à present que le corps A est poussé par les trois mouvemens, dont le Problême parle; & que le troisiéme est uniforme, & constamment égal à b pendant chaque instant. On demande où sera le mobile A à la fin du second instant.

Au point A élevons $Ag = 2b$ droite au plan vertical de la parabole ACD; par Ag faisons passer un plan horizontal $AghE$, il sera droit au plan vertical de la parabole, & la Section de ces deux plans sera la droite horizontale AE. A la fin du second instant, le corps A n. 2. seroit au point E, s'il n'y avoit que le mouvement d'Orient en Occident; il seroit au point g, s'il n'y avoit que le mouvement du Midi au Septentrion : donc étant poussé par ces deux mouvemens il sera en h extrêmité de la diagonale Ah. Mais par sa pesanteur, si elle agissoit seule, il arriveroit en C, & ce mouvement vertical n'est pas détruit par les deux horizontaux. Ainsi par le point C faisons passer le plan horizontal $CGHD$, qui sera parallele au plan horizontal $AghE$; du point h abaissons la perpendiculaire hH, qui sera parallele & égale à AC, ED. De même $Ag = hE = HD$, & HD sera comme gA droite au plan de la parabole. Le corps A se trouvera donc au point H à la fin du second instant. On peut trouver de cette maniere les points où le corps A arrive à la fin de chaque instant. Joignons tous ces points par la courbe AH.

Pour connoître la nature de la courbe AH on peut sur un plan horizontal, & sur un vertical mener des perpendiculaires de chaque point de la courbe; faire sur l'horizontal un triangle rectiligne égal au triangle CHD, & un égal au triangle HDE sur le vertical comme Problême 1. n. 3. 7.

Nommons CH, s; HE, z; $ED = AC$, x; CD, y, HD, $2b = hE$, Ag.

Dans le triangle HDE rectangle en D, $\overline{HD}^2 = \overline{HE}^2 - \overline{ED}^2$, $4bb = zz - xx$.

Dans le triangle HDC rectangle en D, $\overline{HD}^2 = \overline{HC}^2 - \overline{CD}$, $4bb = ss - yy$.

Donc $zz = ss - yy + xx$, substituons cette valeur de zz dans la premiere équation, il vient $4bb = ss - yy$. Mettons pour yy sa valeur px, nous ferons $ss = px + 4bb$, équation à la courbe AH, qui sera une portion de parabole. Prolongez HC en n, de sorte que nH soit $\sqrt{ss + bb}$; par le point n tirez Pn parallele à AC, & prenez $nP = AC + \frac{sbb}{p} = x + \frac{sbb}{p}$. La parabole dont l'axe est Pn, P le sommet, p le parametre est

est la parabole cherchée. Car par la nature de la parabole, le parametre $p \times Pn = \overline{nH}^2$, $px + 5bb = ss + bb$; $ss = px + 4bb$.

Mais si l'on suppose le mouvement horizontal du Midi au Septentrion variable, de sorte par exemple, que les mouvemens, qui se font en differens instans soient entr'eux comme les mouvemens correspondans de la descente des graves, que DH soit égale à AC; pour $4bb$ il faudra mettre xx, & l'équation sera $ss = px + xx$ équation à l'hyperbole équilatere, dont l'axe déterminé est p, pris sur CA prolongée.

Que si l'on veut, que ces mêmes mouvemens du Midi au Septentrion soient entr'eux comme les quarrez des AC, de sorte que DH soit xx; l'équation deviendra $ss = px + x^4$, courbe du quatriéme degré qui est de trois dimensions.

PROBLEME III.

Trouver les lignes droites qui coupent à angles droits les courbes décrites sur une surface courbe.

Soit MCN, Fig. 226. une courbe décrite sur une surface courbe, si je suppose un plan, qui touche cette courbe au point C, il est évident que toutes les lignes droites, qui seront menées dans le plan touchant par le point C seront aussi tangentes de la courbe MCN. De même si je suppose un plan, qui coupe à angles droits au point C la courbe MCN, toutes les lignes droites, qui seront tirées dans ce plan par le point C, couperont à angles droits la courbe MCN. Il faut trouver une de ces lignes droites tangentes, & une des secantes. Fig. 226. 219.

1. L'on suppose tout ce qui a été fait Problême I. pour la Fig. 219.

2. Cherchons la droite Fa, qui touche la courbe XRV au point R sur le plan horizontal IP. Soit XS l'abscisse de l'axe VX, RS l'appliquée perpendiculaire, qui convient au point R; tirez Rd comme celle qui coupe à angles droits la courbe XRV au point R. La ligne TX est connuë, car elle est égale à la distance du point M donné à l'axe bT donné de position; nommons TX, ε; TS, v, n. 9. Problême I. $XS = TX - TS$, $\varepsilon - v$; dX, μ; $dS = SX - dX$, $\varepsilon - v - \mu$; dR, λ; RS, s, n. 9. Problême I.

Le triangle RSd rectangle en S donne, $\overline{Rd}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{Sd}^2$, $\lambda\lambda = ss + \varepsilon\varepsilon - 2\varepsilon v - 2\varepsilon\mu + vv + 2v\mu + \mu\mu$. Mais pour la courbe RST Problême I. n. 10. $ss = yy - vv$; & Problême I. n. 12. $yy = px$; donc $ss = px - vv$, & $\lambda\lambda = px + \varepsilon\varepsilon - 2\varepsilon v - 2\varepsilon\mu + 2v\mu + \mu\mu$, d'où l'on tire $v = \dfrac{px + \varepsilon\varepsilon - 2\varepsilon\mu + \mu\mu - \lambda\lambda}{2\varepsilon - 2\mu}$.

Comparons cette valeur de v avec celle de n. 12. Problême I. $v = gpx + qxx + mx + n$; il viendra $xx - \dfrac{px + 2gp\varepsilon x - 2gp\mu x + 2m\varepsilon x - 2m\mu x + 2n\varepsilon - 2n\mu - \varepsilon\varepsilon + 2\varepsilon\mu - \mu\mu + \lambda\lambda}{2q\varepsilon - 2q\mu} = 0$.

Maintenant je fais ſuivant la Methode, Part. 3. Sect. 2. Art. 3. $x -$ $\pi = 0$, $xx - 2\pi x + u\pi = 0$. Et je compare les ſeconds termes de ces deux dernieres équations ils donnent $\mu = \frac{2gp\varepsilon + 2\mu\varepsilon - p - 4qex.}{2gp + 2m + 4qx.}$

Je connois la ligne $dx = \mu$, & le point d; je joins Rd, & la droite Fa perpendiculaire à Rd eſt touchante de la courbe XRV au point R.

3. Cherchons la droite OG, qui touche la courbe xru au point r ſur le plan vertical PQ. Soit xs l'abſciſſe de l'axe Vx, rs l'appliquée perpendiculaire qui convient au point r; tirez rt comme celle qui coupe perpendiculairement la courbe xru au point r.

La droite Mx eſt connuë parcequ'elle eſt la diſtance du point b donné au plan vertical PQ, dont on connoît la poſition; nommons mx, θ; $ms = bf$, Fig. 219. x, n. 9. Problême I. $xs = mx - ms$. $\theta - x$; tx, ϕ; $ts = xt - xs$, $\phi - \theta + x$; rt, λ; rs, s, n. 9. Problême I.

Le triangle rst rectangle en s donne $\overline{rt}^2 = \overline{rs}^2 + \overline{ts}^2$, $\lambda\lambda = ss + \phi\phi - 2\theta\phi + 2\phi x + \theta\theta - 2\theta x + xx$. Pour ss ſubſtituons la valeur qu'elle a n. 12. Problême I. dans la Figure urx, il viendra $\lambda\lambda = dd - aa$, &c. équation où tout eſt connu excepté ϕ, λ. Elle ſe changera en $x^4 + \frac{\gamma x^3 + \delta xx - zx - 2\phi x + kk + 2\theta\phi - \phi\phi + \lambda\lambda}{\omega} = 0$. Prenez le quarré de $x - \pi = 0$, multipliez-le par $x + \rho$. Comparez cette équation avec la precedente, pour connoître ρ & ϕ & par conſequent la ligne $tx = \phi$, le point t ſera connu.

Je joins rt, & la droite OG perpendiculaire à rt eſt touchante de la courbe xru au point r.

Les droites Rd, Fa; rt, OG étant trouvées, on cherche les droites ZY, Cp l'une touchante, l'autre coupante à angles droits de la courbe MCN.

4. Sur la touchante GO, & par la droite Cr j'éleve le plan $GODE$ Il eſt droit au plan PQ, 18. 11. Eucl. parcequ'il eſt mené par la droite Cr, qui n. 3. Problême I. eſt droite au plan PQ. Le plan $GODE$ paſſera donc par le point C, & il touchera la courbe MCN en ce ſeul point C.

Car comme il eſt ſur GO, & que GO eſt toute dehors de la courbe xru, le plan $GODE$ ſera auſſi tout dehors de la courbe xru. Mais ſi ce plan $GODE$ coupoit la courbe MCN encore en un point quelconque h, je pourrois de ce point h tirer la ligne hn perpendiculaire au plan vertical PQ, & le point n ſeroit n. 3. Problême I. un point de la courbe xru: la ligne hn ſeroit toute dans le plan $GODE$ qui eſt droit au plan PQ; d'où il ſuivroit que le plan $GODE$ couperoit auſſi la courbe xru au point n; ce qui eſt impoſſible, puiſqu'on a montré qu'il le touche au point r.

De même ſur la tangente Ra, & par la droite RC j'éleve le plan $FBAa$,

qui sera aussi droit au plan horizontal *IP*, & qui ne rencontrera la courbe *MCN* qu'au point *C*, où il la touchera.

Que la droite *YCZ* soit la commune Section des plans *GODE*, *FBAa*; elle sera toute dans ces deux plans, 1. 11. Eucl. & ne touchera la courbe *MCN* qu'au point *C*, où ces deux plans la touchent. La droite *YCZ* est donc une des touchantes qu'on peut tirer à la courbe *MCN* au point *C*.

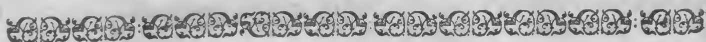
5. Après cela par le point *r* je fais passer le plan *rLK* droit aux plans *PQ*, *GODE*: ainsi les deux plans *rLK*, *PQ* sont droits au plan *GODE*: donc 19. 11. Eucl. leur commune Section est droite au plan *GODE*, & déf. 3. 11. elle fait un angle droit avec la ligne *GO*: mais l'on a trouvé n. 3. que la ligne *rt* fait un angle droit avec la ligne *GO*: donc *tr* est la commune Section des plans *PQ*, *rLK*; autrement on pourroit au point *r* dans le même plan *PQ* élever deux lignes droites à la ligne *OG*, ce qui n'est pas possible, puisqu'il faudroit que deux angles droits fussent partie l'un de l'autre. Le plan *rLK* est donc élevé sur la droite *rt*; ce même plan est d'ailleurs droit au plan *GODE*; il est donc droit, & n'est point incliné sur aucune ligne menée dans le plan *GODE*, comme sur *YCZ* touchante de la courbe *MCN*.

On prouvera de la même façon, que le plan *RHI*, que l'on fait droit aux plans *IP*, *FBAa*, est élevé sur *Rd*, qui est perpendiculaire à *Fa* touchante de la courbe *XRV*, & qu'il n'est point incliné sur *YCZ*.

6. Que la commune Section des plans *rLKt*, *RHId* soit la droite *Cp*, je dis qu'elle est perpendiculaire à la droite *YCZ* tangente de la courbe *NCM*. Car Fig. 227. *CB* est dans le plan *NMPR*, *AB* est droite sur ce plan; deux autres plans *EFGH*, *KILM* sont droits sur le premier; Fig. 227.
leur commune Section *AB* est 19. 11. Eucl. droite aussi à ce plan, & déf. 3. 11. Eucl. l'angle *ABC* est droit, & les plans *EFGH*, *KILM* ne sont point inclinez sur la ligne *BC*.

Ainsi l'on peut assurer que si deux plans *EFGH*, *KILM* ne sont point inclinez sur la droite *CBD*, leur commune Section *AB* est perpendiculaire à *CBD*. Or l'on a montré que Figure 226. les deux plans *rtKL*, *RHId* ne sont point inclinez sur la droite *YCZ*: donc leur commune Section *Cp* est perpendiculaire à la touchante *YCZ*, & *Cp* coupe à angles droits la courbe *MCN* au point *C*.

On ne cherche pas les tangentes des courbes de trois dimensions par la Methode de Part. 3. Sect. 2. Art. 1. 2. 3. parceque cette Methode suppose que les cercles qui coupent la courbe donnée en deux points éloignez de *C*, & le cercle qui touche cette courbe au point *C*, sont dans un même plan: ce qui ne convient pas aux points d'une courbe de trois dimensions, puisque ces points sont en differens plans.



LA GEOMETRIE DE M. DESCARTES.

LIVRE III.

De la construction des Problêmes, qui sont solides, ou plus que solides.

M. DESCARTES apprend ici 1. de quelles lignes on peut se servir dans la construction de chaque Problême, 2. de la nature des équations & de leur preparation pour les resoudre, 3. de la resolution des équations, 4. de la façon generale de construire les Problêmes reduits à une équation de trois ou quatre dimensions, 5. de la façon generale de construire tous les Problêmes reduits à une équation, qui n'a pas plus de six dimensions.



PARTIE PREMIERE.

De quelles Lignes on peut se servir en la construction de chaque Problême.

M. DESCARTES.

De quelles lignes courbes on peut se servir en la construction de chaque Problême.

ENcore que toutes les lignes courbes, qui peuvent être décrites par quelque mouvement regulier, doivent être reçûës en la Geometrie, ce n'est pas à dire, qu'il soit permis de se servir indifferemment de la premiere qui se rencontre, pour la construction de chaque Problême: mais il faut avoir soin de choisir toûjours la plus simple, par laquelle il soit possible de le resoudre. Et même il est à remarquer, que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles, qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la démonstration ou la construction du Problême proposé plus facile; mais principalement celles, qui sont du plus simple genre, qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Exemple touchant l'invention de plusieurs

Comme par Exemple je ne croi pas, qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouver autant de moyennes proportionelles, qu'on veut, ni dont la démonstration soit plus évidente, que d'y

employer les lignes courbes, qui se décrivent par l'instrument *XYZ* * ci-dessus expliqué, Fig. 51. Car voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre *YA*, & *YE*, il ne faut que décrire un cercle, dont le diametre soit *YE*, & pourceque ce cercle coupe la courbe *AD* au point *D*, *YD* est l'une des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la démonstration se voit à l'œil par la seule application de cet instrument sur la ligne *YD*; car comme *YA*, ou *YB* qui lui est égale est à *YC*; ainsi *YC* est à *YD*; & *YD* à *YE*.

moyennes proportionnelles.
* *L. 2. Part. 1. Sect. 3. Fig. 44. 50. 51. 52.*

Tout de même pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre *YA* & *YG*, ou pour en trouver six entre *YA* & *YN*; il ne faut que tracer le cercle *YFG*, qui coupant *AF* au point *F*, détermine la ligne droite *YF*, qui est l'une de ces quatre proportionelles, ou *YHN*, qui coupant *AH* au point *H*, détermine *YH* l'une des six; & ainsi des autres.

Mais pourceque la ligne courbe *AD* est du second genre, & qu'on peut trouver deux moyennes proportionelles par les Sections coniques, qui sont du premier, & pourcequ'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionelles, par des lignes qui ne sont pas de genres si composez, que sont *AF* & *AH*, ce seroit une faute en Geometrie, que de les y employer. Et c'est une faute aussi d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque Problême par un genre de lignes plus simple, que sa nature ne permet.

SECTION I.

De l'instrument inventé pour trouver des moyennes proportionelles.

1. L'On a parlé L. 2. Part. 1. Sect. 3. de la maniere dont cet instrument est construit.

2. Les lignes *CB*, *ED*, *GF*, *NH*, *LK*, *PM* sont perpendiculaires à la ligne *YX*; les lignes *DC*, *FE*, *HG*, *KN*, *ML* sont perpendiculaires à la ligne *YZ*. C'est pourquoi le triangle *YCD* est rectangle en *C*, & du sommet *C* l'on a abaissé *CB* perpendiculaire sur la base *YD*: donc les triangles *YBC*, *YCD* sont équiangles, & *YB* : *YC* dans le triangle Fig. 51.

YBC : : *YC* : *YD* dans le triangle *YCD* ; & *YC* eſt moyenne proportionelle entre *YB*, & *YD*,

Le triangle *YDE* eſt auſſi rectangle en *D*, & du ſommet *D* l'on a abaiſſé la perpendiculaire *DC* ſur la baſe *YE* : donc les triangles *YCD*, *YDE* ſont équiangles ; & *YC* : *YD* dans le triangle *YCD* : : *YD* : *YE* dans le triangle *YDE* ; & *YD* moyenne proportionelle entre *YC* & *YE*. Donc en reprenant les deux analogies, *YB* : *YC* : : *YC* : *YD* : : *YD* : *YE*. & *YC*, *YD* ſont deux moyennes proportionelles entre *YB*, *YE*.

On trouvera de la même façon, que *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, *YG* ſont cinq moyennes proportionelles entre *YB*, *YH* ; que *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, *YG*, *YH* ſont ſix moyennes proportionelles entre *YB*, *YN*, &c.

3. L'uſage de cet inſtrument eſt tel, Fig. 51. Lorſqu'on a une moyenne proportionelle à trouver entre deux lignes données ; l'inſtrument eſt d'abord fermé, de ſorte que *YX* eſt ſur *YZ*, & les points *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, &c. des lignes *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, &c. ſur le point *Y* : ce que l'on obſerve, quelque nombre de moyennes proportionelles que l'on cherche. Enſuite ſur la ligne *YX*, l'on prend *YB* égale à la plus petite des lignes données ; l'on y conduit le point *B* de la ligne *BC*, & on l'arrête ferme en cet endroit. La ligne *BC* ainſi muë chaſſe devant elle toutes les autres lignes *CD*, *DE*, &c. Après cela ſur la même ligne *YX*, l'on prend encore *YD* égale à la ſeconde ligne donnée, & l'on marque le point *D*. Enfin l'on ouvre l'inſtrument juſqu'à ce que la ſeconde ligne tranſverſale *CD* tombe ſur le point marqué *D* : & l'on a ſoin que toutes les lignes tranſverſales, qui ſervent, ſe touchent ; ce que l'on ſuppoſe auſſi, quelque nombre de moyennes proportionelles que l'on cherche. La ligne *CD* étant dans cette ſituation, le point *C* donne *YC* moyenne proportionelle cherchée.

Lorſqu'on doit trouver deux moyennes proportionelles entre deux lignes données ; en premier lieu ſur la ligne *YX*, l'on prend *YB* égale à la moindre des données ; on y conduit & l'on y arrête le point *B* de la ligne *BC*. En ſecond lieu ſur l'autre ligne *YZ*, l'on prend *YE* égale à la ſeconde des lignes données, & l'on marque le point *E*. En troiſiéme lieu l'on ouvre l'inſtrument juſqu'à ce que la troiſiéme ligne tranſverſale *DE* coupe *YZ* au point *E*. Alors le point *C* donne *YC*, le point *D* donne *YD*, qui ſont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Enfin quelque nombre de moyennes proportionelles, qu'on doive trouver entre deux lignes données : on prendra toûjours ſur *YX* l'eſpace *YB* égal à la plus petite donnée ; & l'on arrêtera la ligne *BC*. Et ſi le nombre des moyennes cherchées eſt un nombre impair 1, 3, 5, &c. l'on prendra ſur la même *YX*, l'intervale *YD*, ou *YF*, ou *YH*, &c. égal à la ſeconde des données. Enſuite on ouvrira l'inſtrument, juſqu'à ce que la ſeconde *CD* des tranſverſales tombe ſur le point marqué *D*, ou *F*, ou *H*,

&c. lorsqu'on ne cherche qu'une moyenne ; jusqu'à ce que la quatriéme *EF* tombe sur le point marqué, lorsqu'on cherche trois moyennes ; jusqu'à ce que la sixiéme *GH* tombe sur le point marqué, lorsqu'on cherche cinq moyennes, &c. Mais si le nombre des moyennes proportionelles demandées est pair 2, 4, 6, &c. c'est sur *YZ* qu'il faut prendre l'intervale *YE*, ou *YG*, ou *YN*, &c. égal à la seconde ligne donnée.

Après cela l'on ouvre l'instrument, jusqu'à ce que *DE* la troisiéme des transversales tombe sur le point marqué *E*, ou *G*, ou *N*, &c. lorsqu'on cherche deux moyennes ; jusqu'à ce que *FG* la cinquiéme tombe sur le point marqué, lorsqu'on cherche quatre moyennes, &c.

4. Que si l'on veut servir des courbes *AD*, *AF*, *AH*, &c. qui sont décrites par des poinçons appliquez, tandis qu'on ouvre l'instrument, l'un à l'intersection des lignes *CD*, *DE* ; l'autre à l'intersection des lignes *FE*, *FG*, le troisiéme à l'intersection des lignes *GH*, *HN*, &c. Il faut sur un plan tirer la ligne infinie *YZ* ; couper *YA* égale à la plus petite des deux lignes données ; sur la ligne *YZ* du plan ajuster la ligne *YZ* de l'instrument fermé, c'est-à-dire que la ligne *YX* de l'instrument est aussi sur la ligne *YZ* du plan ; mettre le point *Y* de l'instrument sur le point *Y* du plan. Ensuite il faut sur *YX* couper *YB* = *YA* ; appliquer la regle *BC* au point *B* ; ouvrir l'instrument & avec des poinçons tracer autant de courbes que l'on souhaitera sur le plan. Cette preparation étant faite l'on ôte l'instrument.

Si vous cherchez deux moyennes proportionelles entre *YA* ou *YB* & *YE* ; sur le diametre *YE* décrivez le demi cercle *YDE*, du point *D*, où ce demi-cercle coupe la premiere courbe *AD*, abaissez *DC* perpendiculaire à *YE*, vous aurez *YC*, *YD* les deux moyennes cherchées entre *YB* & *YE*.

Si vous voulez quatre moyennes proportionelles entre *YA* ou *YB* & *YG* ; sur le diametre *YG* décrivez le demi-cercle *YFG*, qui coupera la seconde courbe *AF* au point *F* ; & par les points *Y*, *F* tirez *YF*. Après cela du point *F* abaissez *EF* perpendiculaire à *YZ* ; du point *E*, *ED* perpendiculaire à *YX* ; du point *D*, *DC* perpendiculaire à *YZ* ; vous aurez *YC*, *YD*, *YE*, *YF* moyennes entre *YB*, *YG*. L'on fera la même chose pour des moyennes proportionelles en nombre pair.

Mais lorsqu'elles sont en nombre impair, comme s'il falloit trouver trois moyennes proportionelles entre *YA* ou *YB* la plus petite des données, & une autre ligne quelconque. J'ouvre mon compas de la longueur de cette seconde ligne donnée, je mets un de ses piez sur le point *Y*, & de l'autre je coupe la seconde courbe *AF* au point *F* ; par les points *Y*, *F* je tire la droite *YF* : ensuite du point *F* j'abaisse *FE* perpendiculaire sur *YZ* ; du point *E*, la perpendiculaire *ED* sur *YX* ; du point *D* la perpendiculaire *DC* sur *YZ*, & j'ai *YC*, *YD*, *YE* trois moyennes entre *YB*,

YF. Si l'on demandoit cinq moyennes proportionelles, avec le compas je couperois la troisiéme courbe *AH*, &c.

Bien plus le cercle *YHN* me fournit autant de moyennes proportionelles que je veux en nombre pair entre *YA* & *YN*. Car si j'en veux six, du point *Y* je tire la droite *YH* au point *H*, où le cercle decrit sur le diametre *YN* coupe la troisiéme courbe *YH*; en cette droite *YH* est la sixiéme des moyennes, les autres se trouvent en tirant des perpendiculaires, comme auparavant. Si j'en veux quatre, du point *Y* je tire la droite *Yf* au point *f*, où le cercle décrit sur le diametre *YN* coupe la seconde courbe *AF*; & cette droite *Yf* est la quatriéme moyenne proportionelle entre *YA* & *YN*; les autres se trouvent comme auparavant, en tirant des paralleles. Si j'en veux deux, du point *Y* je tire *Yd*, au point *d*, où le cercle décrit sur le diametre *YN* coupe la premiere courbe *AD*; & cette droite *Yd* est la seconde des moyennes cherchées; l'autre se trouve en tirant la perpendiculaire *DC*.

Mais je veux des moyennes proportionelles en nombre impair entre *YA* & une autre quelconque *YH*; le même cercle ne me les donnera pas dans les points, où ce cercle coupe les differentes courbes.

Les courbes *AD*, *AF*, *AH*, &c. servent bien à trouver quelque nombre de moyennes proportionelles que l'on demande entre *YA*, & une autre ligne quelconque : mais dès que la plus petite des données sera differente de *YA*, il faudra décrire d'autres courbes.

5. Toutes ces Operations sont démontrées, tandis que l'instrument n'est representé que par des lignes Mathematiques, qui n'ont ni largeur, ni épaisseur : mais dans la pratique il faut substituer des Regles qui sont larges & épaisses comme Fig 49. 50. 52. Ce qui peut arriver ou en laissant entier l'angle droit exterieur de toutes les Regles transversales, comme Fig. 52. ou en coupant l'angle droit exterieur des seules Regles, qui sont perpendiculaires à la Regle inferieure *YZ*, comme Fig. 50. ou en coupant l'angle droit exterieur des seules Regles, qui sont perpendiculaires à la Regle superieure *YX*; ou en coupant l'angle exterieur de toutes les Regles, comme Fig. 49.

Si l'on ne coupe aucun angle exterieur des Regles transversales, Fig. 52. Voici ce qui suit. 1°. La Regle *YX* a deux côtez, l'exterieur *YX*, l'interieur *Yx*; il en est de même de la Regle *YZ* : Or l'on doit prendre les moyennes proportionelles cherchées, aussi bien que les deux extrêmes données sur la ligne exterieure *YX* de la Regle superieure, & sur la ligne interieure *YZ* de la Regle inferieure : parceque ce sont ces deux lignes *YX*, *YZ*, qui se terminent au centre *Y* de l'instrument, & qui font l'angle *ZYX*. 2°. Les Regles transversales glissent les unes sur le côté interieur *Yx* de la Regle superieure, les autres sur le côté interieur *YZ* de l'inferieure dans des coulisses qu'on y a creusées. 3°. Lorsque l'instrument est fermé, &

FIG. 52.

& que la Regle ſuperieure entre dans l'inferieure, afin d'occuper le même eſpace : comment toutes les pointes des angles exterieurs des lignes tranſverſales pourront-elles ſe trouver ſur le centre *Y*, non ſeulement parcequ'il faudroit, que la couliſſe fût extrêmement large, pour contenir en un ſeul endroit toutes les lignes tranſverſales, & que ſi la couliſſe étoit ſi large, les Regles ne s'y tiendroient pas fermes, ni dans un même plan : mais encore parceque les ſommets des angles exterieurs des Regles tranſverſales, qui ſont perpendiculaires ſur la Regle ſuperieure *YX*, ne répondent pas au centre *Y*, qui eſt dans la ligne exterieure *YX*; tandis que ces ſommets ſont dans la ligne interieure *Yx*? 4. Comment trouvera-t'on les triangles dont on a beſoin? Les triangles *YBC YCD* ſont tels qu'il les faut, pourveu qu'on prenne dans la Regle *BC* le côté qui eſt tourné vers la Regle *DC*, & dans la Regle *DC* le côté qui eſt tourné vers la Regle *BC*. Mais afin que le triangle *YDE* ſervît, il faudroit que la ligne tirée du point *D* au point *E* fût la même, que la ligne *dE* de la troiſiéme Regle tranſverſale, ce qui n'arrive pas.

La difficulté augmente dans le triangle *YEF*, où il faudroit que les points *E*, *e* ne fuſſent qu'un, afin que la ligne *ED* fût, comme elle doit l'être, une perpendiculaire abaiſſée du ſommet *e* de l'angle droit *YeF* ſur la baſe *YF* du triangle rectangle *YeF*.

Les mêmes difficultez ſe trouvent dans les triangles ſuivans *YFG*; *YGH*, &c.

Si Fig. 50. l'on coupe l'angle droit des Regles tranſverſales, qui ſont perpendiculaires à la Regle inferieure *YZ*, en leur ôtant ce qui eſt ponctué; ſans rien changer aux autres Regles tranſverſales. 1°. Il faut auſſi prendre les extrêmes données, & les moyennes cherchées ſur le côté exterieur *YX* & ſur l'interieur *YZ*. 2°. Outre la largeur des couliſſes, outre que ce ne ſont pas les ſommets *b*, *d*, *f* des Regles tranſverſales perpendiculaires ſur *YX*, qui ſe raſſemblent au centre *Y*, lorſque l'inſtrument eſt fermé : mais que ce ſont les points *B*, *D*, *F* exterieurs. Outre ces choſes, dis-je, les ſommets *C*, *E*, *G*, qui ont été retranchez des Regles tranſverſales, qui ſont perpendiculaires à *YZ*, peuvent difficilement ſe réünir juſte au centre *Y*. 3°. L'on ne peut pas couper le ſommet *Cnm* de la Regle *DC*, de telle ſorte, que toûjours la ligne *ln* de la Regle *BC* faſſe une même ligne avec la ligne *nm* de la Regle *DC*, & que la ligne *bC* de la Regle *BC* tombe ſur le point *C* de la Regle *DC*. Car à meſure qu'on ouvre l'inſtrument, l'angle *CYB* croit, & comme le triangle *YBC* eſt rectangle en *B*, l'angle *BCY* diminuë toûjours : donc auſſi l'angle interne *Cmn*, qui lui eſt égal décroit toûjours : & dans le triangle *Cmn* rectangle en *C*, l'angle *Cnm* augmente toûjours. Mais ces deux angles *Cnm*, *Cmn* ont été rendus fixes & déterminez, lorſqu'on a coupé l'extrêmité de la Regle *DC*. L'on ne peut donc pas tellement FIG. 50.

couper l'extrêmité de la Regle *CD*, que les lignes *lm*, *mn* n'en fassent jamais qu'une ; ni que la ligne *BC* passe toûjours par le point *C*, parceque la ligne *ln* variant, la ligne *bC* varie aussi, & a tantôt une position, tantôt une autre à l'égard du point *C*. Or il faudroit que la ligne *BbC* tomba toûjours sur le point *C*, afin que la ligne *nD* vienne du sommet *C* de l'angle droit *YCD* ; autrement *CnD* n'est pas une moyenne proportionelle.

Si l'on coupe le sommet des seules transversales qui sont perpendiculaires à la Regle superieure *YX*, c'est entierement la même chose.

Fig. 49. Si l'on coupe le sommet de toutes les transversales, comme Fig. 49. l'on trouvera encore les mêmes difficultez.

SECTION II.

Des lignes dont il faut se servir pour la construction d'un Problême.

1. QUand on veut construire un Problême, c'est une faute selon M. DESCARTES soit que l'on se serve de lignes plus composées, lorsqu'il peut se construire avec des lignes plus simples ; soit qu'on tâche d'employer des lignes plus simples, lorsqu'il ne peut être construit, que par des lignes plus composées. En particulier, comme il le dira Part. 3. Sect. 3. Art. 2. ce seroit une faute d'employer les Sections coniques à construire les Problêmes, pour lesquels on n'a besoin que de cercles, ou de n'employer pas des Sections coniques à construire ceux, pour lesquels les cercles ne suffisent pas. Car enfin, ajoûte M. DESCARTES, tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

2. C'étoit là le sentiment de Pappus, * comme on le voit dans le Liv. 4. de ses Collections Mathematiques, avant la Proposition 31. où il assure que c'étoit aussi le sentiment des Geometres de son tems. C'est aussi ce qu'exigent ordinairement les Geometres Modernes, parmi lesquels il s'en trouve pourtant, qui y mettent quelque exception. ** *Car c'est en quelque façon gêner la Geometrie, que d'y introduire souvent avec beaucoup de difficulté, de certaines courbes preferablement à d'autres, qui se presentent naturellement, & dont la description est souvent très-simple, en quoi il faudroit que les courbes fussent preferées, sans avoir égard à leur genre, de la maniere, qu'on le détermine ordinairement.* De sorte qu'il † *paroît que la facilité d'une construction & sa simplicité peuvent recompenser en quelque sorte le défaut, qu'il peut y avoir à employer des courbes plus composées.* Ainsi dans l'instrument, dont on vient de parler, Sect. 1. §. *Les lignes* AD, AF, AH *sont beaucoup trop composées pour*

* *Videtur autem quodam modo peccatum non parvum esse apud Geometras, cùm Problema planum per conica, vel linearia ab aliquo invenitur, & ut summatim dicam, cùm ex improprio genere solvitur.*

** *M. Guisnée. Application de l'Algebre à la Geometrie. Pag. 28.*

† *M. de l'Hôpital, Liv. 10. des Problêmes déterminez. Pag. 400.*

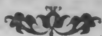
§ *Pag. 459.*

resoudre le Problême des moyennes proportionelles ; cependant la facilité de la construction & de la démonstration récompense en quelque sorte ce défaut. En effet dans la pratique ne faut-il pas principalement avoir égard à la facilité, lorsque l'utilité est la même ? Pourquoi vouloir rendre entierement inutiles des proprietez d'une courbe d'un degré plus composée, dès qu'elles seront proprietez d'une courbe d'un degré plus simple, & cela seulement, parceque la plus haute puissance de l'inconnuë, qui exprime la nature d'une courbe monte à la cinquiéme puissance ; tandis que la plus haute puissance de l'inconnuë d'une autre courbe ne va que jusqu'à la quatriéme. Ce ne sera pas même une marque d'ignorance, que d'employer une courbe plus composée : car le Geometre peut savoir les differentes constructions du Problême.

3. M. DESCARTES a-t'il construit les Problêmes par les plus simples lignes ? Pour une équation de six dimensions M. DESCARTES employe deux lieux, dont l'un a trois degrez, l'autre qui est le cercle en a deux ; M. de Fermat employe deux lieux de trois degrez chacun ; M. de la Hire employe deux lieux, dont l'un a trois degrez, l'autre deux. Pour une équation de sept dimensions, la Methode de M. DESCARTES employe deux lieux dont l'un a quatre degrez, l'autre qui est le cercle en a deux ; celle de M. de Fermat employe deux lieux de quatre dimensions chacun ; celle de M. de la Hire employe deux lieux de trois degrez chacun. En tout la Methode de M. de la Hire est plus simple & plus abregée, que celle de M. de Fermat. Pour les équations du sixiéme degré la Methode de M. DESCARTES est en quelque façon plus simple que celle de M. de Fermat : mais pour les autres équations la Methode de M. de Fermat est plus abregée que celle de M. DESCARTES. M. de l'Hôpital Liv. 9. de la construction des égalitez se sert des mêmes lieux que Monsieur de la Hire.

4. Ceux qui les premiers ont cherché par quelle ligne chaque Problême devoit être construit ; ont apparemment tenté cette construction par des courbes souvent plus simples, que la nature du Problême ne le permettoit, avant que d'avoir pû rencontrer les plus simples, qui convinssent : c'étoit un effet de l'ignorance, à la verité : mais il n'y avoit là aucune faute.

Les Geometres qui depuis M. DESCARTES ont tenté de construire les Problêmes par des courbes plus simples que celles qu'il avoit déterminées, Liv. 3. Part. 4. & 5. n'ont pas cru, avant même que de voir leur succès, de faire une faute.





PARTIE SECONDE.

De la nature des Equations, & de leur preparation.

SECTION I.

De la nature des Equations.

M. DESCARTES.

De la nature des équations.

OR afin que je puiſſe ici donner quelques Regles, pour éviter l'une & l'autre de ces deux fautes; il faut que je die quelque choſe en general de la nature des équations; c'eſt-à-dire des ſommes composées de pluſieurs termes, partie connus & partie inconnus, dont les uns ſont égaux aux autres, ou plûtôt qui conſiderez tous enſemble ſont égaux à rien: car ce ſera ſouvent le meilleur de les conſiderer en cette ſorte.

ARTICLE I.

Des Racines d'une Equation.

M. DESCARTES.

Combien il peut y avoir de racines en chaque équation.

SAchez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnuë a de dimenſions, autant peut-il y avoir de diverſes racines, c'eſt-à-dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple ſi on ſuppoſe x égal à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien; & dérechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux équations $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$ l'une par l'autre, on aura $xx - 5x + 6 = 0$, ou bien $xx = 5x - 6$, qui eſt une équation, en laquelle la quantité x vaut 2, & tout enſemble vaut 3. Que ſi dérechef on fait $x - 4 = 0$, & qu'on multiplie cette ſomme par $xx - 5x + 6 = 0$, on aura $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$; qui eſt une équation en laquelle x ayant trois dimenſions, a auſſi trois valeurs, qui ſont 2, 3, & 4.

Mais souvent il arrive que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Comme si on suppose, que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$ fait $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$. Pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vrayes, qui sont 2, 3, 4, & une fausse qui est 5. *Quelles sont les fausses racines.*

Voyez Sect. 2. Art. 10.

1. On peut appeller racines d'une quantité abx, les trois quantitez a, b, x, par la multiplication desquelles la quantité abx a été produite. a & b sont les racines de la quantité $aa + 2ab + bb$, parceque $a + b$ se multipliant l'a produite. Les racines de l'équation $xx - aa = 0$ sont $x + a = 0$, $x - a = 0$ par la multiplication desquelles l'équation a été produite ; ou $x = a$, $x = -a$, en exprimant les differentes valeurs de x ; ou principalement x lui-même ; ou ses valeurs $+a$, $-a$. Car on donne indifferemment à toutes ces quantitez le nom de racine de l'équation $xx - aa = 0$. Ce qu'il est aisé d'appliquer à toute autre équation.

M. DESCARTES divise les racines d'une équation en réelles ou imaginaires ; les réelles en vrayes ou fausses. Il appelle racines vrayes celles, dont la valeur est plus grande que zero, $x = a$, $x - a = 0$; $x = 5$, $x - 5 = 0$: fausses celles dont la valeur est moindre que zero, $x = -a$, $x + a = 0$; $x = -6$, $x + 6 = 0$; ou $-x = 6$; $-x - 6 = 0$. Zero est, pour ainsi dire, le terme où les racines vrayes & fausses commencent, les unes allant d'un côté en croissant $0, +1, +2, +3, +4$, &c. les autres allant de l'autre en décroissant $0, -1, -2 -3, -4$, &c. Les racines imaginaires sont celles, qui supposent que l'on puisse extraire la racine quarrée d'une grandeur negative $\sqrt{-ab}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-aa}$, $\sqrt{-4}$; ce qui est impossible : car -2 se multipliant produit $+4$, le quarré de $-a$ c'est $+aa$, & il ne peut y avoir de quarré negatif. Les racines vrayes s'appellent encore positives, les fausses negatives, & renversées.

Dans les lieux Geometriques une appliquée, qui est à droite, ayant été nommée $+y$; l'appliquée correspondante, qui est à gauche, se nomme $-y$: les abscisses, qui vont en haut, ayant été nommées $+x$; les abscisses, qui partent du même point, & qui vont en bas, se nomment $-x$. Ainsi il est certain que les racines $-y$, $-x$ sont autant réelles, & representent des quantitez aussi réelles, que les racines positives $+y$, $+x$. Ce pourroit être pour cette raison, que M. DESCARTES les a également appellé réelles. Les vrayes ont aussi été nommées * *positiva suprà*, * Lett. 78. Tom.

3. de M. Descartes. les fausses *positiva infrà*, positives qui vont en haut, positives qui vont en bas.

Les racines sourdes positives $\sqrt{a}$, $\sqrt{3}$ ne sont pas imaginaires, comme les negatives $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-3}$: parceque quoiqu'on ne puisse pas plus exprimer exactement en nombre $\sqrt{3}$ que $\sqrt{-3}$; cependant l'on peut approcher de $\sqrt{3}$; on peut assurer qu'elle est plus grande que 1, moindre que 2; on peut l'exprimer exactement en ligne. Or tout cela ne convient pas à $\sqrt{-3}$.

ARTICLE II.

De la formation des Equations.

ON connoît la nature des équations, en examinant de quelle maniere elles ont pû être produites.

1. Soit $x = a$, ou $x - a = 0$; $x = b$, ou $x - b = 0$; leur produit est $xx \begin{smallmatrix}-ax\\-bx\end{smallmatrix} + ab = 0$. Soit en nombres $x = 2$ ou $x - 2 = 0$; $x = 3$, ou $x - 3 = 0$, leur produit est $xx - 5x + 6 = 0$.

Soit encore $x = c$, ou $x - c = 0$, qui multiplie l'équation litterale precedente, le produit est

$$x^3 \begin{array}{l} -axx \\ -bxx \\ -cxx \end{array} \begin{array}{l} +abx \\ +acx \\ +bcx \end{array} -abc = 0.$$

Soit aussi $x - 4 = 0$, qui multiplie l'équation numerique precedente, le produit est $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$.

Soit encore $x = d$, ou $x - d = 0$, qui multiplie l'équation litterale precedente, le produit est

$$x^4 \begin{array}{l} -ax^3 \\ -bx^3 \\ -cx^3 \\ -dx^3 \end{array} \begin{array}{l} +abxx \\ +acxx \\ +adxx \\ +bcxx \\ +bdxx \\ +cdxx \end{array} \begin{array}{l} -abcx \\ -abdx \\ -acdx \\ -bcdx \end{array} +abcd = 0.$$

Soit aussi $x - 5 = 0$, qui multiplie l'équation numerique precedente, le produit est $x^4 - 14x^3 + 71xx - 154x + 120 = 0$.

La derniere équation litterale peut encore être produite par la multiplication des deux équations $xx \begin{smallmatrix}-ax\\-bx\end{smallmatrix} + ab = 0$, $xx \begin{smallmatrix}-cx\\-dx\end{smallmatrix} + cd = 0$; ou par celle des deux $xx \begin{smallmatrix}-ax\\-cx\end{smallmatrix} + ac = 0$, $xx \begin{smallmatrix}-bx\\-dx\end{smallmatrix} + bd = 0$; ou des deux $xx \begin{smallmatrix}-ax\\-dx\end{smallmatrix} + ad = 0$, $xx \begin{smallmatrix}-bx\\-cx\end{smallmatrix} + bc = 0$; ou des deux

$$x^3 \begin{matrix} -axx + abx \\ -bxx + adx - abd \\ -dxx + bdx \end{matrix} = 0,\ x - c = 0;$$ ou des deux

$$x^3 \begin{matrix} -bxx + bcx \\ -cxx + bdx - bcd \\ -dxx + cdx \end{matrix} = 0,\ x - a = 0;$$ ou des deux

$$x^3 \begin{matrix} -axx + acx \\ -cxx + adx - acd \\ -dxx + cdx \end{matrix} = 0,\ x - b = 0.$$

La derniere équation numerique peut aussi être produite par la multiplication des deux équations $xx - 5x + 6 = 0$, $xx - 9x + 20 = 0$, dont la premiere est le produit de $x - 2 = 0$ par $x - 3 = 0$; la seconde est le produit de $x - 4 = 0$, par $x - 5 = 0$. ou par la multiplication des deux $xx - 6x + 8 = 0$, $xx - 8x + 15 = 0$, &c.

On peut ainsi produire d'autres équations à l'infini, en multipliant celles qui sont déja formées par de nouvelles quantitez.

On peut aussi multiplier des équations litterales par des équations numeriques, $x - a = 0$ par $x - 7 = 0$, dont le produit est $xx \begin{matrix} -ax \\ -7x \end{matrix} + 7a = 0$.

Dans ces équations, pour la formation desquelles on ne s'est servi que de racines vrayes, les signes + & — sont alternatifs, le signe + est dans les termes impairs 1, 3, 5, &c. le signe — dans les pairs, 2, 4, 6, &c.

Toutes les racines des équations precedentes se trouvent dans le second terme, où elles font une somme. Ce qui se pourra encore observer dans les suivantes.

Si les racines des équations avoient été $-x = -a$, $-x + a = 0$; $-x = -2$, $-x + 2 = 0$, &c. on les reduiroit à $x = a$, $x - a = 0$, $x = 2$, $x - 2 = 0$: de sorte que ce sont les mêmes racines vrayes differemment exprimées.

2. Soit $x = -a$, ou $x + a = 0$; $x = -b$, ou $x + b = 0$; leur produit est $xx \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} + ab = 0$. Soit $x = -2$, ou $x + 2 = 0$; $x = -3$, ou $x + 3 = 0$, leur produit est $xx + 5x + 6 = 0$.

Soit encore $x = -c$, ou $x + c = 0$, qui multiplie l'équation litterale precedente, le produit est $x^3 \begin{matrix} +axx + abx \\ +bxx + acx + abc \\ +cxx + bcx \end{matrix} = 0$. Soit aussi

$x = -4$, $x + 4 = 0$, qui multiplie l'équation numerique precedente, le produit eſt $x^3 + 9xx + 26x + 24 = 0$.

Soit encore $x = -d$, ou $x + d = 0$, &c.

Dans ces équations, pour la formation deſquelles l'on ne s'eſt ſervi que de racines fauſſes, le ſigne + ſe trouve partout.

Si les racines propoſées avoient été $-x = a$, ou $-x - a = 0$; $-x = 2$, ou $-x - 2 = 0$; &c. on les reduiroit à $x = -a$, $x + a = 0$; $x = -2$, $x + 2 = 0$. Ainſi ce ſont les mêmes racines fauſſes que les precedentes.

3. Soient $x - a = 0$, $x - b = 0$ deux racines vrayes; $x + c = 0$, $x + d = 0$; le produit

$$x^4 \begin{array}{l} -ax^3 \\ -bx^3 \\ +cx^3 \\ +dx^3 \end{array} \begin{array}{l} +abxx \\ -acxx \\ -bcxx \\ -adxx \\ -bdxx \\ +cdxx \end{array} \begin{array}{l} +abcx \\ +abdx \\ -acdx \\ -bcdx \end{array} + abcd = 0.$$

Suppoſons $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$; l'équation ſe reduit à $x^4 + 4x^3 - 7xx - 22x + 24 = 0$.

Soient encore $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ deux racines vrayes; $x + 4 = 0$, racine fauſſe: le produit eſt $x^3 - 1xx - 14x + 24 = 0$.

Dans ces équations les ſignes + & − ſont alternatifs autant de fois qu'il y a de racines vrayes; & ils ſont autant de fois de ſuite qu'il y a de racines fauſſes. Dans les équations litterales il a fallu, lorſque les deux ſignes ſe trouvent dans le même terme, connoître & comparer la valeur des quantitez connuës; avant que de ſavoir quel ſigne ce terme avoit.

4. Les racines ſont $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 6 = 0$; le produit eſt $x^3 * - 28x + 48 = 0$, dans laquelle le ſecond terme eſt évanoüi & nul. Ce qui arrivera dans toutes les équations numeriques, où la ſomme des racines vrayes, 2, 4, eſt égale à la ſomme 6 des fauſſes. Le même arrive aux équations litterales, lorſqu'il n'y aura qu'une lettre a qui exprimera la valeur des x. Soit donc $a = 2$, $2a = 4$, $3a = 6$, les racines precedentes ſeront $x - a = 0$, $x - 2a = 0$, $x - 3a = 0$, dont le produit eſt $x^3 * - 7aax + 6a^3 = 0$.

Mais ſi differentes lettres expriment les racines, le ſecond terme ne ſera pas évanoüi avant qu'on ait comparé ces valeurs, comme on a fait n. 3. mais les racines poſitives ſeront dans le ſecond terme avec le ſigne −, & les negatives avec le ſigne +. Soit donc $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, & les racines precedentes ſeront $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, leur

$$\text{leur produit}\quad x^3 \begin{array}{l} -axx + abx \\ -bxx - acx + abc = 0. \\ +cxx - bcx \end{array}$$

Reciproquement, lorsque le second terme est évanoüi, la somme des racines vrayes est égale à la somme des racines fausses.

5. Soit $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 5 = 0$; le produit est $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$. Le second terme a le signe $-$, ce qui arrive toutes les fois que la somme des racines vrayes surpassera la somme des fausses, parceque toutes les racines se trouvent une fois chacune dans le second terme. Ce qui arrive, dis-je, soit que les racines s'expriment par des nombres, soit qu'elles s'expriment par une même lettre. Car si $a = 2$, $\frac{3a}{2} = 3$, $2a = 4$, $\frac{5a}{2} = 5$ les racines seront $x - a = 0$, $x - \frac{3}{2}a = 0$, $x - 2a = 0$, $x + \frac{5}{2}a = 0$; & le produit $x^4 - 2ax^3 - \frac{19}{4}aaxx + \frac{53}{4}a^3x - \frac{15}{2}a^4 = 0$. Lorsque les racines s'expriment par differentes lettres, les signes $+$ & $-$ se trouveront au second terme, & il sera aisé de voir, si la somme des quantitez, qui ont $-$, est plus grande que la somme des quantitez qui ont $+$: & si la somme des quantitez, qui ont $-$, est la plus grande, on regardera le second terme comme ayant $-$. Dans cette équation

$$x^3 \begin{array}{l} -axx + abx \\ -bxx - acx + abc = 0, \\ +cxx - bcx \end{array} \text{si } a = 2, b = 3,$$

$c = 4$, le second terme se reduit à $-1xx$.

6. Soit $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 4 = 0$, $x + 2 = 0$, leur produit est $x^4 + 1x^3 - 16xx - 4x + 48 = 0$. Le second terme a le signe $+$; & cela arrive toutes les fois, que la somme des racines fausses surpasse la somme des vrayes; parceque toutes les racines se trouvent une fois chacune dans le second terme. Quand l'équation est litterale, on jugera du signe, que le second terme a, comme n. 5.

7. Les racines $xx - a$, $xx - b$, $xx + c$ produisent

$$x^6 \begin{array}{l} -ax^4 + abxx \\ -bx^4 - acxx + abc = 0. \\ +cx^4 - bcxx \end{array} \text{Ainsi lors-}$$

que les exposans $6, 4, 2, 0$, de l'inconnuë dans chaque terme seront également éloignez entr'eux, & que leur difference sera 2; l'équation sera d'un degré deux fois moindre qu'il ne paroît, à en juger par la plus hau-

te puiſſance : car celle-ci, qui n'eſt que du troiſiéme degré, paroîtroit du ſixiéme, ſi l'on ne regardoit que le premier terme x^6 ; lequel étant produit par la multiplication de $xx \times xx \times xx$, ſes racines ſont xx & non pas x. Cependant après avoir trouvé les trois racines $xx = a$, $xx = b$, $xx = -c$, on peut encore déterminer les valeurs de x, qui ſont $x = \pm \sqrt{a}$, $x = \pm \sqrt{b}$; $x = \mp \sqrt{c}$; de ſorte que x a enfin ſix racines dans l'équation propoſée.

Mais ſi la difference des expoſans 6, 3, 0, étoit 3 ; comme il arrive dans $x^6 + 2ax^3 + aa$; l'équation ſeroit d'un degré trois fois moindre, que le premier terme ne l'indique. Celle-ci eſt quarrée, ſes racines ſont $x^3 + a = 0$, $x^3 + a = 0$, qui ont encore chacune trois racines $x = -\sqrt[3]{a}$, $x = -\sqrt[3]{a}$, $x = -\sqrt[3]{a}$.

8. Une racine litterale $\sqrt{a-b}$ peut être imaginaire, ſans le paroître d'abord : car ſi a eſt plus grand que b, la racine eſt réelle, ſi a eſt moindre que b, elle eſt imaginaire.

Les racines imaginaires peuvent par leur multiplication faire un produit réel : $+\sqrt{-9}$ multiplié par $-\sqrt{-9}$, produit $+9$. Si l'on multiplie $x - 1 - \sqrt{-6} = 0$ par $x - 1 + \sqrt{-6} = 0$, le produit eſt $xx - 2x + 7 = 0$; qui étant multiplié par $x + 2 + \sqrt{-7}$, fait $x^3 + xx\sqrt{-7} + 3x - 2x\sqrt{-7} + 14 + 7\sqrt{-7} = 0$. Si l'on multiplie enſemble $x + \sqrt{-a}$, $x - \sqrt{-a}$, $x - b + \sqrt{-c}$, $x - b - \sqrt{-c}$, le produit eſt $x^4 - 2bx^3 \begin{matrix} +axx \\ +bbxx \\ +cxx \end{matrix} + 2abx \begin{matrix} +abb \\ +ac \end{matrix} = 0$.

On peut donc obſerver, que lorſque les équations n'ont point de termes, qui ayent une racine imaginaire ; alors ou ces équations n'ont pas été produites par des racines imaginaires, ou bien elles ont été produites par deux, ou quatre, &c. racines imaginaires, qui ne differoient entr'elles, que parceque l'une $+\sqrt{-a}$ avoit le ſigne $+$, l'autre $-\sqrt{-a}$ avoit le ſigne $-$ devant le ſigne radical $\sqrt{}$; ce qui a fait que le ſigne $\sqrt{}$ a diſparu.

On doit remarquer la même choſe touchant les racines incommenſurables $+\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, qui produiſent -7 ; ou $+\sqrt{7}$, $+\sqrt{7}$; qui produiſent $+7$; ou $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, qui produiſent encore $+7$: de ſorte que, ſi une équation n'a point d'incommenſurables, ou les racines ne ſont pas incommenſurables, ou elles ſont deux ou quatre incommenſurables, dont les ſignes radicaux ont diſparu par la multiplication.

9. De toutes les équations, que l'on vient de former, il ſuit qu'une équation a autant de racines, que de dimenſions ; que l'inconnuë a autant de valeurs, qu'elle a de degrez ; deux racines ſi elle eſt quarrée ; trois, ſi elle eſt cube, quatre ſi elle eſt une quatriéme puiſſance, &c.

Le dernier terme, où il n'y a que des grandeurs connuës, eſt le produit de toutes les valeurs de l'inconnuë x. C'eſt pourquoi ſi le dernier ter-

me a le ſigne — il y aura quelque racine vraye ; car ſi elles étoient ou toutes vrayes, ou toutes fauſſes, le dernier terme auroit +, comme on a vû, n. 1. 2.

ARTICLE III.

Connoître combien dans une équation il y a de racines vrayes, & combien de fauſſes.

M. DESCARTES apprend ici 1° comment on peut diminuer le nombre des dimenſions d'une équation, lorſqu'on connoît quelqu'une de ſes racines ; 2° comment on peut examiner ſi quelque quantité donnée eſt la valeur d'une racine ; on parlera ailleurs de ces deux choſes. 3°. Combien il peut y avoir de racines vrayes, combien de fauſſes dans une équation.

M. DESCARTES.

Et on voit évidemment de ceci, que la ſomme d'une équation, qui contient pluſieurs racines, peut toûjours être diviſée par un binome compoſé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'une des vrayes racines, laquelle que ce ſoit ; ou plus la valeur de l'une des fauſſes. Au moyen dequoi on diminuë d'autant ſes dimenſions. Voyez Part. 3. Sect. 2.

Comment on peut diminuer le nombre des dimenſions d'une équation, lorſqu'on connoît quelqu'une de ſes racines.

Et reciproquement que ſi la ſomme d'une équation ne peut être diviſée par un binome compoſé de la quantité inconnuë + ou — quelqu'autre quantité ; cela témoigne que cette autre quantité n'eſt la valeur d'aucune de ſes racines. Comme cette derniere $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, peut bien être diviſée par $x - 2$, & par $x - 3$, & par $x - 4$, & par $x + 5$; mais non point par x + ou — aucune autre quantité. Ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5. Voyez Part. 3. Sect. 2.

Comment on peut examiner ſi quelque quantité donnée eſt la valeur d'une racine.

On connoît auſſi de ceci, combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fauſſes en chaque équation. A ſavoir il peut y en avoir autant de vrayes, que les ſignes + & — s'y trouvent de fois être changez ; & autant de fauſſes, qu'il s'y trouve de fois deux ſignes +, ou deux ſignes —, qui s'entreſuivent. Comme en la derniere, à cauſe qu'après $+ x^4$ il y a $- 4x^3$, qui eſt un

Combien il peut y avoir de vrayes racines en chaque équation.

changement du ſigne + en —; & après — $19xx$ il y a + $106x$; & après + $106x$ il y a — 120; qui ſont encore deux autres changemens, on connoît, qu'il y a trois vrayes racines; & une fauſſe, à cauſe que les deux ſignes — de $4x^3$, & $19xx$ s'entreſuivent.

1. Lorſque les équations ont été formées, comme dans l'Article II. on voit, que tous les termes étant remplis, autant de fois que les ſignes + & — ſe ſuivent; autant il y a de racines vrayes; & qu'autant de fois que deux ſignes +, ou deux ſignes — ſe ſuivent; autant il y a de racines fauſſes.

2. Mais y a-t'il en effet dans toutes ſortes d'équations, autant de racines vrayes, que les ſignes + & — ſont de fois alternatifs; & autant de fauſſes, que l'un de ces ſignes ſe trouve de fois de ſuite? Voici comment M. DESCARTES répond ſur ce qu'on prétendoit, qu'il l'avoit avancé.

*Tom.3. Lett.77. * *La ſeconde objection eſt une fauſſeté manifeſte, car je n'ai pas dit ce qu'il veut que j'aye dit, qu'il y a autant de vrayes racines, que les ſignes + & — ſe trouvent de fois changez, ni n'ai eu aucune intention de le dire. J'ai dit ſeulement, qu'il y en peut autant avoir, & j'ai montré expreſſément dans la page 380. quand eſt-ce qu'il n'y en a pas tant, à ſavoir quand quelques-unes de ces vrayes racines ſont imaginaires.* En effet il dira, Sect. 2. Art. 10. que *tant les vrayes racines que les fauſſes ne ſont pas toûjours réelles, mais quelquefois ſeulement imaginaires: c'eſt-à-dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui correſponde à celles qu'on imagine.* C'eſt-à-dire, que lorſqu'on regarde les ſignes d'une équation, s'ils ſont tous alternatifs; les racines ſont ou toutes vrayes, ou toutes imaginaires, ou les unes vrayes, les autres imaginaires; ou plûtôt il n'y en a certainement aucune fauſſe.

Si tous les ſignes d'une équation ſont les mêmes; les racines ſont ou toutes fauſſes, ou toutes imaginaires, ou les unes fauſſes, les autres imaginaires; ou plûtôt il n'y en a certainement aucune vraye.

Lorſque les ſignes + & — ſe ſuivent; cela montre, qu'il y a une des racines, qui eſt ou vraye, ou imaginaire, & qui certainement n'eſt pas fauſſe. Lorſqu'après cela un même ſigne eſt mis deux fois de ſuite; cela marque qu'une autre des racines eſt ou fauſſe, ou imaginaire, & que certainement elle n'eſt pas vraye, &c.

Voilà ce que M. Deſcartes aſſure: cependant le produit de ces deux racines imaginaires $\sqrt{-x} + \sqrt{-a} = 0$, $\sqrt{-x} + \sqrt{-a} = 0$ eſt $-x + 2\sqrt{ax} - a = 0$. L'équation a deux racines & l'inconnuë x n'a qu'une dimenſion; les ſignes + — ſont une fois alternatifs, & les deux racines ſont fauſſes.

3. Mais quelle utilité trouve-t'on à s'imaginer ainſi tant de racines

vrayes, tant de fausses ; quoiqu'il puisse y en avoir d'imaginaires à leur place ? Le voici ; c'est que pour connoître les racines d'une équation, il faut selon M. Descartes, Part. 3. Sect. 2. tenter la division de l'équation par un certain binome, lorsque la racine cherchée peut être vraye ; & par un certain autre binome, lorsque la racine peut être fausse. C'est pourquoi si je connois par la disposition des signes, que les racines peuvent toutes être vrayes ; je ne tenterai pas la division par les binomes, qui conviennent aux racines fausses ; au lieu que si je connois que toutes les racines peuvent être fausses ; je ne tenterai pas la division par les binomes, qui conviennent aux racines vrayes ; mais s'il peut y avoir des racines vrayes & des fausses, je tenterai la division par l'une & l'autre sorte de binomes. Tel est l'avantage, que M. Descartes a prétendu, qu'on tirât de la consideration que l'on fait sur la maniere, dont les signes + & — se suivent dans une équation.

4. Lorsqu'un terme de l'équation est évanoüi, $y^3 * - ay + bb = 0$, l'on peut supposer + & — dans le terme évanoüi, comme si l'équation étoit $y^3 \pm 0yy - ay + bb = 0$. Et par rapport à ce seul terme évanoüi il faut imaginer une racine vraye & une fausse quand on le compare à y^3, qui le precede ; & une vraye avec une fausse, quand on le compare à ay, qui le suit.

SECTION II.

Preparation des Equations.

LA transformation ou reduction d'une équation est son changement en une autre.

La premiere s'appelle la proposée, la seconde la transformée, ou reduite.

Une bonne preparation ou transformation est celle, qui change l'équation proposée en une autre, qui rend la solution du Problême possible, supposé qu'on n'ait pas de Methode pour le resoudre avec l'équation proposée ; ou qui rend la resolution du Problême plus aisé, supposé qu'il eût pu se resoudre avec la proposée.

Une équation n'est point parfaitement transformée, que lorsque 1° elle n'a qu'une inconnuë ; 2° elle n'a ni fraction, ni incommensurable ; 3° la plus haute puissance de l'inconnuë n'est multipliée ou divisée que par l'unité ; 4° l'équation est reduite aux moindres termes ; 5° elle est sous la forme, qui rend la resolution du Problême la plus facile.

ARTICLE I.

Changer les Racines fausses d'une Equation en vrayes, & les vrayes en fausses.

M. DESCARTES.

DE plus il est aisé de faire en une même équation, que toutes les racines, qui étoient fausses deviennent vrayes, & par même moyen, que toutes celles, qui étoient vrayes deviennent fausses, à savoir en changeant tous les signes + ou —, qui sont en la seconde, en la quatriéme, en la sixiéme, ou autres places, qui se désignent par nombres pairs, sans changer ceux de la premiere, de la troisiéme, de la cinquiéme & semblables, qui se désignent par les nombres impairs: comme si au lieu de $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, on écrit $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, on a une équation en laquelle il n'y a qu'une vraye racine, qui est 5, & trois fausses, qui sont 2, 3, & 4.

Les racines de l'équation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, sont $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 5 = 0$; dont trois 2, 3, 4 sont vrayes, une 5 est fausse: au contraire les racines de $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, sont $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 5 = 0$; dont trois 2, 3, 4 sont fausses, une 5 est vraye.

Les racines de l'équation $x^3 \begin{matrix} -axx + abx \\ -bxx + acx \\ -cxx + bcx \end{matrix} - abc = 0$ sont les trois vrayes $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$. Les racines de l'équation $x^3 \begin{matrix} +axx + abx \\ +bxx + acx \\ +cxx + bcx \end{matrix} + abc = 0$, sont les trois fausses $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$. Toute la difference qu'il y a entre ces deux équations, c'est que les signes du second & du quatriéme terme sont changez.

Les racines de l'équation $x^3 \begin{matrix} -axx \\ -bxx \\ +cxx \end{matrix} \begin{matrix} +abx \\ -acx \\ -bcx \end{matrix} +abc = 0$, sont les vrayes $x - a = 0$, $x - b = 0$, & la fausse $x + c = 0$. Changez les signes du second & quatriéme terme, l'équation sera $x^3 \begin{matrix} +axx \\ +bxx \\ -cxx \end{matrix} \begin{matrix} +abx \\ -acx \\ -bcx \end{matrix} - abc = 0$, dont les racines fausses sont $x + a = 0$, $x + b = 0$, la vraye $x - c = 0$.

La même chose arrive dans les équations, dans lesquelles il y a des termes évanoüis. Les racines de l'équation $x^3 * - 28x + 48 = 0$, sont les vrayes $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, la fausse $x + 6 = 0$. Les racines de l'équation $x^3 * - 28x - 48 = 0$, sont les fausses $x + 2 = 0$, $x + 4 = 0$, la vraye $x - 6 = 0$.

Les racines de l'équation $x^3 + xx\sqrt{-7} \begin{matrix} +3x \\ -2x\sqrt{-7} \end{matrix} \begin{matrix} +14 \\ +7\sqrt{-7} \end{matrix} = 0$, sont la vraye imaginaire $x - 1 - \sqrt{-6} = 0$, les fausses imaginaires $x - 1 + \sqrt{-6} = 0$, $x + 2 + \sqrt{-7} = 0$. Changez les signes du second & du quatriéme terme; l'équation est $x^3 - xx\sqrt{-7} \begin{matrix} +3x \\ -2x\sqrt{-7} \end{matrix} \begin{matrix} -14 \\ -7\sqrt{-7} \end{matrix} = 0$, dont les racines sont la fausse imaginaire $x + 1 + \sqrt{-6} = 0$, les vrayes imaginaires $x + 1 - \sqrt{-6} = 0$, $x - 2 - \sqrt{-7} = 0$.

ARTICLE II.

Augmenter ou diminuer les racines d'une équation, sans les connoître.

M. DESCARTES.

QUe si sans connoître la valeur des racines d'une équation, on la veut augmenter ou diminuer de quelque quantité connuë; il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en supposer un autre, qui soit plus ou moins grand de cette même quantité, & le substituer par tout en la place du premier.

Comme si on veut augmenter de 3 la racine de cette équation $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$; il faut prendre y au lieu d'x; & penser que cette quantité y est plus grande qu'x de 3, en sorte que $y - 3$ est égal à x, & au lieu de xx il faut mettre le quarré

de $y - 3$, qui eſt $yy - 6y + 9$; & au lieu d'x^3, il faut mettre ſon cube $y^3 - 9yy + 27y - 27$; & au lieu d'x^4, il faut mettre ſon quarré de quarré ; qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$.

Et ainſi décriavnt la ſomme precedente en ſubſtituant par tout y au lieu d'x on a

$$\begin{array}{r} y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ - 19yy + 114y - 171 \\ - 106y + 318 \\ - 120 \\ \hline y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y \quad * = 0. \end{array}$$

ou bien $y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0$; où la vraye racine, qui étoit 5, eſt maintenant 8, à cauſe du nombre 3, qui lui eſt ajoûté.

Que ſi on veut au contraire diminuer de 3 la racine de cette même équation, il faut faire $y + 3 = x$, & $yy + 6y + 9 = xx$; & ainſi des autres ; de ſorte que au lieu de $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$ on met

$$\begin{array}{r} y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 \\ + 4y^3 + 36yy + 108y + 180 \\ - 19yy - 114y - 171 \\ - 106y - 318 \\ - 120 \\ \hline y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0. \end{array}$$

Et il eſt à remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'une équation, on diminuë les fauſſes de la même quantité ; ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fauſſes : & que ſi on diminuë, ſoit les vrayes, ſoit les fauſſes, d'une quantité qui leur ſoit égale, elles deviennent nulles ; & que ſi c'eſt d'une quantité qui les ſurpaſſe, de vrayes elles deviennent fauſſes, ou de fauſſes vrayes. Comme ici en augmentant de 3 la vraye racine qui étoit 5, on a diminué de 3 chacune des fauſſes, de ſorte que celle qui étoit 4, n'eſt plus qu'1 ; & celle qui étoit 3, eſt nulle ; & celle qui étoit 2, eſt devenuë vraye, & eſt 1, à cauſe que $-2 + 3$ fait $+1$. C'eſt pourquoi en cette équation $y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0$, il n'y a plus que trois racines ; entre leſquelles il y en a deux qui ſont

ſont vrayes, 1 & 8; & une fauſſe qui eſt auſſi 1. Et en cette autre $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, il n'y en a qu'une vraye, qui eſt 2, à cauſe que $+5 - 3$ fait $+2$, & trois fauſſes, qui ſont 5, 6, & 7.

1. Soit propoſée l'équation $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, dont les racines ſont $x - 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$. Quand même je ne les connoîtrois pas, ſi je veux les augmenter chacune de 3, je prends $y - 3 = x$, ce qui eſt la même choſe que $y = x + 3$. Ainſi les quatre racines y de la nouvelle équation, que je ferai par la ſubſtitution, ſeront chacune plus grande de 3, que chacune des quatre racines x de l'équation propoſée. Et c'eſt ce qu'on appelle augmenter de 3 les racines de l'équation $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$. La ſubſtitution, telle que l'ordonne M. Deſcartes, eſt aiſée à faire.

Tout ce que j'ai ſubſtitué, étant ajouté enſemble & avec -120, forme la reduite $y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * = 0$. Ou en diviſant tout par $y = 0$, $y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0$, dont les racines ſont $y - 8 = 0$, $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$. Mais les quatre racines de la reduite $y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * = 0$, ſont la premiere vraye $y - 8 = 0$, ou $y = 8$, qui ſurpaſſe de 3 la racine vraye $x - 5 = 0$, ou $x = 5$ de la propoſée; la ſeconde vraye $y - 1 = 0$, ou $y = 1$, qui ſurpaſſe de 3 la fauſſe $x + 2 = 0$, ou $x = -2$ de la propoſée, car $-2 + 3 = +1$; la troiſiéme nulle $y = 0$, qui ſurpaſſe de 3 la racine fauſſe $x + 3 = 0$, ou $x = -3$ de la propoſée, car $-3 + 3 = 0$; la quatriéme fauſſe $y + 1 = 0$, ou $y = -1$ ſurpaſſe de 3 la racine fauſſe $x + 4 = 0$, ou $x = -4$, car $-4 + 3 = -1$. De ſorte que chacune des racines de la transformée ſurpaſſe de 3 chacune des racines de la propoſée.

2. Soit la même propoſée $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, dont on veut diminuer les racines de 3 chacune; je fais $x - 3 = y$, ou $y + 3 = 0$; & à la place de x^4 je ſubſtituë &c. & je fais la transformée $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, dont les racines ſont la premiere $y - 2 = 0$, ou $y = 2$ qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine vraye $y - 5 = 0$, ou $y = 5$ de la propoſée; la ſeconde $y + 5 = 0$, ou $y = -5$, qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine fauſſe $y + 2 = 0$, ou $y = -2$ de la propoſée, car $-5 + 3 = -2$; la troiſiéme $y - 6 = 0$, $y = 6$, qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine fauſſe $y + 3 = 0$, ou $y = -3$ de la propoſée, car $-6 + 3 = -3$; la quatriéme $y + 7 = 0$, ou $y = -7$, qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine fauſſe $y + 4 = 0$, ou $y = -4$ de la propoſée, car $-7 + 3 = -4$. De ſorte que chacune des racines de la transformée eſt moindre de 3, que chacune de la propoſée.

3. Lorſqu'on augmente les racines vrayes de 3 par exemple, on ajoûte

$+3$ à toutes les racines ; de forte que les fauſſes diminuent de 3 ; car $+3$ ajoûté à -4 fait -1 ; & ſi une fauſſe ſe trouve moindre que 3, en diminuant elle devient vraye, car $+3$ ajouté à -2 fait $+1$; & ſi une fauſſe étoit égale à 3, elle deviendroit nulle, car $+3$ ajouté à -3 fait 0.

Au contraire lorſqu'on diminuë les racines vrayes de 3, on ôte $+3$ de chacune des racines ; de ſorte que les fauſſes augmentent de 3. Car $+3$ ſouſtrait de -3 laiſſe -6 ; mais les vrayes peuvent devenir fauſſes, & nulles ; car ſi de $+3$ l'on ſouſtrait $+3$, le reſte eſt 0 ; & ſi de $+2$ l'on ſouſtrait $+3$, il reſte -1.

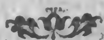
4. Les racines de $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, ayant été augmentées de 3. n. 1. la reduite a été $y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * = 0$, qui étant diviſée par $y = 0$ devient $y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0$. De là il ſuit que, toutes les fois que la transformée diminuë d'un degré, & qu'elle a une racine moins que la propoſée : une des racines de la propoſée eſt devenuë nulle ; & qu'elle étoit fauſſe, ſi les racines ont été augmentées, comme n. 1. mais elle ſeroit vraye, ſi les racines avoient été diminuées. Dans les deux cas cette racine eſt égale à la quantité dont on a augmenté ou diminué les racines.

5. On peut augmenter ou diminuer de la même façon les racines des équations litterales. Il faut augmenter de la quantité a les racines de l'équation $x^3 + cxx - bbx - bbc = 0$; on fait $x + a = y$, $y - a = x$, on ſubſtituë la valeur $y - a$ à la place de x, le quarré de $y - a$ à la place de xx, ſon cube à la place de x^3. La transformée eſt

$$\begin{array}{llll} & +\ 3aay & -\ a^3 & \\ y^3 \quad -\ 3ayy & -\ 2acy & +\ aac & = 0. \\ \quad +\ cyy & -\ bby & +\ abb & \\ & & -\ bbc & \end{array}$$

Les racines de la propoſée étoient $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$, les racines de la reduite ſont $y + a - b = 0$, $y - a + b = 0$, $y - a + c = 0$.

6. Si l'on ignore les racines de l'équation propoſée, & qu'on les augmente d'une quantité quelconque f ; après qu'on aura découvert les racines de la transformée, on ſouſtraira la quantité f de chacune, les reſtes ſeront les racines de la propoſée. Au contraire ſi les racines de la propoſée ont été diminuées d'une quantité f, il faudra l'ajoûter à chacune des racines de la reduite, afin d'avoir dans chaque ſomme une racine de la propoſée.



ARTICLE III.

Oter le second terme d'une Equation.

M. DESCARTES.

OR par cette façon de changer la valeur des racines sans les connoître, on peut faire deux choses, qui auront ci-après quelque usage. La premiere est qu'on peut toûjours ôter le second terme de l'équation qu'on examine, à savoir en diminuant les vrayes racines de la quantité connuë de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes étant marqué du signe +, l'autre est marqué du signe —; ou bien en l'augmentant de la même quantité, s'ils ont tous deux le signe + ou le signe —, comme pour ôter le second terme de la derniere équation, qui est $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, ayant divisé 16 par 4, à cause des 4 dimensions du terme y^4, il vient dérechef 4, c'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, & j'écris

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 & -16z^3 & +96zz & -256z & +256 \\ & +16z^3 & -192zz & +768z & -1024 \\ & & +71zz & -568z & +1136 \\ & & & -4z & +16 \\ & & & & -420 \\ \hline z^4 & * & -25zz & -60z & -36=0. \end{array}$$

où la vraye racine, qui étoit 2, est 6, à cause qu'elle est augmentée de 4; & les fausses, qui étoient 5, 6, & 7, ne sont plus que 1, 2, & 3, à cause qu'elles sont diminuées chacune de 4.

Tout de même si on veut ôter le second terme de $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 = 0$, parceque divisant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$, il faut faire $z + \frac{1}{2}a = x$ & écrire

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 & +2az^3 & +\frac{3}{2}aazz & +\frac{1}{2}a^3z & +\frac{1}{16}a^4 \\ & -2az^3 & -3aazz & -\frac{3}{2}a^3z & -\frac{1}{4}a^4 \\ & & +2aazz & +2a^3z & +\frac{1}{2}a^4 \\ & & -cczz & -accz & +\frac{1}{4}aacc \\ & & & -2a^3z & -a^4 \\ & & & & +a^4 \\ \hline z^4 & * & +\frac{1}{2}aazz & -a^3z & +\frac{5}{16}a^4 \\ & & -cczz & -accz & -\frac{1}{4}aacc \end{array} = 0.$$

Et si on trouve après la valeur de z, en lui ajoûtant $\frac{1}{2}a$, on aura celle de x.

1. Les deux équations $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, $-y^4 - 16y^3 - 71yy + 4y + 420 = 0$, qui ne different que par la position reciproque des signes + & — sont la même, & ont les mêmes racines, $y - 2 = 0$, $y + 5 = 0$, $y + 6 = 0$, $y + 7\ 0$; ou celles-ci, qui ne sont pas differentes $-y + 2 = 0$, $-y - 5 = 0$, $-y - 6 = 0$, $-y - 7 = 0$. C'est pourquoi je transforme les deux équations proposées de la même sorte, & parceque les deux premiers termes ont + dans la premiere, — dans la seconde, j'augmente les racines de 4, & je fais pour toutes les deux $z - 4 = y$. Et par la substitution des valeurs $\pm y^4$, $\pm 16y^3$, $\pm 71yy$, $\pm 4y$, ± 420, je produits deux transformées qui sont la même $z^4 * - 25zz - 60z - 36 = 0$. $-z^4 * + 25zz + 60z + 36 = 0$.

Les deux équations $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, $-x^4 + 4x^3 + 19xx - 106x + 120 = 0$, sont la même, & leurs racines sont $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 5 = 0$. Ainsi parceque les deux premiers ont l'un +, l'autre —, je diminuë les racines de 1, & pour toutes les deux je prends $z + 1 = x$, ce qui en substituant encore les valeurs de $\pm x^4$ &c. donne deux transformées, qui sont encore la même, $z^4 * - 25zz + 60z - 36 = 0$. $-z^4 * + 25zz - 60z + 36 = 0$.

2. L'usage est, lorsqu'on veut faire évanoüir le second terme d'une équation, de la délivrer d'incommensurables, & de fractions si elle en a; de disposer tellement les termes, que la plus haute puissance de l'inconnuë ait le signe +, & ne soit multipliée & divisée que par l'unité. On enseignera ces operations dans les Articles VII. & IX.

Ensuite l'on divise la quantité connuë du second terme par le nombre des dimensions du premier; l'on fait la quantité inconnuë — le quotient, qui vient de cette division égale à une autre inconnuë, si le second terme de l'équation à —; ou l'on fait l'inconnuë + ce quotient égale à cette autre inconnuë, si le second terme a +; on poursuit les operations telles qu'on va les faire dans les Exemples suivans.

Soit proposée $yy + ay - bb = 0$. le nombre des dimensions, ou l'exposant de yy, c'est 2; vous divisez donc la connuë a du second terme par 2; & vous faites $y + \frac{1}{2}a = z$, $z - \frac{1}{2}a = y$; vous substituez $zz - az + \frac{1}{4}aa$ pour yy, & $z - \frac{1}{2}a$ pour y, c'est-à-dire $+ az - \frac{1}{2}aa$ pour $+ az$, & la reduite est $zz \begin{matrix} * - \frac{1}{4}aa \\ - bb \end{matrix} = 0$. ou $zz = \frac{1}{4}aa + bb$, dont les racines sont $z = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $-z = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ou $z = -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vous connoîtrez les racines y, si pour z vous substituez sa valeur $y + \frac{1}{2}a$, Voyez Liv. 1. Part. 2. Art. 2.

Soit proposée l'équation

$$6x^3 \begin{array}{l} -12axx \\ +18bxx \end{array} -6acx - 12bbc = 0.$$

Nous diviserons d'abord par 6, afin que la plus haute puissance ne soit multipliée & divisée que par l'unité ; il viendra

$$x^3 \begin{array}{l} -2axx \\ +3bxx \end{array} -acx - 2bbc = 0.$$

L'exposant de la haute puissance est 3 ; les connuës du second terme seront donc divisées par 3, & nous prendrons $x - \frac{2}{3}a + b = z$, $z + \frac{2}{3}a - b = x$. Nous substituerons cette valeur de x, à sa place, le quarré de cette valeur à la place de xx, le cube de cette valeur à la place de x^3, & nous aurons l'équation

$$z^3 * \begin{array}{l} -\frac{4}{3}aaz + \frac{16}{3}abz - 3bbz \\ \qquad\qquad\qquad - acz \end{array} \begin{array}{l} -\frac{16}{27}a^3 - \frac{8}{3}aab - 4abb \\ -\frac{2}{3}aac + abc + 2b^3 \\ \qquad\qquad - 2bbc \end{array} = 0.$$

Et après que nous aurons trouvé les valeurs de z, comme on l'enseignera Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. nous ajoûterons à chacune $\frac{2}{3}a - b$, afin d'avoir les valeurs de x.

Soit proposée l'équation

$$x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} +2aaxx \\ -ccxx \end{array} - 2a^3x + a^4 = 0.$$

L'exposant de x^4 est 4, par lequel l'on divise $2a$ connuë du second terme ; & l'on fait $x - \frac{1}{2}a = z$, $z + \frac{1}{2}a = x$, l'on substituë cette valeur pour x, son quarré, son cube, son quarré de quarré pour xx, x^3, x^4 de la façon qu'on le voit dans le Texte, ce qui donne

$$z^4 * \begin{array}{l} +\frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5}{16}a^4 \\ -cczz - accz - \frac{1}{4}aacc \end{array} = 0.$$

Et quand on aura trouvé les racines de z, on leur ajoûtera $\frac{1}{2}a$, pour avoir les valeurs de x. Voyez Part. 3. Sect. 4. Art. 2.

3. Voici comment on a pu connoître, qu'il faut diviser la connuë du second terme, par le nombre des dimensions de la premiere, & le signe qu'il falloit lui donner, pour transformer l'équation proposée quelconque en une autre, dont le second terme fût nul.

Soit proposée l'équation $yy + ay - bb = o$. je fais $y + f = z$, $z - f = y$. je substituë pour y sa valeur, pour yy le quarré de cette valeur : il vient $zz - 2fz + az - af + ff - bb = o$. Mais le second terme doit être nul : donc $- 2fz + az = o$.

$2f = a$, $f = \frac{1}{2}a$. Il faut par consequent diviser la connuë a du second terme par 2 exposant du premier, & il faut faire $z - \frac{1}{2}a = y$; & non pas $z + \frac{1}{2}a = y$, parceque il viendroit $zz + 2fz + az + ff + af - bb = o$. & les termes $+ 2fz + az$, ayant le même signe ne peuvent pas se détruire comme le font les termes $- 2fz + az$.

Soit proposée $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = o$; prenez $y + f = z$, $z - f = y$; substituez cette valeur de y à sa place, le quarré, le cube, le quarré de quarré de cette valeur à la place de yy, y^3, y^4. La transformée est $z^4 - 4fz^3 + 16z^3$, &c.

$$y^4 = z^4 - 4fz^3 + 6ffzz - 4f^3z + f^4.$$
$$+ 16y^3 = + 16z^3 - 48fzz + 48ffz - 16f^3.$$
$$+ 71yy = + 71zz - 142fz + 71ff.$$
$$- 4y = - 4z + 4f.$$
$$- 420.$$

Mais ce deuxiéme terme doit être évanoüi, donc $- 4fz^3 + 16z^3 = o$, $4f = 16$, $f = \frac{16}{4} = 4$. Il faut donc faire $z - 4 = y$; & $\frac{16}{4}$ montre qu'il faut diviser la connuë 16 du second terme par 4 exposant du premier y^4. D'ailleurs les signes de $- 4fz^3 + 16z^3$ sont differens, & les termes s'effaceront ; il faut donc prendre $z - 4 = y$, & non pas $z + 4$.

Si l'on parcourt des équations de differens degrez, l'on trouvera en toutes, que pour faire disparoître le second terme d'une équation, il faut suivre la Regle, que M. DESCARTES donne ici.

Elle est fondée cette Regle 1° sur ce que le second terme de chaque puissance a le signe du second terme de la racine, de plus il contient l'inconnuë avec une dimension moindre de l'unité que le premier terme, enfin il contient le produit du second terme de la racine multiplié par le nombre des dimensions ; $z - 4$, aura pour les deux premiers termes de son quarré $zz - 8z$, de son cube $z^3 - 12zz$, de son quarré de quarré $z^4 - 16z^3$, &c. 2°. Sur ce que dans la substitution après avoir écrit la valeur de y^4, on écrit la valeur de $+ 16y^3$, & le premier terme de cette valeur est z^3 multiplié par $+ 16$; ce qui fait $+ 16z^3$, lequel avec $- 16z^3$ de la valeur de y^4 fait zero. Il faut donc que la valeur de y soit $z -$, lorsque la proposée a $+$ au second terme, & au contraire, & que la quantité jointe à z soit la quantité connuë du second terme de la proposée divisé par le nombre des dimensions du premier.

4. L'évanoüissement du second terme rend la resolution des Problêmes

dù ſecond, troiſiéme & quatriéme degré plus facile. On l'a vû pour le ſecond Liv. 1. Part. 2. Art. 2. on le verra pour le troiſiéme & quatriéme Part. 3. & 4.

5. On a remarqué Sect. 1. Art. 2. n. 4. que dans les équations, où le ſecond terme eſt nul, la ſomme des racines vrayes eſt égale à la ſomme des racines fauſſes.

ARTICLE IV.

Faire que toutes les fauſſes racines d'une équation deviennent vrayes, ſans que les vrayes deviennent fauſſes : & que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle du ſecond.

M. DESCARTES.

LA ſeconde choſe, qui aura ci-aprés quelque uſage, eſt qu'on peut toûjours en augmentant la valeur des vrayes racines, d'une quantité qui ſoit plus grande, que n'eſt celle d'aucune des fauſſes, faire qu'elles deviennent toutes vrayes, en ſorte qu'il n'y ait point deux ſignes + ou deux ſignes — qui ſe ſuivent : & outre cela que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande, que le quarré de la moitié de celle du ſecond. Car encore que cela ſe faſſe, lorſque ces fauſſes racines ſont inconnuës, il eſt aiſé néanmoins de juger à peu prés de leur grandeur, & de prende une quantité qui les ſurpaſſe d'autant ou de plus, qu'il n'eſt requis à cet effet. Comme ſi on a $x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4xx + 46656n^5x - 7776n^6 = 0$, en faiſant $y - 6n = x$, on trouvera

$$
\begin{array}{lllllll}
y^6 & -36ny^5 & +540nny^4 & -4320n^3y^3 & +19440n^4yy & -46656n^5y & +46656n^6. \\
 & +n & -30nn & +360n^3 & -2160n^4 & +6480n^5 & -7776n^6. \\
 & & 6nn & +144n^3 & -1296n^4 & +5184n^5 & -7776n^6. \\
 & & & +36n^3 & -648n^4 & +3888n^5 & -7776n^6. \\
 & & & & -216n^4 & +2592n^5 & -7776n^6. \\
 & & & & & +1296n^5 & -7776n^6. \\
 & & & & & & * \\
 & & & & & & -7776n^6. \\
\hline
y^6 & -35ny^5 & +504nny^4 & -3780n^3y^3 & +15120n^4yy & -27210n^5y & * = 0.
\end{array}
$$

* *Ce dernier terme* $-7776n^6$ *manque dans l'impreſſion Françoiſe de Leyde 1637. & dans la Latine d'Amſterdam 1659. & dans la Françoiſe de Paris 1705.*

Où il eſt manifeſte que $504nn$, qui eſt la quantité connuë du troiſiéme terme, eſt plus grande que le quarré de $\frac{35}{2}n$, qui eſt la moitié de celle du ſecond. Et il n'y a point de cas, pour lequel la quantité, dont on augmente les vrayes racines, ait beſoin à cet effet, d'être plus grande à proportion de celles qui ſont données, que pour celui-ci.

1. Ce Problême ſervira Part. 5. pour la reſolution des équations du cinquiéme & du ſixiéme degré.

2. Il eſt évident que, ſi je veux que toutes les racines d'une équation transformée ſoient vrayes; il n'y a qu'à augmenter toutes les racines de l'équation propoſée, d'une quantité, qui ſoit plus grande, que la plus grande des fauſſes. Car ſi la plus grande des fauſſes eſt -4, & que j'augmente toutes les racines de $+6$; cette fauſſe deviendra $+2$; & une moindre fauſſe croîtra encore & deviendra vraye à plus forte raiſon; pour les vrayes il eſt certain qu'elles croîtront.

Comme on peut rendre toutes les racines vrayes, ſans que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond: la difficulté eſt ici de tellement augmenter les racines vrayes de la propoſée, que la transformée ait les deux conditions, que demande ce Problême.

* Tom. 3. Lett. 86.

3. M. DESCARTES approuve dans une de ſes * Lettres la Methode qu'un Geometre avoit trouvé pour cela, & il la propoſe en ces termes. Il faut obſerver que nous pouvons nous ſervir de cet Exemple $x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4xx + 46656n^5x - 7776n^6 = 0$, comme d'une Regle ou Canon, pour trouver la quantité, dont il faut augmenter les racines. Si par exemple cette équation eſt propoſée $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f = 0$. Ayant negligé tous les termes, dans leſquels les ſignes $+$ & $-$ ſont differens de ceux du canon; c'eſt-à-dire ici les termes b, c, & f; il faut ſeulement conſiderer tous les autres, comme a, d, & e; parcequ'il y a ici $+ax^5$, comme $+nx^5$ dans le canon; & $-dxx$, comme dans le canon $-216n^4xx$; & $+ex$, comme dans le canon † $1296n^5x$. Mais il faut conſiderer chacun de ces termes ſeparément, & chercher la quantité n, qui ne ſoit pas moindre que a; parceque dans le canon il y a n au même terme, où dans la propoſée on trouve a. De plus il faut que n ſoit telle, que ſon quarré de quarré ne ſoit pas moindre que $\frac{1}{216}d$, parceque dans le canon il y a 216 au même terme, où dans la propoſée il y a d. Enſuite il faut que ſon surſolide ne ſoit pas moindre que $\frac{1}{46656}e$, parceque dans le canon il y a $46656n^5$ au terme, où dans la propoſée il y a e. La quantité n étant ainſi trouvée, l'on démontre évidemment par l'operation même, que faiſant $y - 6n = x$, il

† C'eſt une faute d'impreſſion dans la Lettre, car dans le Canon il y a $46656n^5x$

il vient une équation, dans laquelle il ne peut yavoir aucune racine fausse.

Soit donc l'équation proposée $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f = 0.$
ou $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 1x^3 - 216xx + 1296x + 1 = 0.$

Parceque le signe du second terme $+ ax^5$ ou $+ 1x^5$ est le même signe, que celui du second terme du canon, il faut que n ou le nombre, dont j'ai besoin ne soit pas moindre que 1. Parceque le signe du cinquiéme terme $- dxx$ ou $- 216xx$ est le même signe, que celui du cinquiéme terme du canon, il faut que n ne soit pas moindre que 1, qui est le quarré de quarré de $\frac{1}{216}d$, ou de $\frac{216}{216} = 1$. Parceque le signe du sixiéme terme $+ ex$ ou $+ 1296x$ est le même signe, que celui du sixiéme terme du canon, il faut encore que n ne soit pas moindre que le sursolide de $\frac{1}{46656}e$, ou de $\frac{1296}{46656} = \frac{1}{36}$. Je prends donc 1 pour n, je le multiplie par 6, & j'ai $y - 6n = y - 6 = x$, que je substituë aussi bien que les differentes puissances dont j'ai besoin, dans l'équation proposée.

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
x^6 = & y^6 & - 36y^5 & + 540y^4 & - 4320y^3 & + 19440yy & - 46656y & + 46656. \\
+ x^5 = & & 1y^5 & - 30y^4 & + 360y^3 & - 2160yy & + 6480y & - 7776. \\
+ x^4 = & & & 1y^4 & - 24y^3 & + 216yy & - 864y & + 1296. \\
- x^3 = & & & & - 1y^3 & + 18yy & - 108y & + 216. \\
- 216xx = & & & & & - 216yy & + 2592y & - 7776. \\
+ 1296x = & & & & & & + 1296y & - 7776. \\
+ 1 = & & & & & & & + 1. \\
\hline
& y^6 & - 35y^5 & + 511y^4 & - 3985y^3 & + 17298yy & - 37260y & + 24841 = 0.
\end{array}$$

Dans cette transformée les signes + & — sont alternatifs, ainsi toutes les racines sont vrayes, Sect. 1. Art. 3.

Dans la valeur de x^6 les signes + & — sont toûjours alternatifs, parceque c'est le quarré de cube de $y - 6n$, les racines de cette sixiéme puissance sont donc toutes vrayes. Ainsi afin que les signes + & — de la somme totale $y^6 - 35y^5 + 511y^4$, &c. soient encore alternatifs, & que ses racines soient toutes vrayes; il faut que les valeurs des termes des autres puissances x^5, x^4, x^3, &c. ne soient pas plus grandes avec un signe contraire, que la valeur de chaque terme correspondant de la sixiéme puissance.

Or la valeur des termes $+ x^4$, $- x^3$, $+ 1$, qui ont un signe different de celui des termes du canon, où il y a x^4, x^3, contient les mêmes signes que la sixiéme puissance dans les termes qui se répondent: ainsi ces valeurs bien loin de pouvoir détruire les signes de la sixiéme puissance, empêchent en augmentant la valeur des termes de cette sixiéme puissance, que d'autres termes, qui ont un signe contraire ne soient plus grands, &

Kkk

ne changent le signe. C'est pour cela que M. DESCARTES dit, qu'il faut negliger les termes, dans lesquels les signes + & — sont differens de ceux du canon.

Au contraire il faut considerer les termes $+x^5$, $-216xx$, $+1296x$, qui ont le même signe, que les termes du canon, où il y a x^5, xx, x; parceque leur valeur contient des signes differens de ceux, qui sont dans les termes correspondans de la sixiéme puissance, afin de prendre n telle que les valeurs des termes, qui ont ainsi des signes differens, ne soient pas plus grandes, que la valeur des termes correspondans de la sixiéme puissance; & de plus afin que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du second.

4. On peut déterminer generalement la valeur de la quantité g, dont il faut augmenter les vrayes racines, afin que la transformée ait les deux conditions qu'on demande ici, supposons que la proposée ait par tout les mêmes signes que le canon, & qu'elle soit $x^6 + ax^5 - bx^4 + cx^3 - dxx + ex - f = 0$. & faisons $y - g = x$. Nous aurons

$$\begin{array}{lllllll}
x^6 = y^6 & -6gy^5 & +15ggy^4 & -20g^3y^3 & +15g^4yy & -6g^5y & +g^6. \\
+ax^5 = & +ay^5 & -5agy^4 & +10aggy^3 & -10ag^3yy & +5ag^4y & -ay^5. \\
-bx^4 = & & -by^4 & +4bgy^3 & -6bggyy & +4bg^3y & -bg^4. \\
+cx^3 = & & & +cy^3 & -3cgyy & +3cggy & -cg^3. \\
-dxx = & & & & -dyy & +2dgy & -dgg. \\
+ex = & & & & & +ey & -eg. \\
-f = & & & & & & -f.
\end{array}$$

Les signes de la sixiéme puissance sont par tout differens de ceux des quantitez inferieures, qui leur répondent. Le signe > veut dire plus grand, & < plus petit.

On demande en premier lieu que le quarré de $\frac{-6g+a}{2}$ moitié de la quantité connuë du second terme soit moindre que $15gg - 5ag - b$ quantité connuë du troisiéme, c'est-à-dire, $\frac{36gg - 12ag + aa}{4} < 15gg - 5ag - b$; $36gg - 12ag + aa < 60gg - 20ag - 4b$; donc $24gg - 8ag - 4b > aa$; $gg - \frac{1}{3}ag > \frac{1}{24}aa + \frac{1}{6}b$; $\overline{gg - \frac{1}{3}ag + \frac{1}{36}aa} > \frac{1}{36}aa + \frac{1}{24}aa + \frac{1}{6}b > \frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b$; $g - \frac{1}{6}a > \sqrt{\frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b}$; $g > \frac{1}{6}a + \sqrt{\frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b}$. Ainsi toutes les fois que l'on prendra la quantité g plus grande que $\frac{1}{6}a + \sqrt{\frac{5}{72}a + \frac{1}{6}b}$, la quantité connuë du troisiéme terme sera plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du second.

En second lieu il faut examiner les valeurs de la quantité g, qui resultent de la supposition, que chaque terme de la sixiéme puissance, est plus

grand que tous les termes qui ſont au deſſous de lui : afin que les ſignes + & — demeurent alternatifs dans la ſomme totale de tous les termes de la transformée.

Suppoſons donc que dans les ſeconds termes $6g > a$: donc $g > \frac{1}{6}a$.

Dans les troiſiémes $15gg > 5ag + b$: donc $gg > \frac{1}{3}ag + \frac{1}{15}b$.

Dans les quatriémes $20g^3 > 10agg + 4bg + c$: donc $g^3 > \frac{1}{2}agg + \frac{1}{5}bg + \frac{1}{20}c$.

Dans les cinquiémes $15g^4 > 10ag^3 + 6bgg + 3cg + d$: donc $g^4 > \frac{2}{3}ag^3 + \frac{2}{5}bgg + \frac{1}{5}cg + \frac{1}{15}d$.

Dans les ſixiémes $6g^5 > 5ag^4 + 4bg^3 + 3cgg + 2dg + e$: donc $g^5 > \frac{5}{6}ag^4 + \frac{2}{3}bg^3 + \frac{1}{2}cgg + \frac{1}{3}dg + \frac{1}{6}e$.

Dans les ſeptiémes $g^6 > ag^5 + bg^4 + cg^3 + dgg + eg + f$.

Maintenant ſi dans $g^6 > ag^5 + bg^4 + cg^3 + dgg + eg + f$, on ſubſtituë autant de fois qu'il ſera neceſſaire, à la place de g^5, g^4, g^3, g^2, g, leurs valeurs qu'on vient de trouver, ou plûtôt les quantitez qui ſont plus petites que leurs valeurs ; on trouvera $g^6 > f + \frac{1}{3}ae + \frac{1}{20}cc + \frac{2}{15}bd$, &c. Ainſi la quantité g devra être telle, que ſa ſixiéme puiſſance ſoit plus grande que la ſomme qu'on vient de former.

ARTICLE V.

Faire que toutes les places d'une Equation ſoient remplies.

M. DESCARTES.

MAis à cauſe que le dernier terme s'y trouve nul, ſi on ne deſire pas que cela ſoit, il faut encore augmenter tant ſoit peu la valeur des racines ; & ce ne ſauroit être de ſi peu, que ce ne ſoit aſſez pour cet effet. Non plus que lorſqu'on veut accroître le nombre des dimenſions de quelque équation, & faire que toutes les places de ſes termes ſoient remplies. Comme ſi au lieu de $x^5 **** - b = 0$, on veut avoir une équation en laquelle la quantité inconnuë ait ſix dimenſions ; & dont aucun des termes ne ſoit nul, il faut premierement pour $x^5 **** - b = 0$, écrire $x^6 **** - bx * = 0$; puis ayant fait $y - a = x$, on aura

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} -6a^5y + a^6 \\ -by + ab \end{matrix} = 0.$$

où il eſt manifeſte, que tant petite que la quantité a ſoit ſuppoſée, toutes les places de l'équation ne laiſſent pas d'être remplies.

Pour remplir tous les termes de l'équation $x^5 **** - b = o$, & en avoir une, qui ſoit encore du cinquiéme degré, je fais $y - a = x$, ce qui augmentera les racines vrayes de l'équation de la quantité a, & je trouve

$$\begin{array}{l} + x^5 = y^5 - 5ay^4 + 10aay^3 - 10a^3yy + 5a^4y - a^5. \\ - b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = o. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - b \end{array}$$

Pour remplir tous les termes de la même équation $y^5 **** - b = o$; & en former une qui ſoit du ſixiéme degré, je multiplie par x l'équation propoſée, elle ſe change en $x^6 **** - bx * = o$. & par la ſubſtitution il vient

$$\begin{array}{l} x^6 = y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \\ \qquad - 6a^5y + a^6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = o. \\ - bx = \quad - by + ab \end{array}$$

Si l'on vouloit une équation de huit dimenſions à la place de $x^5 **** - b = o$, on multipliera par x^3, & l'on fera $x^8 **** - bx^3 *** = o$.

On fera les mêmes choſes, ſi l'on ſouhaitoit d'augmenter les racines fauſſes, en prenant $y + a = x$.

ARTICLE VI.

Multiplier & diviſer les racines ſans les connoître.

M. DESCARTES.

De plus on peut, ſans connoître les valeurs des vrayes racines d'une équation, les multiplier ou diviſer toutes par telle quantité connuë, qu'on veut. Ce qui ſe fait en ſuppoſant, que la quantité inconnuë étant multipliée ou diviſée par celle qui doit multiplier ou diviſer les racines, eſt égale à quelqu'autre. Puis diviſant ou multipliant la quantité connuë du ſecond terme, par cette même, qui doit multiplier ou diviſer les racines; & par ſon quarré, celle du troiſiéme, & par ſon cube, celle du quatriéme; & ainſi juſques au dernier.

Les racines de l'équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$ sont $x - a = o$, $x + a = o$, $x + b = o$. Si vous voulez multiplier chaque racine par c: pour cela prenez $cx = y$, $x = \frac{y}{c}$; mettez $\frac{y^3}{c^3}$ pour x^3, $\frac{yy}{cc}$ pour xx, $\frac{y}{c}$ pour x; l'équation devient $\frac{y^3}{c^3} + \frac{byy}{cc} - \frac{aay}{c} - aab = o$; multipliez tout par c^3, il vient $y^3 + bcyy - aaccy - aabc^3 = o$; dont les racines sont $y - ac = o$, $y + ac = o$, $y + bc = o$. Comme on le connoîtra en multipliant ces racines l'une par l'autre: or ces racines contiennent les racines $+a$, $-a$, $-b$ de la premiere équation multipliées par c. Là dessus est fondée la Regle abregée pour multiplier les racines d'une équation par une quantité quelconque. Soit la même équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$, dont il faut multiplier les racines par c; on change l'inconnuë x en une autre inconnuë y, on multiplie le second terme par c, le troisiéme par cc, le quatriéme par c^3, & ainsi de suite, s'il y en avoit davantage; & il vient $y^3 + bcyy - aaccy - aabc^3 = o$, la même transformée qu'auparavant. Et lorsqu'on connoîtra les racines de cette équation, on les divisera par c, pour avoir les racines de la proposée.

Au contraire vous voulez diviser par c l'équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$; faites $\frac{x}{c} = y$, $x = cy$; substituez cy pour x, $ccyy$ pour xx, c^3y^3 pour x^3; l'équation sera $c^3y^3 + bccyy - aacy - aab = o$; divisez tout par c^3; le quotient est $y^3 + \frac{byy}{c} - \frac{aay}{cc} - \frac{aab}{c^3} = o$, dont les racines sont $+\frac{a}{c}$, $-\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{c}$, comme vous le connoîtrez en multipliant entr'elles ces trois quantitez $y - \frac{a}{c} = o$, $y + \frac{a}{c} = o$, $y + \frac{b}{c} = o$. Là-dessus est fondée la Regle abregée pour diviser les racines d'une équation par une quantité quelconque. Soit donc la même équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$, dont il faut diviser les racines par c; changez l'inconnuë x en une autre inconnuë y, divisez le second terme par c, le troisiéme par cc, le quatriéme par c^3, & ainsi de suite, s'il y en avoit d'autres: il vient $y^3 + \frac{byy}{c} - \frac{aay}{cc} - \frac{aab}{c^3} = o$, la même transformée qu'auparavant. Et quand vous aurez trouvé la valeur des racines de cette transformée, vous les multiplierez par c, pour avoir les racines de la proposée.



ARTICLE VII.

Oter les fractions & les incommensurables d'une équation.

M. DESCARTES.

CE qui peut ſervir pour reduire à des nombres entiers & rationaux, les fractions, ou ſouvent auſſi les nombres ſourds, qui ſe trouvent dans les termes des équations comme ſi on a $x^3 - \sqrt{3}\,xx + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}}$, & qu'on veüille en avoir une autre en ſa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut ſuppoſer $y = x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connuë du ſecond terme, qui eſt auſſi $\sqrt{3}$; & par ſon quarré qui eſt 3, celle du troiſiéme, qui eſt $\frac{26}{27}$; & par ſon cube, qui eſt $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui eſt $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$.

Puis ſi on en veut encore une autre en la place de celle-ci, dont les quantitez connuës ne s'expriment que par des nombres entiers; il faut ſuppoſer $z = 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$, où les racines étant 2, 3, & 4; on connoît de là, que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & que celles de la premiere étoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{3}$,

1, Multipliez les racines d'une équation par une quantité, qui puiſſe être diviſée juſte par le denominateur de la fraction, qui eſt au ſecond terme, s'il y en a une; dont le quarré puiſſe être diviſé juſte par le denominateur de la fraction, qui eſt au troiſiéme terme, ſuppoſé qu'il y en ait là une; dont le cube puiſſe être diviſé juſte par le denominateur de la fraction, qui eſt au quatriéme terme; dont le quarré de quarré puiſſe être diviſé juſte par le denominateur du cinquiéme terme, &c. les fractions diſparoiſſent, & l'équation ne contient plus que des entiers. C'eſt pour cela, que M. DESCARTES, afin d'ôter les fractions de $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$, prend $3y = z$, & qu'aprés avoir changé y^3 en z^3, yy en zz, y en z, il multiplie le ſecond terme par 3, ce qui produit $9zz$, le troiſiéme par 9, ce qui produit $26z$; le quatriéme par 27, ce qui produit 24, & toute la reduite eſt $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$. Et les raci-

nes z étant trouvées, il faut les diviſer par 3, pour avoir les valeurs de y, parceque étant $3y = z$, l'on a $y = \frac{z}{3}$; car on a fait ici la même choſe que ſi on avoit multiplié y par 3. Car ſoit $3y = z$, $y = \frac{z}{3}$ la ſubſtitution donne $\frac{z^3}{27} - \frac{zz}{3} + \frac{26z}{27} - \frac{8}{9} = 0$, & multipliant tout par 27, $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$.

Generalement pour faire diſparoître toutes les fractions d'une équation quelconque $x^3 - \frac{axx}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$; on multiplie tous les denominateurs enſemble; le produit eſt bcd; on change x en une autre inconnuë z, ce qui fait $z^3 - \frac{azz}{b} + \frac{aaz}{c} + \frac{a^3}{d}$: enſuite on multiplie le ſecond terme par bcd, le troiſiéme par le quarré $bbccdd$, le quatriéme par le cube $b^3 c^3 d^3$; & il vient $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3 b^3 c^3 dd = 0$. Ou bien l'on prend $bcdx = z$, $x = \frac{z}{bcd}$. Après cela l'on ſubſtituë cette valeur de x à ſa place dans l'équation propoſée; le quarré de cette valeur à la place de xx; le cube de la même valeur à la place de x^3; la reduite eſt $\frac{z^3}{b^3 c^3 d^3} - \frac{azz}{b^3 ccdd} + \frac{aaz}{bccd} + \frac{a^3}{d}$; enfin l'on multiplie tout par $b^3 c^3 d^3$, & il vient $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3 b^3 c^3 dd = 0$, la même reduite qu'auparavant.

2. Cette Methode ſert ſouvent à délivrer une équation de ſes quantitez irrationelles. Soit propoſée l'équation $x^4 - 4bx^3\sqrt{a} - 2bcxx + \frac{cddx}{a\sqrt{a}} + ddff = 0$. Formons les puiſſances de l'irrationelle $\sqrt{a}$ qui eſt dans l'équation, ce ſont $\sqrt{a}$, a, $a\sqrt{a}$, aa, $aa\sqrt{a}$, a^3, $a^3\sqrt{a}$, a^4, &c. L'incommenſurable $\sqrt{a}$ ne ſe trouve que dans les puiſſances 1e, 3e, & en nombre impair: il faut donc, afin que l'équation puiſſe être délivrée de ſes incommenſurables, qu'elles ſe trouvent dans les termes, qui doivent être multipliez par les puiſſances qui ſont incommenſurables; il faut encore que les autres termes n'en ayent point. Selon la Methode le ſecond terme doit être multiplié par $\sqrt{a}$: ainſi il doit être multiplié ou diviſé par $\sqrt{a}$; car s'il eſt multiplié par $\sqrt{a}$, comme ici $-4bx^3\sqrt{a}$, le produit eſt $-4abx^3$, l'on met z pour x ſelon la Methode.

Si ce ſecond terme étoit diviſé par $\sqrt{a}$, & qu'il fût $-\frac{4bz^3}{\sqrt{a}}$, le produit de $\sqrt{a} \times -\frac{4bz^3}{\sqrt{a}}$ eſt $-\frac{4bz^3\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = -4bz^3$, parceque $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$.

Selon la Methode le troiſiéme terme doit être multiplié par a quarré de $\sqrt{a}$, c'eſt pourquoi il ne doit point contenir d'incommenſurable, parcequ'elle y reſteroit. Le quatriéme terme ſelon la Methode doit être multiplié par le cube $a\sqrt{a}$ de $\sqrt{a}$, il faut donc qu'il ſoit ou multiplié ou diviſé par $\sqrt{a}$. Car s'il étoit multiplié par $a\sqrt{a}$, & que ce fût $acddz\sqrt{a}$ le produit de $\sqrt{a} \times acddz\sqrt{a}$ ſeroit $aacddz$.

S'il eſt diviſé par $\sqrt{a}$, comme ici $+\frac{cddz}{a\sqrt{a}}$, le produit de $a\sqrt{a} \times \frac{cddz}{a\sqrt{a}}$ eſt $\frac{acddz\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = cddz$, parceque $\frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = 1$. Selon la Methode le cinquiéme terme doit être multiplié par aa quarré de quarré de $\sqrt{a}$, ainſi il ne

doit point avoir d'incommensurable. L'équation proposée se reduira donc selon la Methode à $z^4 - 4abz^3 - 2abczz + cddz + aadff = 0$, & quand on aura trouvé les valeurs de z, il faudra les diviser par $\sqrt{a}$ pour avoir celles de x; car pour avoir la transformée, on a dû prendre $x\sqrt{a} = z$, $x = \frac{z}{\sqrt{a}}$.

Lorsque l'incommensurable d'une équation est $\sqrt[3]{a}$, l'on formera toutes ses puissances, dont on peut avoir besoin $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{aa}$, a, $a\sqrt[3]{a}$, $a\sqrt[3]{aa}$, aa, $aa\sqrt[3]{a}$, &c. Ce qui fait connoître quels termes de l'équation doivent être multipliez ou divisez par $\sqrt[3]{a}$, ou par quelques-unes de ses puissances, afin que le signe radical disparoisse. Par exemple le second terme de l'équation, qui doit être multiplié par $\sqrt[3]{a}$, peut être ou multiplié par $\sqrt[3]{aa}$, comme $bx^3\sqrt[3]{aa}$, parceque $\sqrt[3]{a} \times bx^3\sqrt[3]{aa} = abx^3$; car $\sqrt[3]{a^3} = a$; ou multiplié par $\sqrt[3]{a^5}$; comme $bx^3\sqrt[3]{a^5}$, parceque $\sqrt{a} \times bx^3\sqrt[3]{a^5} = bx^3\sqrt[3]{a^6} = aabx^3$, car $\sqrt[3]{a^6} = aa$; ou multiplié par $\sqrt[3]{a^8}$, comme $bx^3\sqrt[3]{a^8}$, par $\sqrt[3]{a} \times bx^3\sqrt[3]{a^8} = bx^3\sqrt[3]{a^9} = a^3bx^3$, car $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; &c. ou divisé par $\sqrt[3]{a}$ comme $\frac{bx^3}{\sqrt[3]{a}}$, car $\sqrt[3]{a} \times \frac{bx^3}{\sqrt[3]{a}} = bx^3$, ou divisé par $\sqrt[3]{a^4}$, comme $\frac{bx^3}{\sqrt[3]{a^4}}$, parceque $\sqrt[3]{a} \times \frac{bx^3}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{bx^3\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{bx^3\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{bx^3}{a}$, car $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{1}{a}$; &c.

On voit pourquoi M. DESCARTES a dit que par cette Methode, on délivroit toûjours une équation de ses fractions, & souvent de ses quantitez incommensurables.

Au reste nous avons dans l'Exemple de M. DESCARTES $y = \frac{z}{3}$, $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$; c'est les racines de la derniere équation $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$ étant $z - 2 = 0$, $z - 3 = 0$, $z - 4 = 0$; celles de la seconde $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$ seront $y - \frac{2}{3} = 0$, $y - 1 = 0$, $y - \frac{4}{3} = 0$, parceque $y = \frac{z}{3}$; & celles de la premiere $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, seront $x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$, $x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$, $x - \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0$, parceque $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$. En effet si vous multipliez ces trois racines ensemble, il viendra $x^3 - \frac{3xx}{\sqrt{3}} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, & multipliant le numerateur & le denominateur du second terme $-\frac{3xx}{\sqrt{3}}$ par $\sqrt{3}$, vous ferez $-xx\sqrt{3}$. Cependant dans la Geometrie de M. DESCARTES on lit que les trois racines sont $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, le tiers des precedentes & qui ne produisent pas l'équation.

3. Il y a aussi d'autres Methodes pour délivrer une équation de ses incommensurables. 1°. Puisque si deux racines sont égales, leurs deux quarrez, ou leurs deux cubes, ou leurs deux quarrez de quarrez, &c. sont encore égaux : on peut élever les deux membres de l'équation à la puissance, qui est désignée par l'exposant des racines. Ainsi l'on quarrera les deux

deux membres de $x = \sqrt{a+y}$, pour avoir $xx = a + y$; on quarrera encore les deux membres de $\sqrt{ax} = \sqrt{c-d}$, pour avoir $ax = c - d$; on cubera les deux membres de $xx = \sqrt[3]{a^3 - y^3}$, pour avoir $x^6 = a^3 - y^3$, &c. Lorſqu'il y a une ou pluſieurs commenſurables avec une ou pluſieurs incommenſurables, on met toutes les quantitez commenſurables d'un même côté chaque fois qu'on éleve les deux membres à la puiſſance requiſe. Soit $x = \sqrt{b} + \sqrt{aa - xx}$, on fait d'abord $xx = b + 2\sqrt{aab - bxx} + aa - xx$; enſuite après avoir ordonné ainſi les termes $2xx - aa - b = + 2\sqrt{aab - bxx}$, on fait les quarrez $4x^4 - 4aaxx - 4bxx + a^4 + 2aab + bb = 4aab - 4bxx$; $4x^4 - 4aaxx + a^4 + bb = 2aab$. Lorſqu'il y a deux racines ſous un même ſigne, $x = \sqrt[3]{bx + \sqrt{aa + xx}}$, on commence par élever tout à la troiſiéme puiſſance, $x^3 = bx + \sqrt{aa + xx}$: après cela l'on éleve $x^3 - bx = \sqrt{aa + xx}$ au quarré $x^6 - 2bx^4 + bbxx = aa + xx$.

Mais quand les expoſans des racines ſont differens, on commence par leur donner un même expoſant $\sqrt{a} = \sqrt[3]{bbxx}$, dont les expoſans ſont 2, 3; on cubera $\sqrt{a}$, & l'on quarrera $\sqrt[3]{bbxx}$, & ce ſera $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{b^4x^4}$, ce qui ne change point les valeurs, car $\sqrt{aa} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[5]{a^5} = a$, $\sqrt{25} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[5]{3125} = 5$. Et l'équation ſe reduit à $a^3 = b^4x^4$.

2°. Parceque le calcul de la Methode precedente devient quelquefois embarraſſant, vous ſubſtituerez de ſimples lettres à la place des incommenſurables, vous éleverez l'équation aux puiſſances convenables, & lorſque vous verrez que l'équation eſt délivrée de toutes les quantitez incommenſurables, vous mettrez à la place de ces lettres ſubſtituées leurs veritables valeurs. Soit $yy + \sqrt[3]{byy} = \sqrt{bx}$: faites $\sqrt[3]{byy} = s$, $\sqrt{bx} = v$; donc $byy = s^3$, $bx = vv$; ainſi lorſque dans l'équation vous n'aurez que des s^3, s^6, vv, v^4, v^6, &c. le calcul ceſſera. L'équation propoſée ſe change en $yy + s = v$; à cauſe qu'il y a $\sqrt[3]{byy}$, vous mettez s ſeule d'un côté, & vous élevez les deux membres de $s = v - yy$ à la troiſiéme puiſſance $s^3 = v^3 - 3vvyy + 3vy^4 - y^6$. Vous rangez d'un ſeul côté les incommenſurables v^3, $3vy^4$ qui reſtent, & vous quarrez les deux membres de $v^3 + 3vy^4 = s^3 + 3vvyy + y^6$; les quarrez ſont $v^6 + 6v^4y^4 + 9vvy^8 = s^6 + 6s^3vvyy + 2s^3y^6 + 9v^4y^4 + 6vvy^8 + y^{12}$. Comme il n'y a plus d'incommenſurable, vous ſubſtituerez les valeurs de v^6, v^4, vv, s^6, s^3, & il viendra $b^3x^3 + 6bbxxy^4 + 9bxy^8 = bby^4 + 6bbxy^4 + 2by^8 + 9bbxxy^4 + 6bxy^8 + y^{12}$.

4. Lorſque la premiere operation ne délivre pas l'équation des incommenſurables & des fractions; on fait de nouvelles operations, juſqu'à ce qu'on ait fait, ce que l'on deſire; comme on le voit dans l'Exemple de M. DESCARTES. Mais enſuite après avoir connu les racines de la derniere équation, l'on a égard aux quantitez qui ont été ſubſtituées, ſi l'on

veut déterminer les racines des équations precedentes. C'est pour cela que les racines de la derniere équation de l'Exemple de M. DESCARTES, $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$ étant 2, 3, 4; celles de la seconde $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$ sont $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, parceque l'on avoit fait $z = 3y$, $y = \frac{z}{3}$. Ainsi divisant par 3 les valeurs de z, 2, 3, 4; on a les valeurs de y, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$.

De même les racines de la premiere équation $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$ sont $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{3}$; parcequ'on avoit fait $y = x\sqrt{3}$, $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$: ainsi divisant les valeurs de y, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$ par $\sqrt{3}$, l'on a les valeurs de x, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, qui sont égales à $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Car si l'on multiplie par $\sqrt{3}$ le numerateur & le denominateur de chacune des fractions $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, leur valeur ne change pas. Or les produits sont $\frac{2\sqrt{3}}{3\times3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{1\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3\times3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

ARTICLE VIII.

Rendre la quantité connuë de l'un des termes d'une équation égale à telle autre quantité que l'on voudra.

M. DESCARTES.

Cette Operation peut aussi servir pour rendre la quantité connuë de quelqu'un des termes de l'équation égale à quelqu'autre donnée: comme si ayant $x^3 * - bbx + c^3 = 0$, on veut avoir en sa place une autre équation, en laquelle la quantité connuë du terme, qui occupe la troisiéme place, à savoir celle, qui est ici bb soit $3aa$. Il faut supposer $y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis écrire $y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$.

Vous voulez que dans l'équation $x^3 * - bbx + c^3 = 0$, la quantité connuë du troisiéme terme, soit $3aa$ au lieu de bb: vous n'avez qu'à tellement multiplier les racines de l'équation, que $\frac{3aa}{bb}$ multiplie le troisiéme terme bbx; car le produit sera $\frac{3aabbx}{bb} = 3aax$. Or selon la Methode, le troisiéme terme doit être multiplié par le quarré de la quantité, qui multiplie toutes les racines, & $\frac{3aa}{bb}$ est le quarré de $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$. Multipliez donc toutes les racines par $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, c'est-à-dire prenez $y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, ou $y = \frac{ax}{b}\sqrt{3}$; donc $x = \frac{by}{a\sqrt{3}}$. Maintenant multipliez le second terme, qui est nul par $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, le produit est aussi nul; multipliez le troisiéme terme bbx par le quarré $\frac{3aa}{bb}$, le produit est $3aax$; multipliez le quatriéme terme par le cube $\frac{3aa}{bb}\sqrt{\frac{3aa}{bb}} = \frac{3a^3}{b^3}\sqrt{3}$, le produit est $\frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3}$; &

l'équation reduite est $y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$. Dont les racines, lorsqu'on les aura trouvées, doivent être divisées par $\sqrt{\frac{3aa}{bb}} = \frac{a}{b}\sqrt{3}$, pour avoir les racines de la proposée : parcequ'on a pris $y = \frac{ax}{b}\sqrt{3}$, $x = \frac{by}{a\sqrt{3}}$.

On demande que la quantité connuë du quatriéme terme de la même équation soit $3aa$. Il faut multiplier ce quatriéme terme c^3 par $\frac{3aa}{c^3}$; vous regardez donc $\frac{3aa}{c^3}$ comme un cube, parceque suivant la Methode, le quatriéme terme doit être multiplié par le cube de la quantité, qui multiplie les racines de la proposée. Or la racine du cube $\frac{3aa}{c^3}$ est $\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$, dont le quarré est $\sqrt[3]{\frac{9a^4}{c^6}} = \frac{a}{cc}\sqrt[3]{9a}$. Ainsi après avoir changé x en une autre inconnnë y, vous multipliez le second terme de l'équation proposée, qui est nul, par $\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$; le produit est nul ; vous multipliez le troisiéme terme bbx par le quarré $\frac{a}{cc}\sqrt[3]{9a}$, le produit est $\frac{abby}{cc}\sqrt[3]{9a}$; vous multipliez le quatriéme terme par le cube $\frac{3aa}{c^3}$, le produit est $3aa$; & la transformée $y^3 * - \frac{abby}{cc}\sqrt[3]{9a} + 3aa = 0$. Dont les racines seront divisées par $\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$, pour avoir les racines de la proposée, parcequ'on a fait $y = x\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$, $x = \frac{y}{\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}} = \frac{cy}{\sqrt[3]{3aa}}$.

ARTICLE IX.

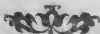
Délivrer la haute puissance d'une Equation des quantitez, qui la multiplient, ou qui la divisent.

CEtte Methode sert encore à faire disparoître les quantitez qui multiplient ou qui divisent la haute puissance d'une équation. Soit proposée l'équation $4xx - 3x + bb = 0$. Nous ferons $4x = z$, $x = \frac{z}{4}$, & la transformée sera $\frac{4zz}{16} - \frac{3z}{4} + bb = 0$, ou $\frac{1}{4}zz - \frac{3}{4}z + bb = 0$.

Nous multiplierons tout par 4; & la reduite sera $zz - 3z + 4bb = 0$.

Les racines de z étant trouvées, on les divisera par 4, pour avoir les valeurs de x.

Quelquefois la seule multiplication & la seule division suffisent, sans qu'il reste aucune fraction. Ainsi l'on divisera par 4 & l'on multipliera par 3 l'équation $\frac{4}{3}z^3 - 4zz - \frac{4}{3}z + \frac{8}{3} = 0$, & la reduite sera $z^3 - 3zz - 1z + 2 = 0$.



ARTICLE X.

M. DESCARTES.

AU reste tant les vrayes racines, que les fausses ne sont pas toûjours réelles; mais quelquefois seulement imaginaires : c'est-à-dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que j'ai dit, en chaque équation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine. Comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, il n'y en a toutesfois qu'une réelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoiqu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

Voyez Sect. 1. Art. 1. & 3. dans lesquels cet Article est expliqué.

Divisez $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$ par $x - 2 = 0$, le quotient est $xx - 4x + 5 = 0$. Ainsi $x - 2 = 0$, ou $x = 2$ est une racine réelle vraye de l'équation. Pour avoir les racines de $xx - 4x + 5 = 0$, ou de $xx - 4x = -5$; vous ajoûterez 4 de chaque côté : & les racines de $xx - 4x + 4 = -1$ sont $x = 2 \pm \sqrt{-1}$, qui sont imaginaires.



PARTIE TROISIE'ME.

De la Resolution des Equations.

1. ON apprendra comment on peut trouver le plus grand diviseur commun de deux quantitez; & tous les diviseurs d'une même quantité : parceque ces deux Problêmes sont necessaires pour ce qui suit. 2. On apportera differentes Methodes pour découvrir toutes les racines d'une équation. 3. On donnera la maniere de reduire les équations cubiques. 4. Les équations qui ont quatre dimensions. 5. On apportera une Regle generale pour reduire les équations de quelque degré qu'elles soient.

SECTION I.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux quantitez, & tous les diviſeurs d'une quantité.

ARTICLE I.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux quantitez.

1. SOient propoſez les nombres 60. 20; diviſez le plus grand par le plus petit : & parceque la diviſion eſt exacte, 20 eſt le plus grand diviſeur commun des nombres 60. 20.

2. Soient propoſez les nombres 64. 48; diviſez le plus grand par le plus petit; le quotient, qui n'eſt pas exact, eſt 1, que vous negligez; le reſte eſt 16. Diviſez le moindre 48 des deux propoſez par 16, la diviſion eſt juſte : ainſi le dernier diviſeur 16 eſt le plus grand diviſeur commun des nombres 64. 48.

3. Soient propoſez les nombres 100. 22; diviſez le premier par le ſecond; le quotient non exact eſt 4, que vous negligez; le premier reſte eſt 12. Diviſez 22 le moindre des propoſez par le reſte 12 : le quotient non exact eſt 1, que vous negligez; le ſecond reſte eſt 10. Diviſez le premier reſte 12, par le ſecond 10 : le quotient non exact eſt encore 1, que vous negligez; le troiſiéme reſte eſt 2. Diviſez le ſecond reſte 10 par le troiſiéme 2, la diviſion eſt exacte : ainſi le dernier diviſeur 2 eſt le plus grand diviſeur commun des nombres 100. 22.

4. La Regle eſt donc d'ôter par le moyen de la diviſion le plus petit nombre propoſé du plus grand; c'eſt-à dire de le ſouſtraire autant de fois que l'on peut. S'il ne reſte rien la premiere fois, ou ſi la diviſion ſe fait juſte : le plus petit nombre propoſé eſt le plus grand diviſeur commun des deux. Mais s'il reſte quelque choſe, on ſouſtrait par la diviſion le premier reſte du plus petit nombre propoſé; & s'il reſte encore quelque choſe, on ôte par la diviſion le ſecond reſte du premier; & enſuite le troiſiéme reſte du ſecond, &c. juſqu'à ce qu'on faſſe une ſouſtraction, qui ne laiſſe rien, c'eſt-à-dire qu'on ait trouvé un diviſeur exact : qui eſt le plus grand diviſeur commun des deux nombres propoſez. Ce diviſeur eſt 1. lorſque les nombres propoſez ſont premiers entr'eux.

5. Les Operations ſont les mêmes pour deux équations litterales propoſées.

Mais l'on conſidere d'abord ſi elles peuvent toutes deux ſe diviſer par une même quantité, ce qui les diminuë. On fait donc, ſi on le peut, cette

diviſion, qui n'eſt qu'une preparation pour l'autre.

Les propoſées ſont $3ax^4 - 12aax^3 + 18a^3xx - 12a^4x + 3a^5 = 0$, $3axx - 3a^3 = 0$; qui peuvent être diviſées toutes deux par $3a$, & être par là reduites à $x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4 = 0$, $xx - aa = 0$. Et quand on aura trouvé leur diviſeur commun, on le multipliera par $3a$; le produit ſera le diviſeur commun des équations propoſées.

6. Quelquefois après la diviſion, la haute puiſſance du reſte eſt plus grande que la haute puiſſance du diviſeur: alors on continuë à diviſer ce reſte par le même diviſeur. Et cela ſe repete, juſqu'à ce que la haute puiſſance du reſte ſoit moindre que la haute puiſſance du diviſeur. Diviſons $x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4ax^3 + a^4$ par $xx - aa$: le premier quotient, qu'il faut negliger eſt xx; le premier reſte eſt $- 4ax^3 + 7aaxx - 4a^3x + a^4$, dont la haute puiſſance x^3 eſt plus grande que celle du diviſeur xx: ainſi nous ferons la ſeconde operation avec le même diviſeur $xx - aa$. Le quotient qu'on neglige eſt $- 4ax$; le ſecond reſte eſt $+ 7aaxx - 8a^3x + a^4$, dont la haute puiſſance $7aaxx$ n'eſt pas moindre que xx du diviſeur: ainſi nous nous ſervirons encore du même diviſeur $xx - aa$.

Le quotient qu'on neglige eſt $7aa$; le troiſiéme reſte eſt $- 8a^3x + 8a^4$, dont la puiſſance $- 8a^3x$ eſt moindre que celle du diviſeur $xx - aa$. Il faut donc maintenant diviſer $xx - aa$ par le dernier reſte $- 8a^3x + 8a^4$, ou plûtôt par $x - a$, comme on le va dire.

7. Quand l'une des deux quantitez peut ſeule, même dès le commencement, être reduite à de moindres termes, comme ici le diviſeur $- 8a^3x + 8a^4$, qui étant diviſé par $- 8a^3$, ſe reduit à $x - a$, l'on fait cette reduction: mais après qu'on aura trouvé le plus grand diviſeur commun, l'on n'aura aucun égard à cette reduction, qui ne s'eſt faite, que dans l'une des deux quantitez. C'eſt donc avec la reduite $x - a$ que nous diviſerons $xx - aa$; le quotient exact eſt $x + a$. Et là finiſſent les diviſions; & il faut multiplier le dernier diviſeur $x - a$ par $3a$, afin d'avoir $3ax - 3aa$ pour le plus grand diviſeur commun des quantitez $3ax^4 - 12aax^3 + 18a^3x + 3a^5 = 0$, $3axx - 3a^3 = 0$.

8. Lorſque le quotient eſt une fraction, comme en diviſant $3xx - 7x + 4 = 0$ par $- 2xx + 5x - 3 = 0$, le quotient eſt $-\frac{3}{2}$: on multiplie le dividende $+ 3xx - 7x + 4$ par $- 2$; le produit eſt le nouveau dividende $- 6xx + 14x - 8 = 0$, que l'on diviſe enſuite par $- 2xx + 5x - 3 = 0$, le quotient eſt 3, que l'on neglige; le reſte eſt $- x + 1$; avec lequel l'on diviſe le diviſeur precedent $- 2xx + 5x - 3$; le quotient eſt $+ 2x - 3$ ſans aucun reſte.

Ainſi le dernier diviſeur $- x + 1 = 0$, ou $x - 1 = 0$ eſt le plus grand diviſeur commun cherché.

ARTICLE II.

Trouver tous les Diviſeurs d'une quantité.

	Diviſeurs ſimples.	produits.						
1. POur trouver tous les diviſeurs exacts de 120.	1.							
	2.							
	2.	4.						
	2.	8.						
	3.	6.	12.	24.				
	5.	10.	20.	40.	15.	30.	60.	120.

Parceque 120 eſt un nombre pair, je le diviſe par 2, le quotient eſt 60; j'écris le diviſeur 2 ſous 1. Après cela je diviſe le quotient 60 encore par 2, le quotient eſt 30; j'écris le diviſeur 2 ſous le precedent diviſeur 2. Je diviſe de même le quotient 30 par 2, le quotient eſt 15; j'écris auſſi le diviſeur 2 ſous les precedens. Le quotient 15, qui eſt un nombre impair, ne peut être diviſé par 2, ainſi je le diviſe par le plus petit nombre impair 3, qui ſuive 2, le quotient eſt 5; j'écris le diviſeur 3 ſous 2. Le quotient 5 ne peut être diviſé par 3, c'eſt pourquoi je le diviſe par 5 nombre impair qui ſuit 3, le quotient eſt 1; j'écris le diviſeur 5 ſous les autres. Tous les diviſeurs ſimples ſont donc 1. 2. 2. 2. 3. 5.

Que ſi l'on ne trouvoit aucun autre nombre, que l'unité qui pût diviſer le propoſé, en eſſayant ces ſortes de diviſions: le nombre propoſé n'auroit aucun diviſeur que l'unité, & ſeroit un nombre premier; ce qui ne peut arriver à aucun nombre pair, puiſqu'il peut toûjours être diviſé par 2. Quand le nombre eſt impair, on ne tente pas la diviſion par 2: mais il la faut tenter par tout nombre impair, juſqu'à ce qu'on ſoit venu à celui, qui eſt la racine quarrée du nombre propoſé, s'il eſt quarré; ou s'il ne l'eſt pas, juſqu'à ce qu'on ſoit venu à un nombre dont le quarré eſt plus grand que le nombre propoſé. On doit appliquer tous ces nombres impairs de ſuite, quand même on en trouveroit qui ne fuſſent pas des diviſeurs exacts. Ainſi la diviſion de 121 doit ſe tenter par 3. 5. 7. 9. 11. le quarré de 11 étant 121. la diviſion de 1249 doit ſe tenter par 3. 7. 9. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. le quarré de 37 étant 1369, qui eſt plus grand que le nombre propoſée 1249.

J'ai omis 5 parcequ'il eſt certain, que 5 ne diviſe juſte que des nombres qui finiſſent par 5 ou 0; j'ai encore omis 21, 27, 33. parcequ'ils ſont

multiples de 3, par lequel la diviſion n'auroit pas pû ſe faire : ce qui eſt general ; car tout nombre, qui n'a pas pû être diviſé par un nombre quelconque 3, ne pourra jamais être diviſé par aucun de ſes multiples 6, 9, 12, 15, &c, C'eſt auſſi pour cette raiſon qu'on ne tente ces diviſions par aucun nombre pair, que par 2, dont tous les nombres pairs ſont multiples.

Multipliez les diviſeurs ſimples les uns par les autres & vous trouverez tous les diviſeurs exacts, du nombre propoſé qui ſeront, $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 15.\ 20.\ 24.\ 30.\ 40.\ 60.\ 120.$

	Diviſeurs ſimples.	Produits.
2. Pour trouver tous les diviſeurs exacts de la grandeur litterale $a^6 + 2a^4cc + aac^4$, je diviſe par a, le quotient eſt $a^5 + 2a^3cc$	$1.$	$aa.$
	$a.$	$a^3 + acc.$
	$a.$	$a^4 + aacc.$
	$aa + cc.$	$a^4 + 2aacc + c^4.$
	$aa + cc.$	$a^5 + 2a^3cc + ac^4.$
		$a^6 + 2a^4cc + aac^4.$

$+ ac^4$, & j'écris le diviſeur a. Je diviſe le quotient encore par a, le nouveau quotient eſt $a^4 + 2aacc + c^4$, & j'écris le ſecond diviſeur a ſous le premier. Je tente la diviſion de $a^4 + 2aacc + c^4$ par $a + c$, $a - c$, mais inutilement. Je diviſe donc par $aa + cc$, le quotient eſt $aa + cc$, & j'écris le diviſeur $aa + cc$ ſous les autres. Le quotient $aa + cc$ ne ſauroit plus être diviſé que par 1, ou par $aa + cc$ & le quotient eſt 1, j'écris encore le diviſeur $aa + cc$. Et multipliant les diviſeurs ſimples, je trouve les diviſeurs produits tels qu'ils ſont marquez.

SECTION II.

Découvrir toutes les Racines d'une Equation.

I.

CEtte premiere Methode ſera enſeignée par M. DESCARTES Section III.

1. Il ne doit point y avoir de fractions ni de termes irrationaux dans l'équation : & ſi elle en contient il faut l'en délivrer de la maniere que l'on a dit Part. 2. Sect. 2. Art. 7. Tous les termes ſont d'un côté & zero de l'autre.

2. Soit donc propoſée l'équation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$. On cherche Sect. 1. Art. 2. tous les diviſeurs exacts du dernier terme

terme 120: parceque Part. 2. Sect. 1. Art. 2. n. 9. ce dernier terme peut contenir toutes les valeurs de x ou toutes les racines de l'équation.

3. On examine la disposition des signes $+$ & $-$, comme Part. 2. Sect. 1. Art. 3. & s'ils marquent, qu'il ne peut y avoir que des racines vrayes; l'on tente la division de l'équation proposée par des binomes, c'est-à-dire par des quantitez composées de l'inconnuë — un des diviseurs du dernier terme: comme ici par $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, &c. Au contraire si la disposition des signes fait connoître qu'il ne peut y avoir que des racines fausses, l'on tente la division par des binomes composez de l'inconnuë $+$ un diviseur exact du dernier terme: ce seroit donc par $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. Enfin si la disposition des signes montre qu'il y a dans l'équation des racines vrayes & des fausses, l'on tentera la division par $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, &c.

On commence par les plus simples diviseurs, 1, 2, 3, &c. & l'on poursuit jusques au dernier, à moins qu'on n'ait trouvé toutes les racines, que l'équation doit avoir; car alors on s'arrête.

4. Lorsqu'un binome quelconque $x - 1 = 0$, ne divise pas sans reste l'équation proposée, il ne contient pas une des racines de l'équation; mais s'il la divise exactement, il en est une racine vraye; & c'est $x = 1$. De même si le binome $x + 1 = 0$, divise exactement une équation, il en est une racine fausse, à savoir $x = -1$.

5. J'essaye de diviser la proposée par $x - 2 = 0$; elle réüssit; ainsi $x = 2$ est une racine vraye de l'équation. Le quotient est $x^3 - 2xx - 23x + 60 = 0$, & l'équation est descenduë d'un degré: parceque comme à mesure qu'on multiplie une équation par une nouvelle racine elle monte d'un degré; aussi à mesure qu'on divise une équation par une de ses racines, elle doit descendre d'un degré. Il faut observer qu'une racine $xx - 2 = 0$, qui par la multiplication augmenteroit une équation de deux degrez, la diminueroit aussi de deux degrez par la division.

Si les signes du quotient $x^3 - 2xx - 23x + 60 = 0$, faisoient juger qu'il n'a que des racines vrayes; l'on ne feroit la division que par un binome composé de l'inconnuë — un des diviseurs exacts de 60, qui sont $1.$ $2.$ $3.$ $4.$ $5.$ $6.$ $10.$ $12.$ $15.$ $20.$ $30.$ $60.$ Mais l'équation contient 2 racines vrayes, $1.$ fausse.

Ainsi je recommence la division par les diviseurs les plus simples de 60, excepté ceux qui n'ont pû réüssir auparavant; qui sont -1, $+1$. J'applique de nouveau $x - 2 = 0$, qui ne divise plus exactement; ensuite $x + 2 = 0$, qui ne le fait pas non plus; après $x - 3 = 0$, dont la division est exacte. Ainsi la seconde racine vraye est $x = 3$. Le quotient $xx + 1x - 20 = 0$, est d'un degré moindre que la quantité divisée; & il contient une racine vraye & une fausse.

Les diviſeurs du dernier terme 20 ſont 1. 2. 4. 5. 10. 20. Il faut donc tenter la diviſion par $x - 4 = 0$, qui eſt juſte ; la troiſiéme racine vraye ſera donc $x = 4$. Et le quotient $x + 5 = 0$ prouve que la quatriéme racine de la propoſée eſt la fauſſe $x = -5$.

6. Dès que l'équation eſt deſcenduë au ſecond degré, on peut en connoître les deux racines par la Methode de Liv. I. en ajoûtant de chaque côté le quarré de la moitié du Coefficient du ſecond terme.

7. Soit propoſée l'équation $y^6 + aay^4 - 2ccy^4 - a^4yy + c^4yy - a^6 - 2a^4cc - aac^4 = 0$. Les diviſeurs exacts du dernier terme $a^6 + 2a^4cc + aac^4$ ſont 1. a. aa. &c. tels qu'on les a trouvez, Sect. 1. Art. 1. n. 2. De plus il ne faut pas tenter la diviſion par x, mais par $xx -$ ou $+$ chaque diviſeur, ſuivant Part. 2. Sect. 1. Art. 2. La diviſion exacte ne ſe fait, que par le binome $yy - aa - cc = 0$: ainſi une racine vraye eſt $yy = aa + cc$. Le quotient $y^4 + 2aayy - ccyy + a^4 + aacc = 0$, ne peut point ſe diviſer exactement par aucun binome compoſé de $yy +$ ou $-$ un des diviſeurs exacts du dernier terme $a^4 + aacc$. Ainſi les deux autres racines ne ſe trouveront qu'avec la Methode de Liv. 1 Part. 2. Art. 1. & elles ſont $yy = -aa + \frac{1}{2}cc \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4 - 2aacc}$, incommenſurables, & même imaginaires lorſque cc eſt moindre que $8aa$.

8. Toutes les racines d'une équation étant incommenſurables, comme de celle-ci $x^4 - aaxx - bbxx - cxx + aac + bbc = 0$, dont les racines ſont $x - \sqrt{c} = 0$, $x + \sqrt{c} = 0$, $x - \sqrt{aa + bb} = 0$, $x + \sqrt{aa + bb} = 0$; ou étant toutes imaginaires comme de celle-ci $x^4 - 4x^3 + 8xx - 12x + 15 = 0$, dont les racines ſont $x - 2 + \sqrt{-1} = 0$, $x - 2 - \sqrt{-1} = 0$, $x - \sqrt{-3} = 0$, $x + \sqrt{-3} = 0$: on ne trouvera aucune des racines par la Methode preſente. Dès que cette Methode ne découvrira aucune racine ; elles ſeront toutes incommenſurables, ou toutes imaginaires, ou partie incommenſurables, partie imaginaires.

9. Mais comme les diviſeurs du dernier terme ſont quelquefois en très-grand nombre ; & que c'eſt une peine exceſſive, que de tenter la diviſion de l'équation par tous ces diviſeurs l'un après l'autre, & pris non ſeulement avec le ſigne $-$, mais encore avec le ſigne $+$ on a cherché differentes voyes, pour diminuer ce travail. C'eſt ce que l'on verra dans les Methodes ſuivantes.

II.

1. Cette Methode eſt fondée ſur ce principe, que ſi dans une équation, où tous les termes ſont d'un côté, & zero de l'autre, on ſubſtituë une valeur de l'inconnuë à ſa place, tous les termes de l'équation ſe détruiſent, & l'équation ſe reduit à $0 = 0$.

Soit $x - a = 0$; donc $x = +a$; ſubſtituons cette valeur de x à ſa place, il vient $a - a = 0$, $0 = 0$.

Soit $xx + 2bx + bb = 0$, les deux racines sont $x + b = 0$, $x + b = 0$; donc $x = -b$; substituons $-b$ à la place de x, & $+bb$ quarré de $-b$ à la place de xx; l'équation se changera en $bb - 2bb + bb = 0$, $0 = 0$.

$$\text{Soit } x^4 \begin{array}{l} -ax^3 \\ -bx^3 \\ -cx^3 \\ -dx^3 \end{array} \begin{array}{l} +abxx \\ +acxx \\ +adxx \\ +bcxx \\ +bdxx \\ +cdxx \end{array} \begin{array}{l} -abcx \\ -abdx \\ -acdx \\ -bcdx \end{array} +abcd = 0,$$

dont les diviseurs du dernier terme sont a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, acd, bcd, $abcd$.

Si l'on substituë a pour x, aa pour xx, a^3 pour x^3, a^4 pour x^4, on fera la premiere reduite qui suit. Si l'on substituë b pour x, bb pour xx, b^3 pour x^3, b^4 pour x^4, on aura la seconde reduite qui suit. Si l'on substituë de même c, on aura la troisiéme reduite, & si l'on substituë d, ce sera la quatriéme reduite. Dans toutes ces reduites les termes se détruisent également, & l'équation devient $0 = 0$.

I.

$$a^4 \begin{array}{l} -a^4 \\ -a^3b \\ -a^3c \\ -a^3d \end{array} \begin{array}{l} +a^3b \\ +a^3c \\ +a^3d \\ +aabc \\ +aabd \\ +aacd \end{array} \begin{array}{l} -aabc \\ -aabd \\ -aacd \\ -abcd \end{array} +abcd = 0.$$

II.

$$b^4 \begin{array}{l} -ab^3 \\ -b^4 \\ -b^3c \\ -b^3d \end{array} \begin{array}{l} +ab^3 \\ +abbc \\ +abbd \\ +b^3c \\ +b^3d \\ +bbcd \end{array} \begin{array}{l} -abbc \\ -abbd \\ -abcd \\ -bbcd \end{array} +abcd = 0.$$

III.

$$c^4 \begin{array}{l} -ac^3 \\ -bc^3 \\ -c^4 \\ -c^3d \end{array} \begin{array}{l} +abcc \\ +ac^3 \\ +accd \\ +bc^3 \\ +bccd \\ +c^3d \end{array} \begin{array}{l} -abcc \\ -abcd \\ -accd \\ -bccd \end{array} +abcd = 0.$$

IV.

$$d^4 \begin{array}{l} -ad^3 \\ -bd^3 \\ -cd^3 \\ -d^4 \end{array} \begin{array}{l} +abdd \\ +acdd \\ +ad^3 \\ +bcdd \\ +bd^3 \\ +cd^3 \end{array} \begin{array}{l} -abcd \\ -abdd \\ -acdd \\ -bcdd \end{array} +abcd = 0.$$

Les racines de l'équation proposée sont $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$.

2. Le même arrive aux équations numeriques. Soit $x^3 + 9xx + 26x + 24 = 0$; dont les racines $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$, ou $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$. Subſtituez -2 à la place de x, de ſorte que -2 multiplie $+26$ comme x le multiplie; & $+4$ quarré de -2 à la place de xx, de ſorte que $+4$ multiplie $+9$ comme xx le multiplie; & -8 cube de -2 à la place de x^3. La reduite ſera $-8 + 36 - 52 + 24 = 0$, $0 = 0$.

Subſtituez auſſi de la même ſorte -3 à la place de x, 9 à la place de xx, -27 à la place de x^3; vous ferez $-27 + 81 - 78 + 24 = 0$, $0 = 0$.

Mettez encore -4 pour x, $+16$ pour xx, -64 pour x^3; il viendra $-64 + 144 - 104 + 24 = 0$, $0 = 0$.

3. C'eſt pourquoi après avoir trouvé tous les diviſeurs exacts du dernier terme de l'équation, il faut les ſubſtituer l'un après l'autre avec le ſigne + & — ſelon que les ſignes + & — de l'équation l'indiquent, à la place de l'inconnuë de la façon qu'on vient de le voir, en commençant par les plus ſimples. Lorſque la ſubſtitution fera que tous les termes ſe détruiſent, la quantité, qu'on aura ſubſtituée avec le ſigne +, ſera une racine vraye de l'équation, celle, qu'on aura ſubſtituée avec le ſigne —, en ſera une racine fauſſe.

4. Mais comme on peut être obligé de ſubſtituer tous les diviſeurs du dernier terme; ce ſeroit encore, quand ces diviſeurs ſont en grand nombre, un travail aſſez long.

III.

La Methode, qui ſuit, eſt pour les grandeurs numeriques. Soit propoſée l'équation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$.

1. Vous chercherez les diviſeurs exacts du dernier terme 120, qui ſont $1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 15. 20. 24. 30. 40. 60. 120$. Enſuite je ſuppoſe $x + 1 = y$, $y - 1 = x$, c'eſt-à-dire que Part. 2. Sect. 2. Art. 2. vous augmentez de 1. les racines vrayes de l'équation propoſée. La transformée ſera $y^4 - 8y^3 - yy + 126y - 240 = 0$. dont les diviſeurs du dernier terme 240, ſont $1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 15. 16. 20. 24. 30. 40. 48. 60. 120. 240$. Or puiſque les racines vrayes de cette transformée n'ont qu'une unité par deſſus les racines vrayes de la propoſée : il ſuit, que les racines de la transformée étant diminuées de 1, elles peuvent être les racines vrayes de la propoſée. Vous prendrez donc les racines de la transformée diminuées de 1, & ce ſont $0. 1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 11. 14. 15. 19. 23. 29. 39. 47. 59. 119. 239$. Mais il n'y a que les racines qui ſe trouvent ici les mêmes avec celles de la propoſée, qui puiſſent être ſes vrayes racines; à ſavoir $1. 2. 3. 4. 5. 15$. Ce qui diminuë déja de beaucoup le nombre des racines avec leſquelles il faut faire les diviſions de la premiere Methode,

ou les substitutions de la seconde. Cependant comme la proposée n'a que trois racines vrayes, vous chercherez bientôt à les diminuer davantage.

D'un autre côté comme les racines fausses de la proposée sont diminuées de l'unité dans la transformée, Part. 2. Sect. 2. Art. 2. n. 3. il suit que si vous augmentez de *1* les racines de la transformée : elles peuvent être les racines fausses de la proposée. Prenez donc les racines de la transformée augmentées de l'unité, & ce sont *2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 11. 13. 16. 17. 21. 25. 31. 41, 49. 61. 121. 241.* Mais il n'y a que les racines qui se trouvent ici les mêmes avec celles de la proposée, qui puissent être ses racines fausses, à savoir *2. 3. 4. 5. 6. 16.* cependant comme la proposée n'a qu'une racine fausse, il en faudra encore diminuer le nombre.

3. Pour déterminer davantage les racines tant vrayes que fausses de l'équation proposée : vous feindrez encore $x - 1 = y$, $y + 1 = x$, c'est-à-dire que Part. 2. Sect. 2. Art. 2. n. 2. vous diminuez de l'unité les racines vrayes de la proposée. La transformée sera $y^{4} * - 25yy + 60y - 36 = 0$, dont les diviseurs exacts du dernier terme *36* sont *1. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 18. 36.* Or puisque les vrayes racines de cette transformée sont moindres d'une unité, que les vrayes racines de la proposée : vous prendrez les racines de la transformée augmentées de 1, & ce sont *2. 3. 4. 5. 7. 10 13. 19. 37.* Mais il n'y a que celles qui sont les mêmes que les diviseurs de *120* dernier terme de la proposée, & que les diviseurs diminuez de 1 de *240* dernier terme de la premiere transformée, qui puissent être les racines vrayes de la proposée ; à savoir *2. 3. 4. 5.*

Comme les racines fausses de la proposée sont augmentées de l'unité dans la transformée, Part. 2. Sect. 2. Art. 2. n. 3. il suit que si vous diminuez de 1 les diviseurs de la seconde transformée, ils pourront être les racines fausses de la proposée. Ces diviseurs diminuez de 1 sont 0. 1. 2. 3. 5. 8. 11. 17. que vous comparez avec les diviseurs de 120 dernier terme de la proposée & avec les diviseurs augmentez de 1. de la premiere transformée : & il n'y a que les nombres communs dans ces trois ordres de diviseurs, à savoir *2. 3. 5.* qui puissent être la racine fausse de la proposée.

4. Si vous voulez encore diminuer le nombre des racines tant vrayes que fausses ; vous pourrez faire $x + 2 = y$, $x - 2 = y$; $x + 3 = y$, &c.

5. Après que vous aurez trouvé les nombres qui peuvent être racines de l'équation proposée, ou bien selon la premiere Methode vous diviserez par un binome composé de l'inconnuë + ou — un de ces nombres : ou bien suivant la seconde Methode vous substituerez chacun de ces nombres à la place de l'inconnuë.

I V.

1. Cette quatriéme Methode eſt pour les grandeurs litterales. Soit propoſée l'équation de la deuxiéme Methode n. 1. $x^4 \begin{matrix} -a^3 \\ -bx^3 \\ -c^3 \end{matrix}$, &c. On peut feindre une égalité entre tous les termes, où abd ſe trouve, & zero; $-abdx+abcd=o$; $abdx=abcd$; $x=c$; $x-c=o$. Si c diviſe exactement le dernier terme $abcd$ de la propoſée, il peut être une racine de cette même propoſée: l'on eſſaye donc la diviſion de toute la propoſée par $x-c$, & parceque la diviſion eſt juſte, $x-c=o$ eſt une racine cherchée.

On fera le même à l'égard du quotient $x^3 \begin{matrix} -axx \\ -bxx \\ -dxx \end{matrix} \begin{matrix} +abx \\ +adx \\ +bdx \end{matrix} -abd=o$. & l'on formera une équation $+abx-abd=o$ de tous les termes, où ab ſe trouve, qui ſe reduit à $x-d=o$; & parceque d diviſe le quotient abd; on tentera la diviſion de toute l'équation par $x-d=o$, cette diviſion étant achevée ſans aucun reſte, on a découvert une nouvelle racine de la propoſée.

On continuera de la même ſorte ſur le nouveau quotient, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait trouvé toutes les racines de l'équation.

Lorſque une équation feinte de tous les termes, où abd ſe trouve, ne réüſſit pas, on en feint d'autres de tous les termes, où bcd ſe trouve; de tous les termes, où bc ſe trouve; de tous les termes, où d ſe trouve, &c.

2. Voici qui eſt encore pour les équations litterales. Je diviſe l'équation propoſée en deux ſommes: dans la premiere je mets tous les termes, où c ſe trouve, ainſi l'équation de Methode 2. n. 1. étant propoſée, la premiere ſomme eſt $-cx^3+acxx+bcxx+cdxx-abcx-acdx-bcdx+abcd=o$; dans la ſeconde je mets tous les autres termes, $x^4-ax^3-bx^3-dx^3+abxx+adxx+bdxx-abdx=o$. Je diminuë l'une & l'autre par la diviſion, s'il ſe peut; la premiere peut toûjours être diviſée par la quantité commune à tous les termes, comme ici par c; la ſeconde le peut ici être par x. Et j'ai $-x^3+axx+bxx+dxx-abx-adx-bdx+abd=o$, & $x^3-axx-bxx-dxx+abx+adx+bdx-abd=o$. Je cherche le plus grand diviſeur commun de ces deux quantitez, en diviſant la premiere par la ſeconde: la diviſion eſt exacte & le quotient -1; ainſi Sect. 1. Art. 1. n. 1.

La ſeconde quantité eſt le plus grand diviſeur commun des deux. Mais parceque cette ſeconde quantité n'eſt pas une racine de la propoſée, car elle

en a quatre, qui chacune sont x : je divise la proposée par ce diviseur commun : le quotient $x - c = o$ de la division exacte est une racine vraye de la proposée.

Le diviseur commun $x^3 - axx - bxx - dxx + abx + adx + bdx - abd = o$, contient les autres racines. Je le divise encore en deux sommes, dans la premiere desquelles je range tous les termes qui ont b, $- bxx + abx + bdx - abd = o$; dans l'autre sont les autres termes $x^3 - axx - dxx + adx = o$; qui se divisent déja l'une par b, l'autre par x; & elles sont $- xx + ax + dx - ad = o$, $xx - ax - dx + ad = o$. La seconde divise exactement la premiere : la seconde est donc le plus grand diviseur commun des deux, & par consequent de la proposée, que je divise par cette seconde. Le quotient exact $x - b$ est une autre racine vraye de l'équation proposée.

Le diviseur commun $xx - ax - dx + ad = o$ contient les deux autres racines. J'en fais aussi deux parties, dont la premiere est composée des termes, où a se trouve; la seconde est composée des autres termes, $- ax + ad = o$, $xx - dx = o$. La division de la premiere par a, de la seconde par x, laisse $- x + d = o$, $x - d = o$. La seconde divise exactement la premiere, la seconde contient x lineaire, ainsi $x - d = o$ est la troisiéme racine vraye de la proposée.

Enfin je divise $xx - ax - dx + ad = o$ par $x - d = o$; le quotient $x - a = o$ est la quatriéme racine vraye de la proposée.

On auroit pû diviser d'abord l'équation proposée $x^4 \begin{matrix} - ax^3 \\ - bx^3 \\ - cx^3 \end{matrix}$ &c. en deux autres, dont la premiere contienne tous les termes où est ab, la seconde tous les autres; on auroit ou $+ abxx - abcx - abdx + abcd = o$, $x^4 - ax^3 - bx^3 - cx^3 - dx^3 + acxx + adxx + bcxx + bdxx + cdxx - acdx - bcdx = o$. Et divisant la premiere par ab, la seconde par x, il seroit venu $xx - cx - dx + cd = o$, $x^3 - axx - bxx - cxx - dxx + acx + adx + bcx + bdx + cdx - acd - bcd$. La seconde est divisée exactement par la premiere, qui sera le plus grand diviseur des deux, & un diviseur de la proposée.

Mais comme ce commun diviseur n'est pas une grandeur lineaire, elle n'est pas une racine de la proposée : on divisera donc la proposée par ce commun diviseur; le quotient exact $xx - ax - bx + ab = o$, contient deux racines de la proposée. On separera donc cette équation en deux autres, dont la premiere ait les termes où a se trouve, & la seconde tous les autres, ce sont $- ax + ab = o$, $xx - bx = o$, & divisant l'une par a, l'autre par x, il vient $- x + b = o$, $x - b = o$, par laquelle on divise la proposée; & la division exacte qui se fait, prouve que

$x - b = v$ est une des racines de la proposée, qui sera diminuée d'un degré : après quoi l'on cherchera de la même façon les autres racines.

SECTION III.

La reduction des Equations cubiques.

L'On a expliqué Liv. 2. Part. 1. Sect. 1. ce que c'est que le Problême plan, solide, plus que solide.

ARTICLE I.

La *reduction des Equations cubiques, lorsque le Problême est plan.*

M. DESCARTES.

OR quand pour trouver la construction de quelque Problême, on vient à une équation, en laquelle la quantité inconnuë a trois dimensions; premierement si les quantitez connuës, qui y sont, contiennent quelques nombres rompus, il les faut reduire à d'autres entiers, par la multiplication tantôt expliquée ; & s'ils en contiennent de sourds, il faut aussi les reduire à d'autres rationaux autant qu'il sera possible, tant par cette même multiplication, que par divers aurres moyens, qui sont assez faciles à trouver. Puis examinant par ordre toutes les quantitez, qui peuvent diviser sans fraction le dernier terme, il faut voir, si quelqu'une d'elles jointe avec la quantité inconnuë par le signe + ou —, peut composer un binome, qui divise toute la somme ; & si cela est, le Problême est plan, c'est-à-dire, il peut être construit avec la Regle & le Compas. Car ou bien la quantité connuë de ce binome est la racine cherchée ; ou bien l'équation étant divisée par lui, se reduit à deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouver après la racine par ce qui a été dit au premier Livre.

Par exemple si on a $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$. le dernier terme, qui est 64 peut être divisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; c'est pourquoi il faut examiner par ordre, si cette équation ne peut point être divisée par quelqu'un des binomes

mes $yy - 1$, ou $yy + 1$, $yy - 2$, ou $yy + 2$, $yy - 4$, &c. Et on trouve qu'elle le peut être par $yy - 16$ en cette sorte.

$$\begin{array}{l} y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0 \\ -y^6 - 8y^4 - \quad 4yy \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -16 \\ 0 - 16y^4 - 128yy \\ \hline \quad\quad 16 \qquad\quad 16 \\ \hline +y^4 + \quad 8yy + 4 = 0 \text{ quotient.} \end{array}$$

Je commence par le dernier terme, & divise -64 par -16, ce qui fait $+4$, que j'écris dans le quotient. Puis je multiplie $+4$ par $+yy$, ce qui fait $+4yy$; c'est pourquoi j'écris $-4yy$ dans la somme, qu'il faut diviser : car il y faut toûjours écrire le signe $+$ ou $-$ tout au contraire à celui que produit la multiplication. Et joignant $-124yy$ avec $-4yy$, j'ai $-128yy$, que je divise derechef par -16, & j'ai $+8yy$, pour mettre dans le quotient, & en le multipliant par yy, j'ai $-8y^4$, pour joindre avec le terme qu'il faut diviser, qui est aussi $-8y^4$; & ces deux ensemble font $-16y^4$, que je divise par -16, ce qui fait $+1y^4$ pour le quotient, & $-1y^6$, pour joindre avec $+1y^6$, ce qui fait 0, & montre que la division est achevée. Mais s'il étoit resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eut pû diviser sans fraction quelqu'un des termes precedens, on eut par là reconnu, qu'elle ne pouvoit être faite.

Tout de même si on a $y^6 \begin{array}{l} +aa \\ -2cc \end{array} y^4 \begin{array}{l} -a^4 \\ +c^4 \end{array} yy \begin{array}{l} -a^6 \\ -aac^4 \end{array} - 2a^4cc = 0$, le dernier terme se peut diviser sans fraction par a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, & semblables.

Mais il n'y en a que deux, qu'on ait besoin de considerer, à savoir aa, & $aa + cc$; car les autres donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient, qu'il n'y en a en la quantité connuë du penultiéme terme, empêcheroit que la division ne s'y pût faire. Et notez que je ne compte ici les dimensions de y^6 que pour trois à cause qu'il n'y a point d'y^5, ni d'y^3, ni d'y en toute la somme.

Or en examinant le binome $yy - aa - cc = 0$, on trouve que la division se peut faire par lui en cette sorte.

$$\begin{array}{rccccccc}
 & +aa & & -a^4 & & -a^6 & & \\
+y^6 & & y^4 & & yy & & -2a^4cc = 0. & \\
 & -2cc & & +c^4 & & -aac^4 & & \\
-y^6 & -2aa & & -a^4 & & & & \\
 & +cc & & -aacc & -aa-cc & & & \\
0 & & & & & & & \\
 & -aacc & -aa-cc & & & & & \\
\hline
 & +2aa & & +a^4 & & & & \\
+y^4 & & yy & & = 0. & \text{quotient.} & & \\
 & -cc & & +aacc & & & &
\end{array}$$

Ce qui montre que la racine cherchée est $aa + cc$. Et la preuve en est aisée à faire par la multiplication.

1. Lorsqu'il faut resoudre un Problême dont l'équation est cubique, il faut examiner, si le Problême est plan. Pour le connoître l'on ôte d'abord les fractions & les quantitez irrationelles, s'il y en a, par l'Art. 3. Sect. 2. Part. 2. Ensuite l'on détermine tous les diviseurs exacts du dernier terme par l'Art. 2. Sect. 1. Part. 3. Enfin par la Sect. 2. Part. 3. l'on cherche si on découvrira une racine de cette équation. Si l'on trouve une racine, le Problême est plan, selon M. DESCARTES : car ou cette racine trouvée $yy - 16 = 0$ est la racine, qui donne la solution du Problême, ou elle ne l'est pas. Si elle l'est, l'on aura $y = \pm 4$, qui se peut déterminer avec la Regle & le Compas. Si elle ne l'est pas, une des deux racines du quotient $y^4 + 8yy + 4 = 0$ donnera cette solution : or cette équation étant quarrée, on en trouvera les deux racines, Liv. 1. Part. 2. Art. 1. 2. 3. par la Regle & le Compas. Ainsi quelle que soit cette racine, on n'aura besoin que de la Regle & du Compas pour le construire, & le Problême est plan.

2. L'on a montré Liv. 1. Part. 2. Art. 1. n. 1. que les équations $y^4 + 8yy + 4 = 0$, $y^4 \begin{array}{l} +2aayy + a^4 \\ -ccyy + aacc \end{array} = 0$ sont quarrées. Où l'on a remarqué qu'il faut, afin que le Problême soit plan, qu'on puisse extraire la racine quarrée non seulement de la premiere équation, mais encore du quotient, ou de la seconde équation, comme on le peut ici.

3. La premiere racine qu'on trouve par cette division, peut être ou n'être pas la racine cherchée ; de sorte qu'elle sera racine de l'équation, sans être racine du Problême. La raison de cela est, que comme on l'a

dit, Liv. 1. Part. 1. Sect. 4. Regle 10. Il n'y a jamais qu'une racine, qui donne exactement la ſolution du Problême tel qu'il eſt propoſé ; les autres racines demandent le changement de quelques circonſtances. Or comme c'eſt la racine, qui reſout exactement le Problême, que l'on cherche ſeule ; il peut arriver que la premiere diviſion en donne une autre.

En voici un Exemple, Fig. 125. ſoient données les cinq lignes paralleles entr'elles, Aa, Bb, Dd, Ee, Ff : il faut trouver un point k entre les paralleles Aa, Bb ; duquel ayant tiré les lignes kA, kB, kD, kE, kF perpendiculaires ſur les données : le parallelepipede ſous kB, kE, kF ſoit égal au parallelepipede ſous kA, kD & une donnée $BF = 4a$. Fig. 125.

On connoît la diſtance des paralleles données. Soit $BA = 8a$, $BD = 7a$, $DE = a$, $EF = 2a$, $BF = 4a$; kB, y ; donc $kA = BA - Bk$, $8a - y$; $kD = kB + BD$, $y + 7a$; $kE = kB + BE$, $y + 6a$; $kF = kB + BF$, $y + 4a$.

Par la ſuppoſition $kB \times kE \times kF = kA \times kD \times 4a$; $y^3 + 10ayy + 24aay = 4aay - 4ayy + 224a^3$; $y^3 + 14ayy + 20aay - 224a^3 = 0$. Après avoir cherché les diviſeurs exacts de $224a^3$, on trouvera, que la diviſion ne ſe fait ſans reſte, que par $y + 8a = 0$. C'eſt-à-dire que $y = -8a$, ou $-y = 8a$ eſt une racine de l'équation, & n'eſt pas la racine cherchée du Problême ; puiſque c'eſt BC qui eſt $-y = 8a$.

Le quotient de la diviſion eſt $yy + 6ay - 28aa = 0$, dont les racines ſont $y = -3a \pm \sqrt{37aa}$, & c'eſt la ſeule racine $y = -3a + \sqrt{37aa} = kB$ qui reſolve parfaitement le Problême. La troiſiéme racine $y = -3a - \sqrt{37aa}$, ou $-y = 3a + \sqrt{37aa}$ donne le point K : car les $-y$ ſe prennent en allant de Bb vers Cc.

Voyez auſſi Sect. 4. Art. 2. §. 1. Part. 4. Sect. 4. Art. 1. Ex. 1. &c.

4. Il reſte à expliquer la Methode, dont M. DESCARTES ſe ſert pour la diviſion. *A* repreſente la Methode ordinaire, *B* celle de M. DESCARTES telle qu'il l'employe ici, *C* celle de M. DESCARTES qui auroit plus de rapport à l'ordinaire.

A	B	C
144 | 1. 2.	144 | 1. 2.	144 | 1. 2.
12	12	12
2.4	— 2	+ 24
12	+ 2	1. 2
24	+ 1. 2	+ 1 2
0	12	0
	— 1	
	0	

L'on veut diviſer 144 par 12. Dans la Methode ordinaire l'on met le

diviſeur *12* ſous les premiers chifres du dividende. M. DESCARTES le met ſous les derniers chifres. Ce qui revient au même, car de quel côté que l'on commence, le diviſeur doit ſucceſſivement diviſer tout le dividende.

Dans la Methode ordinaire l'on demande combien de fois *1* premier nombre du diviſeur eſt dans la partie correſpondante du dividende. M. DESCARTES demande combien de fois *2* dernier nombre du diviſeur eſt dans la partie correſpondante *4* du dividende.

Dans la Methode ordinaire après avoir trouvé que *1* du diviſeur eſt une fois dans *1* du dividende; l'on écrit *1* dans le quotient, & cet *1*, qui vaut ici une dizaine, ſe met le premier dans le quotient, en allant de gauche à droite.

M. DESCARTES après avoir connu que *2* du diviſeur eſt contenu deux fois dans *4* du dividende; il écrit *2* dans le quotient, en allant de droite à gauche.

Dans la Methode ordinaire on multiplie tout le diviſeur *12* par le quotient *1*, le produit *12* s'écrit ſous *14* du dividende, lorſque ce produit eſt different du diviſeur; ici il eſt inutile de l'écrire; on ſouſtrait le produit *12* du dividende *14*, il reſte *2*, que l'on écrit. M. DESCARTES multiplie le diviſeur *12* par ſon quotient *2*, le produit eſt *24*, il écrit *2* ſous le dividende dans le rang des dizaines; il n'écrit pas *4* ſecond nombre du produit *24*, parceque le dernier nombre du produit doit toûjours être exactement égal au dernier nombre de ſon dividende: autrement la diviſion ne ſe feroit pas juſte.

M. DESCARTES veut qu'on écrive le ſigne contraire —, qu'on ajoûte le produit — *2* au nombre correſpondant + *4* du dividende. La ſomme eſt + *2* qu'on écrit ſous — *2*. Il ſemble que cela n'eſt fait, que pour s'écarter davantage de la maniere ordinaire: car ſi vous multipliez le diviſeur *12* par le quotient *2*, que vous écriviez le produit *24* avec ſon ſigne +, & que vous le ſouſtraiyez de *44*, il reſtera également *2* ou *20*. En effet c'eſt la même choſe, de mettre le ſigne que donne la multiplication du diviſeur par le quotient & de ſouſtraire, ou de mettre un ſigne contraire & d'ajoûter.

Dans la Methode ordinaire j'écris *4* du dividende, qui n'a pas encore été diviſé à-côté du reſte *2*, & le dividende total de la ſeconde operation eſt *24*. J'applique le diviſeur *12*, comme on voit en *A*, je demande *1* dans *2* combien de fois; c'eſt *2* que j'écris à la ſeconde place du quotient, en allant de gauche à droite; je multiplie le diviſeur *12* par ce *2* du quotient, j'écris le produit *24*, que je ſouſtrais du dividende *24*, & il ne reſte rien.

Dans *C* je deſcends *1* du dividende devant 2 qui reſte, & j'applique mon diviſeur 12; je demande 2 dans 2 combien de fois, c'eſt 1, que je

mets au quotient à la place des dixaines ; je multiplie le diviseur 12 par le nouveau quotient 1, le produit 12 s'écrit avec le signe + qui lui convient, on le soustrait du dividende, & il ne reste rien. Mais en *B* M. DESCARTES met *1* du dividende devant 2 qui restoit, ce qui fait + 12, que j'ai écrit sous le reste 2 ; il applique le diviseur 12, & demande 2 du diviseur combien de fois dans 2 du dividende ; c'est *1* qu'il écrit devant le *2* du quotient ; il multiplie *1* du diviseur par *1* du quotient, le produit + *1* se met avec un signe contraire sous *1* du dividende, & c'est — *1*, qu'il ajoûte à + *1* du dividende ; & il ne reste rien. Il ne paroît pas ici, non plus que dans la premiere operation que M. Descartes multiplie le second nombre *2* du diviseur par le quotient *2* ; mais il fait certainement cette operation, & il n'écrit pas le produit, parcequ'il doit toûjours être égal au dividende correspondant ; autrement la division exacte par ce diviseur seroit impossible.

Comparons à present l'Exemple de M. DESCARTES qui est en *D*, avec ce même Exemple en *E*, où l'on approche plus de la Methode ordinaire.

D.

$$
\begin{array}{l|l}
y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 & y^4 + 8yy + 4. \\
\quad\quad yy - 16 & \\
\quad - \quad 4yy & \\
-8y^4 - 128yy & \\
\quad yy - 16 & \\
- 8y^4 & \\
y^6 - 16y^4 & \\
yy - 16 & \\
-y^6 & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

E.

$$
\begin{array}{l|l}
y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 & y^4 + 8yy + 4 \\
\quad\quad yy - 16 & \\
\quad + 4yy - 64 & \\
- 8y^4 \quad - 128yy & \\
\quad yy \quad - \quad 16 & \\
+8y^4 \quad - 128yy & \\
y^6 - 16y^4 & \\
yy - 16 & \\
y^6 - 16y^4 & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

En *D* M. Descartes demande combien de fois *16* dans *64* ; c'est *4* ; qui se met avec + dans la derniere place du quotient. Cela se fait aussi en *E*.

En *D* l'on n'écrit pas le produit *64* du quotient *4* par le diviseur *16*, parceque ce produit doit exactement être — *64*, qui s'il étoit écrit avec un signe contraire ; & ensuite ajoûté au dividende — *64*, il ne resteroit rien. En *E* l'on pourroit de même ne pas écrire le produit — *64*, parcequ'étant soustrait du dividende — *64*, il ne reste rien.

En *D* l'on multiplie + *yy* du diviseur par + *4* du quotient, le produit + *4yy* s'écrit avec un signe contraire, & c'est — *4yy*, qui étant ajoûté à — *124yy* du dividende fait la somme de — *128yy* que l'on écrit. En *E* le produit + *4yy* s'écrit avec son signe, on le soustrait de — *124yy* du dividende, le reste est — *128yy*.

On descend $-8y^4$ du dividende, & on le place devant $-128yy$, on applique le diviseur $yy-16$; & -16 divisant $-128yy$ donne $+8yy$ pour le quotient, où on l'écrit avant $+4$. En D l'on n'écrit pas le produit $128yy$ du quotient $+8yy$ par le diviseur -16, pour la raison, qu'on a déja apportée. Mais on multiplie le diviseur $+yy$ par le quotient $+8yy$, le produit s'écrit avec un signe contraire, & c'est $-8y^4$, que l'on ajoûte à $-8y^4$ du dividende, la somme est $-16y^4$ que l'on écrit. En E le produit total $+8y^4-128yy$ s'écrit avec son signe, on fait la soustraction, le reste $-16y^4$ s'écrit.

On descend y^6 vis à-vis de $-16y^4$, la division de $-16y^4$ par -16 donne pour le premier terme du quotient $+y^4$. En D l'on n'écrit pas le produit de -16 par $+y^4$; mais le produit $+y^6$ du diviseur yy par le quotient y^4 s'écrit avec un signe contraire, & c'est $-y^6$, que l'on ajoûte à $+y^6$ du dividende, il reste 0. En E, l'on écrit avec son signe le produit $+y^6-16y^4$; qui étant soustrait du dividende $+y^6-16y^4$ le reste est 0.

Le diviseur $yy-16=0$ est donc une racine de l'équation $y^6-8y^4-124yy-64=0$, & cette racine est $yy=16$, qui contient deux valeurs $y=\pm 4$. Les autres racines de l'équation sont contenuës dans le quotient $y^4+8yy+4=0$, & sont $yy=-4\pm\sqrt{12}$ toutes deux fausses, & se reduisent la premiere à $y=\pm\sqrt{-4+\sqrt{12}}$, la seconde à $y=\pm\sqrt{-4-\sqrt{12}}$ toutes quatre imaginaires. Ainsi l'on voit que l'équation proposée, parceque sa haute puissance y^6 à six dimensions, contient six racines ou six valeurs de y.

Faisons encore la division du second Exemple de M. Descartes. Pour plus grande facilité j'écris 1 sur les quantitez du dividende qui servent à la premiere operation, 2 sur celles qui servent à la seconde, &c. je fais le même sur les differentes quantitez des restes. J'écris encore 1 sur la partie du dividende qui vient de la premiere operation, 2 sur celle qui vient de la seconde, &c.

$$\begin{array}{llllllll} 5. & 3. & 4. & 1. & 4. & 1. & 1. & 2. \\ y^6 & +aay^4 & -2ccy^4 & -a^4yy & +c^4yy & -a^6 & -2a^4cc & -aac^4=0. \\ & & & +\ \ yy & & -aa & -\ \ cc & \\ & & & \underline{-a^4yy} & & \underline{+a^6} & \underline{+\ a^4cc} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & 3. & & & 2. & 2. \\ \text{1. reste} & -2a^4yy & & 0 & -a^4cc & -aac^4 \\ & & +\ yy & & \mp\ aa & -\ \ cc \\ & & \underline{-aaccyy} & & \underline{+a^4cc} & \underline{+aac^4} \\ & & & & 0 & 0 \end{array}$$

3.	3.	3.	
$+ aay^4$	$- 2a^4yy$	$- aaccyy$	2. reste.
yy	$- aa$	$- cc$	
$- 2aay^4$	$+ 2a^4yy$	$+ 2aaccyy$	

5.		4.	
$- aay^4$	0	$+ aaccyy$	3. reste.

4.		4.
$- 2ccy^4$		$+ c^4yy$
$+ yy$	$- aa$	$- cc$
$+ ccy^4$	$- aaccyy$	$- c^4yy$

5.	5.	5.			
$+ y^6$	$- aay^4$	$- ccy^4$	0	0	4. reste.
$yy -$	aa	$- cc$			
$- y^6$	$+ aay^4$	$+ ccy^4$			
0	0	0			

Quotient $\overset{5.}{y^4} \overset{4.}{- ccyy} \overset{3.}{+ 2aayy} \overset{2.}{+ aacc} \overset{1.}{+ a^4}$.

Pour la premiere Operation j'applique le diviseur $yy - aa - cc$ sous $- a^4yy - a^6 - 2a^4cc$; & $- aa$ divisant $- a^6$, le quotient est $+ a^4$. Le produit du quotient par le diviseur est $+ a^4yy - a^6 - a^4cc$, que j'écris avec des signes contraires, & c'est $- a^4yy + a^6 + a^4cc$, qui étant ajoûté au dividende correspondant, la somme est $- 2a^4yy - a^4cc$, que j'écris comme premier reste.

Pour la seconde Operation je descends $- aac^4$ du dividende, j'applique le diviseur, & $- aa$ divisant $- a^4cc$ donne $+ aacc$ pour le quotient. Le produit de ce quotient par le diviseur est $+ aaccyy - a^4cc - aac^4$, qui étant écrit avec des signes contraires, & ajoûté au dividende $- a^4cc - aac^4$, la somme est $- aaccyy$ second reste.

Pour la troisiéme Operation je descends $+ aay^4$ du dividende, $- 2a^4yy$ du premier reste. J'applique le diviseur, & $- aa$ divisant $- 2a^4yy$ donne pour quotient $+ 2aayy$. Le produit de ce quotient par le diviseur est $+ 2aay^4 - 2a^4yy - 2aaccyy$, qui étant écrit avec des signes contraires, & ajoûté au dividende $+ aay^4 - 2a^4yy + 2aaccyy$, la somme est $- aay^4 + aaccyy$ que j'écris comme troisiéme reste.

Pour la quatriéme Operation à $+ aaccyy$ du troisiéme reste je joins $- 2ccy^4$ & c^4yy du premier dividende. J'applique le diviseur, & $- aa$ divisant $+ aaccyy$ donne pour quotient $- ccyy$. Le produit de ce quo-

tient par le diviſeur eſt $- ccy^4 + aaccyy + c^4yy$, que j'écris après en avoir changé les ſignes, c'eſt $+ ccy^4 - aaccyy - c^4yy$, que j'ajoûte à ſon dividende, la ſomme eſt $- ccy^4$ quatriéme reſte.

Pour la cinquiéme Operation à ce reſte $- ccy^4$ l'on joint $+ y^6$ du premier dividende & $- aay^4$ du troiſiéme reſte. On applique le diviſeur, & $- aa$ diviſant $- aay^4$ donne $+ y^4$ pour quotient. Le produit de ce quotient par le diviſeur produit $+ y^6 - aay^4 - ccy^4$, on l'écrit après avoir changé ſes ſignes, on l'ajoûte à ſon dividende, la ſomme eſt o. Et la diviſion eſt juſte.

Le diviſeur $yy - aa - cc = o$ eſt donc une racine de la propoſée, ou $yy = aa + cc$, qui a deux valeurs $y = \pm \sqrt{aa + cc}$. Les autres racines ſont contenuës dans le quotient $y^4 - ccyy + 2aayy + aacc + a^4 = o$, ou $y^4 - ccyy + 2aayy + a^4 = - aacc$: ajoûtez de chaque côté $\frac{1}{4}c^4 - aacc$, vous ferez $y^4 - ccyy + 2aayy + \frac{1}{4}c^4 - aacc + a^4 = \frac{1}{4}c^4 - 2aacc$, dont les racines ſont $yy = \frac{1}{2}cc - aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4 - 2aacc}$, qui ſe reduiſent à $y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}cc - aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - 2aacc}}$.

Ainſi l'équation propoſée, qui a y^6 pour haute puiſſance contient ſix racines.

Dans toutes les racines de ces deux Exemples, l'on n'a que des extractions de racines quarrées à faire; ces extractions ne demandent que la Regle & le Compas, comme on l'a enſeigné, Liv. 1. Part. 2. Ainſi les Problêmes ſeront plans.

5. La preuve que M. Deſcartes donne de ſa diviſion eſt la multiplication, ce qui convient à toutes ſortes de Methodes: en effet, ſi l'on multiplie le diviſeur par le quotient, le produit doit être le dividende même, lorſque la diviſion a été bien faite. Au reſte je n'ai vû perſonne, qui ait ſuivi cette Methode de M. Deſcartes.

6. Il ne faut pas omettre la remarque de M. Deſcartes touchant le choix des diviſeurs. Il dit que parmi les diviſeurs du dernier terme de l'équation litterale, dont nous venons de parler, il ne faut choiſir que aa & $aa + cc$, & qu'il ſuffit de tenter la diviſion avec ces deux là; parceque les autres donnent plus ou moins de dimenſions dans le quotient, qu'il n'y en a dans la quantité connuë du penultiéme terme, empêcheroient que la diviſion ne s'y pût faire. Il eſt vrai, que $aa + cc$ diviſant le dernier terme $- a^6 - 2a^4cc - aac^4$ donne au quotient a^4 égal à la quantité connuë du penultiéme terme $- a^4yy$, & que ſi l'on diviſoit par a, le quotient ſeroit a^5 plus grand que la quantité connuë a^4, du penultiéme terme; & que ſi l'on diviſoit $a^3 + acc$, le quotient a^3 ſeroit plus petit que cette même quantité.

Cette remarque n'eſt pourtant pas univerſelle: car dans l'équation $x^4 +$

ax^3

$$ax^3 \begin{array}{l} + aaxx \\ - a^4xx \end{array} - a^5x - a^6 = 0.$$ Si l'on a $x - aa = 0$, ou $x + aa = 0$ pour diviſeur & qu'on applique $\pm\ aa$ ſous $- a^6$, le quotient ſera a^4 moindre que la quantité connuë du penultiéme terme $- a^5 x$, & cependant la diviſion ſe fera juſte, puiſque les racines de l'équation ſont $x - aa = 0$, $x + aa = 0$, $x + \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x + \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$.

Il en ſeroit de même ſi l'on diſoit dans la Methode ordinaire, que tout diviſeur du dernier terme, qui a plus ou moins de dimenſions que la quantité connuë du ſecond terme, ne doit pas être pris ; puiſqu'ici aa qui diviſe exactement la propoſée, a plus de dimenſions, que la quantité connuë du ſecond terme ax^3.

ARTICLE II.

La reduction des Equations cubiques, lorſque le Problême eſt ſolide.

M. DESCARTES.

MAis lorſqu'on ne trouve aucun binome, qui puiſſe ainſi diviſer toute la ſommè de l'équation propoſée, il eſt certain, que le Problême, qui en dépend, eſt ſolide. Et ce n'eſt pas une moindre faute après cela, de tâcher à le conſtruire, ſans y employer que des cercles & des lignes droites, que ce ſeroit d'employer des Sections coniques à conſtruire ceux, auſquels on n'a beſoin que de cercles. Car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance, s'appelle faute.

Lorſqu'une équation cubique ne peut pas être diviſée par un binome, elle ne peut pas être abaiſſée à une équation du ſecond degré. Lorſqu'une équation n'eſt pas du ſecond degré, ou de celles qu'on peut regarder comme du ſecond degré, je ne puis pas extraire une racine quarrée. Et comme c'eſt pour une telle racine, qu'on employe la Regle & le Compas, je ne m'en puis plus ſervir pour la reſolution de mon Problême, qui deſlors n'eſt pas un Problême plan.

Mais comme une équation cubique ne demande au plus que l'extraction d'une racine cubique, & que les Sections coniques donnent cette extraction ; le Problême ſera ſolide, puiſqu'un Problême ſolide eſt celui pour la conſtruction duquel il ne faut au plus que des Sections coniques. L'on verra Part. 4. Sect. 1. Art. 12. comment on extrait la racine cubique par le moyen des Sections coniques.

On a parlé Part. 1. Sect. 2. des lignes, dont il faut se servir pour la construction d'un Problême.

SECTION IV.

ARTICLE I.

La reduction des Equations de quatre dimensions, lorsque le Probléme est plan : & quels sont ceux, qui sont solides.

M. DESCARTES.

QUe si on a une équation dont la quantité inconnuë ait quatre dimensions, il faut en même façon, après en avoir ôté les nombres sours, & rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binome, qui divise toute la somme, en le composant de l'une des quantitez, qui divisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve un, ou bien la quantité connuë de ce binome est la racine cherchée ; ou du moins après cette division, il ne reste en l'équation, que trois dimensions, ensuite dequoi il faut derechef l'examiner en la même sorte.

Mais lorsqu'il ne se trouve point de tel binome, il faut en augmentant ou diminuant la valeur de la racine, ôter le second terme
*Part 2. Sect. 2. Art. 3. de la somme, en la façon tantôt expliquée. * Et après la reduire à une autre, qui ne contienne que trois dimensions. Ce qui se fait en cette sorte. Au lieu de $x^4 . * pxx . qx . r . = 0$, il faut écrire

$$+ y^6 . 2py^4 \begin{matrix} + pp \\ . 4r \end{matrix} yy - qq = 0.$$

Et pour les signes + ou — que j'ai omis, s'il y a eu $+ p$ en la precedente équation, il faut mettre en celle-ci $+ 2p$; ou s'il y a eu $- p$, il faut mettre $- 2p$; & au contraire s'il y a eu $+ r$, il faut mettre $- 4r$; ou s'il y a eu $- r$, il faut mettre $+ 4r$; & soit qu'il y ait eu $+ q$, ou $- q$, il faut toûjours mettre $- qq$, & $+ pp$. Au moins si on suppose que x^4, & y^6 sont marquez du signe + ; car ce seroit tout le contraire, si on y supposoit le signe —.

1. L'équation $x^4. * pxx. qx. r. = o.$ represente toute équation de quatre dimensions, qui n'a ni incommensurables, ni fractions ; dont le premier terme n'est multiplié que par l'unité, le second est évanoüi, p represente les quantitez connuës, qui multiplient xx au troisiéme terme, q celles qui multiplient x au quatriéme terme, r celles qui composent le dernier terme. Les signes $+$ & $-$ ont été omis, parcequ'ils peuvent être indifferemment partout, excepté devant x^4, où l'on suppose $+$.

2. Regardons l'équation $x^4 *. pxx. qx. r = o.$ Comme produite par deux autres du second degré $xx + yx + z = o$, $xx - yx + v = o$. On met $+yx$ dans l'une, $-yx$ dans l'autre, afin que le second terme soit nul dans le produit de ces deux équations, les signes qui sont devant z & v peuvent être tels que l'on voudra. Ce produit est $x^4 * \begin{matrix} + zxx \\ - yyxx \\ + vxx \end{matrix} \begin{matrix} \\ - yzx \\ + vyx \end{matrix}$ $+ vz = o.$ que l'on suppose égal à la proposée, de sorte que chaque terme de l'une soit égal à chaque terme de l'autre, & que l'on puisse comparer & égaler chaque terme de l'une à chaque terme de l'autre.

3. Que la proposée soit $x^4 * + pxx - qx + r = o.$ Comparons les troisiémes termes, il viendra $z = p + yy - v.$

Les quatriémes, il viendra $v = \frac{-q}{y} + z$; & pour z substituant sa valeur déja trouvée, $v = \frac{-q}{2y} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy.$ Et mettant cette valeur de v dans $z = p + yy - v$, l'on fait $z = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y}.$

Les cinquiémes termes $+ vz = + r.$ Pour v & z substituons leur valeur, ce sera $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}y^4 - \frac{qq}{4yy} = r.$

Multiplions tout par $4yy$, le produit est $y^6 + 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ - 4ryy \end{matrix} - qq = o$, qui est la transformée.

On voit qu'il y a dans la proposée $+ pxx$, & dans la transformée $+ 2py^4$; qu'il y a $+ r$ dans la proposée, & $- 4ryy$ dans la transformée ; qu'il y a $- qx$ dans la proposée, & $+ ppyy - qq$ dans la transformée.

4. Que la proposée soit $x^4 * - pxx + qx - r = o.$

La comparaison des troisiémes termes donne $z = - p + yy - v.$

Des quatriémes, $v = \frac{q}{y} + z$ & pour z mettant sa valeur, il vient $v = \frac{q}{2y} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy$; & mettant cette valeur de v dans $z = - p + yy - v$, l'on fait $z = - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y}.$

Des cinquiémes termes, $+ vz = - r.$ Pour v & z substituons leur valeur ; c'est $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}y^4 - \frac{qq}{4yy} = - r.$ Multiplions tout par $4yy$; le produit est $y^6 - 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ + 4ryy \end{matrix} - qq = o$, qui est la reduite.

On voit qu'il y a $-pxx$ dans la proposée, & $-2py^4$ dans la reduite ; qu'il y a $-r$ dans la proposée, & $+4ryy$ dans la reduite ; qu'il y a $+qx$ dans la proposée, & $+ppyy-qq$ dans la reduite.

5. Soit la proposée $x^4 * -pxx-qx+r=0$. La transformée sera

$$y^6 - 2py^4 \begin{matrix} +ppyy \\ \\ -4ryy \end{matrix} -qq = 0.$$

On voit qu'il y a $-pxx$ dans la proposée, & $-2py^4$ dans la transformée, qu'il y a $+r$ dans la proposée ; & $-4ryy$ dans la transformée ; qu'il y a $-qx$ dans la proposée, & $+ppyy-qq$ dans la transformée.

6. Quels que soient les signes de la proposée $x^4 * \; pxx \; . \; qx . \; r = 0$, pourveu que l'on ait $+x^4$, & que la transformée ait aussi $+y^6$; on trouvera, ainsi que M. DESCARTES l'assure, que s'il y a $+p$ dans la proposée, il faudra mettre $+2p$ dans la transformée ; s'il y a $-p$ dans la proposée, il faut mettre $-2p$ dans la transformée ; s'il y a $+r$ dans la proposée, il faut mettre $-4r$ dans la transformée ; s'il y a $-r$ dans la proposée, il faut mettre $+4r$ dans la transformée ; & que toûjours il faut mettre $-qq+pp$ dans la transformée.

Mais si l'on suppose $-x^4$, il est certain que l'équation qui étoit $x^4 * -pxx+qx-r=0$ se changera en $-x^4 * +pxx-qx+r=0$; & que la transformée de la premiere aura tous les signes changez.

7. J'ai dit n. 2. que l'on pouvoit mettre indifferemment $+$ ou $-z$, $+$ ou $-v$ dans les équations du second degré $xx+yx-z=0$, $xx-yx-v=0$. En effet supposons les telles, qu'on vient de les écrire, leur produit est

$$x^4 * \begin{matrix} -zxx \\ -yyxx \\ -vxx \end{matrix} \begin{matrix} +yzx \\ -vyx \\ \; \end{matrix} + vz = 0.$$

Prenons à present l'équation de n. 3. $x^4 * +pxx-qx+r=0$. La transformée sera la même que n. 3.

M. DESCARTES.

Par Exemple si on a $+x^4 * -4xx-8x+35=0$, il faut écrire en son lieu $y^6-8y^4-124yy-64=0$. Car la quantité que j'ai nommée p étant -4, il faut mettre $-8y^4$ pour $2py^4$, & celle que j'ai nommée r étant 35, il faut mettre $\begin{matrix} +16 \\ -140 \end{matrix} yy$ c'est-à-dire $-124yy$; au lieu de $\begin{matrix} +pp \\ -4r \end{matrix} yy$; & enfin q étant 8, il faut mettre -64 pour $-qq$.

Tout de même au lieu de $x^4 * -17xx-20x-6=0$, il faut

écrire $+y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$. Car 34 est double de 17, & 313 en est le quarré joint au quadruple de 6, & 400 est le quarré de 20.

Tout de même aussi au lieu de $z^4 * \begin{array}{l}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{array} zz \begin{array}{l}-a^3\\-acc\end{array} z \begin{array}{l}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{array} = 0$;

il faut écrire $y^6 \begin{array}{l}+aa\\-2cc\end{array} y^4 \begin{array}{l}-a^4\\+c^4\end{array} yy \begin{array}{l}-a^6\\-aac^4\end{array} - 2a^4cc = 0$. Car p est $\frac{1}{2}aa - cc$, & pp est $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, & $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$, & enfin $-qq$ est $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

8. La transformée de $x^4 * - 4xx + 8x + 35 = 0$, ou de $x^4 * - pxx - qx + r = 0$ est $y^6 - 2py^4 \begin{array}{l}+ppyy\\-4ryy\end{array} - qq = 0$, ou $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$.

La transformée de $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$, ou de $x^4 * - pxx - qx - r = 0$ est $y^6 - 2py^4 \begin{array}{l}+ppyy\\+4ryy\end{array} - qq = 0$, ou $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$.

Dans l'équation $z^4 \begin{array}{l}+\frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5}{16}a^4\\-\ \ ccz z - accz - \frac{1}{4}aacc\end{array} = 0$, il faut supposer $cc > \frac{5}{4}aa$; donc $aacc > \frac{5}{4}a^4$, $\frac{1}{4}aacc > \frac{5}{16}a^4$; & le dernier terme $+\frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc$ est negatif $= -r$, & $r = \frac{1}{4}aacc - \frac{5}{16}a^4$. $+4r = +aacc - \frac{5}{4}a^4$. De plus si $cc > \frac{5}{4}aa$, donc $cc > \frac{1}{2}aa$, & le second terme $+\frac{1}{2}aa - cc$ est negatif $= -p$, & $p = cc - \frac{1}{2}aa$. L'équation proposée est donc $z^4 * - pzz - qz - r = 0$, dont la transformée est $y^6 - 2py^4 \begin{array}{l}+ppyy\\+4ryy\end{array} - qq = 0$, c'est-à-dire $y^6 \begin{array}{l}+aay^4 - a^4yy\\-2ccy^4 + c^4yy\end{array} - a^6 - 2a^4cc - aac^4 = 0$. Car $+pp + 4r = \frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4 + aacc - \frac{5}{4}a^4 = -a^4 + c^4$.

M. DESCARTES.

Après que l'équation est ainsi reduite à trois dimensions, il faut chercher la valeur de yy par la Methode déja expliquée;* * Sect. 3.3

& ſi elle ne peut être trouvée, on n'a point beſoin de paſſer outre, car il ſuit de là infailliblement que le Problême eſt ſolide. Mais ſi on la trouve, on peut diviſer par ſon moyen la precedente équation en deux autres, en chacune deſquelles la quantité inconnuë n'aura que deux dimenſions, & dont les racines ſeront les mêmes que les ſiennes. A ſavoir au lieu de $x^4 * . pxx . qx . r. = 0$, il faut écrire ces deux autres $+ xx - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} = 0$, & $xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} = 0$. Et pour les ſignes + & — que j'ai omis, s'il y a $+ p$ en l'équation precedente, il faut mettre $+ \frac{1}{2}p$ en chacune de celles-ci, & $- \frac{1}{2}p$ s'il y a en l'autre $- p$. Mais il faut mettre $+ \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $- yx$; & $- \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+ yx$, lorſqu'il y a $+ q$ en la premiere. Et au contraire s'il y a $- q$, il faut mettre $\frac{-q}{2y}$ en celle où il y a $- yx$; & $+ \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+ yx$. Enſuite dequoi il eſt aiſé de connoître toutes les racines de l'équation propoſée, & par conſequent de conſtruire le Problême; dont elle contient la ſolution, ſans y employer que des cercles, & des lignes droites.

9. Nous avons dit n. 2. que l'équation du quatriéme degré $x^4 * \begin{matrix} + zxx \\ - yyxx \\ + vxx \end{matrix} \begin{matrix} - yzx \\ + vyx \end{matrix} + vz = 0$, qui eſt le produit des deux équations du ſecond degré $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + v = 0$, étoit tellement égale à la propoſée $x^4 * . pxx . qx . r = 0$, que l'on pouvoit les égaler terme à terme, de la maniere qu'on l'a fait, n. 3. 4. 5. Dans la transformée $y^6 . 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ . 4ryy \end{matrix} - qq$, qui en reſulte, la valeur de y eſt la même que dans $x^4 * \begin{matrix} + zxx \\ - yyxx \\ + vxx \end{matrix} \begin{matrix} - yzx \\ - vyx \end{matrix} + vz = 0$, & la même par conſequent que dans les équations $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + v = 0$. C'eſt pourquoi ſi je puis connoître la valeur de y dans la transformée, j'aurai les valeurs de v & de z, qui ne contiennent n. 3. 4. 5. d'autre inconnuë que y; & dès que j'aurai ſubſtitué ces valeurs de z & de v dans $xx + yx +$

$z = o$, $xx - yx + v = o$. Ces équations n'auront plus d'inconnuë que x; & parcequ'elles sont du second degré, l'on découvrira la valeur de x avec la Regle & le Compas Liv. 1. Part. 2. & le Problême est plan.

10. De là M. DESCARTES conclud, que si je ne puis pas trouver la valeur de y dans la transformée $y^6 . 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ \\ . 4ryy \end{matrix} - qq = o$ par la Methode de Sect. 3. le Problême est solide. Et alors on revient à l'équation proposée $x^4 * . pxx . qx . r = o$, que l'on construit, comme on l'enseignera, Part. 4. Sect. 1. Art. 2.

11. Mais si la transformée fait connoître l'inconnuë y, l'on n'a plus besoin de s'arrêter à la proposée $x^4 * . pxx . qx . r = o$. Mais aux deux $xx + yx + z = o$, $xx - yx + v = o$, qui sont les racines de l'équation $x^4 * \begin{matrix} + zxx \\ - yyxx \\ + vxx \end{matrix} \begin{matrix} - yzx \\ \\ + vyx \end{matrix} + vz$, qui est supposée égale à $x^4 * . pxx . qx . r = o$, c'est-à-dire qu'il faut considerer les deux racines de cette proposée, qui se changent en ces deux $xx - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} = o$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} = o$. Ce qui se fait, comme on va le montrer, en substituant pour z & v leur valeur.

La proposée est n. 3. $x^4 * + pxx - qx + r = o$, $v = \frac{-q}{2y} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy$, $z = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y}$. Substituez ces valeurs de z & de v à leur place dans $xx - yx + v = o$, $xx + yx + z = o$, vous aurez $xx - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \frac{-q}{2y}$, $xx + xy + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$. L'on doit observer qu'il y a $+ p$ dans la proposée, & $+ \frac{1}{2}p$ dans chacune de ces deux reduites; qu'il y a $- q$ dans la proposée, $\frac{-q}{2y}$ dans celle, où il y a $- xy$, & $\frac{+q}{2y}$ dans celle où il y a $+ xy$; qu'il y a $+ \frac{1}{2}yy$ dans les deux.

La proposée est n. 4. $x^4 * - pxx + qx - r = o$, $v = \frac{q}{2y} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy$, $z = - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y}$. Substituez ces valeurs de v & de z dans $xx - yx + v = o$, $xx + yx + z = o$. Vous aurez $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p \frac{-q}{2y}$. L'on observera qu'il y a $- p$ dans la proposée, & $- \frac{1}{2}p$ dans chacune des deux reduites; qu'il y a $+ q$ dans la proposée, & qu'il y a $\frac{+q}{2y}$ dans celle qui a $- xy$, & $- \frac{q}{2y}$ dans celle qui a $+ xy$; qu'il y a $+ \frac{1}{2}yy$ dans chacune.

Quelqu'autre proposée que l'on examine, l'on trouvera qu'il faut placer les signes + & —, comme M. Descartes l'a determiné.

12. Après avoir formé ces deux reduites, on les égale à zero, & l'on en extrait les racines quarrées. Par exemple si l'on a 1° $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = o$; $x = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{- \frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}p \frac{-q}{2y}}$. Si l'on a 2° $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = o$; $x = - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{- \frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}}$. Et par ce

moyen l'on a les quatre valeurs de x, non seulement dans ces deux dernieres reduites, mais dans la proposée x^4, &c. c'est ce que M, Descartes va prouver par des Exemples.

M. DESCARTES.

Par exemple à cause que faisant $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$, pour $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$, on trouve que yy est 16, on doit au lieu de cette équation $+ x^4 - 17xx - 20x - 6 = 0$, écrire ces deux autres $+ xx - 4x - 3 = 0$, & $xx + 4x + 2 = 0$. Car y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20, de façon que $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait $- 3$, & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait $+ 2$. Et tirant les racines de ces deux équations, on trouve toutes les mêmes, que si on les tiroit de celle, où est x^4; à sçavoir on en trouve une vraye, qui est $\sqrt{7} + 2$, & trois fausses, qui sont $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.

13. Divisez $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$ par $yy - 16 = 0$, la division est juste, & le quotient est $y^4 - 18yy + 25 = 0$.

L'équation $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$, ou $x^4 * - pxx - qx - r = 0$ demande les reduites $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$, dans lesquelles on met $- \frac{1}{2}p$, parceque dans la proposée il y a $- pxx$ ou $- 17xx$; on met $- \frac{q}{2y}$ dans celle où il y a $- yx$, & $+ \frac{q}{2y}$ dans celle où il y a $+ yx$, parceque dans la proposée il y $- q$ ou $- 6$.

Etant donc $yy - 16 = 0$, $y = 4$, $\frac{1}{2}yy = 8$, $p = 17$, $q = 20$, $\frac{q}{2y} = \frac{5}{2}$, $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = - 3$; $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 2$; l'équation $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$ est $xx - 4x - 3 = 0$; $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$ est $xx + 4x + 2 = 0$.

Extrayez les racines de $xx - 4x - 3 = 0$, elles sont $x = 2 + \sqrt{7}$ racine vraye, $x = 2 - \sqrt{7}$ racine fausse; extrayez les racines de $xx + 4x + 2 = 0$, elles sont $x = - 2 + \sqrt{2}$, $x = - 2 - \sqrt{2}$ toutes deux fausses.

Ces trois racines fausses sont exprimées d'une maniere positive dans le Livre de M. Descartes. $2 - \sqrt{7}$ est exprimée $- 2 + \sqrt{7}$, ou $\sqrt{7} - 2$, comme en cette équation $x - 2 + \sqrt{7} = 0$; $- 2 + \sqrt{2}$ est exprimée $+ 2 - \sqrt{2}$, comme si c'étoit $x + 2 - \sqrt{2} = 0$; $- 2 - \sqrt{2}$ est exprimée $+ 2 + \sqrt{2}$, comme si c'étoit $x + 2 + \sqrt{2} = 0$.

14. Ces quatre racines sont les mêmes, qu'on tireroit de la proposée $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$. Puisque en les multipliant on produit la proposée & qu'en divisant la proposée, 1° par la racine vraye, 2° par deux fausses

fausses l'une après l'autre, il ne reste rien que la derniere racine fausse $x + 2 + \sqrt{2} = 0$.

15. Nous avons dit n. 13. que la division de $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$ par $yy - 16 = 0$ donne le quotient $y^4 - 18yy + 25 = 0$, donc $yy = 9 \pm \sqrt{56}$; $y = \pm\sqrt{9 \pm \sqrt{56}}$. Si l'on met ces valeurs de yy & de y dans les deux équations $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$; on aura d'autres valeurs de x, par exemple la premiere $xx - x\sqrt{9 + \sqrt{56}} = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{56} + \frac{10}{\sqrt{9+\sqrt{56}}}$ en ajoûtant dans chaque membre $\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{56}$, donne $x = \frac{1}{2}\sqrt{9 + \sqrt{56}} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{56} + \frac{10}{\sqrt{9+\sqrt{56}}}}$.

M. DESCARTES.

Ainsi ayant $x^4 * - 4xx - 8x + 35 = 0$, pourceque la racine de $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$ est derechef 16, il faut écrire $xx - 4x + 5 = 0$, & $xx + 4x + 7 = 0$. Car ici $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait 5, & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait 7. Et pourcequ'on ne trouve aucune racine ni vraye ni fausse en ces deux dernieres équations; on connoît de là, que les quatre de l'équation, dont elles procedent, sont imaginaires; & que le Problême pour lequel on l'a trouvée, est plan de sa nature; mais qu'il ne sauroit en aucune façon être construit, à cause que les quantitez données ne peuvent se joindre.

16. L'on a vû n. 8. que la transformée de $x^4 * - 4xx - 8x + 35 = 0$ ou de $x^4 * - pxx - qx + r = 0$ est $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, qui peut être divisée juste par $yy - 16 = 0$, & le quotient est $y^4 + 8yy + 4 = 0$.

Les deux équations du second degré seront $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$; dans chacune il y a $-\frac{1}{2}p$, parceque dans la proposée il y a $-p$; dans celle, où il y a $-yx$, l'on a mis $\frac{-q}{2y}$, & $\frac{+q}{2y}$ dans celle, où il y a $+yx$, parceque dans la proposée il y a $-qx$.

Après qu'on aura substitué 16 pour yy, 4 pour y, ces deux équations se reduisent à $xx - 4x + 5 = 0$; $xx + 4x + 7 = 0$. Or les deux racines de $xx - 4x + 5 = 0$ sont $x = -2 \pm \sqrt{-1}$, & les deux de $xx + 4x + 7 = 0$ sont $x = -2 \pm \sqrt{-3}$, toutes quatre imaginaires.

Les racines du quotient $y^4 + 8yy + 4 = 0$. sont $yy = -4 \pm \sqrt{12}$; $y = \pm\sqrt{-4 \pm \sqrt{12}}$, qui sont aussi toutes imaginaires.

Tout de même ayant $z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix}\, zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix}\, z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} = 0$, pourcequ'on trouve $aa + cc$ pour yy, il faut écrire $zz - \sqrt{aa+cc}\,z + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, & $zz + \sqrt{aa+cc}\,z + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$. Car y est $\sqrt{aa+cc}$, & $\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ est $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ est $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. D'où on connoît que la valeur de z est $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, ou bien $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Et pourceque nous avions fait ci-dessus $z + \frac{1}{2}a = x$, nous aprenons que la quantité x, pour la connoissance de laquelle nous avons fait toutes ces Operations est $+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

17. On a vû n. 8. que la transformée de $z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aazz \\ -cczz \end{matrix} \begin{matrix} -a^3z \\ -accz \end{matrix} \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} = 0$ est $y^6 \begin{matrix} +aay^4 \\ -2ccy^4 \end{matrix} \begin{matrix} -a^4yy \\ +c^4yy \end{matrix} \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix} = 0$. & Sect. 3. Art. 1. n. 4. qu'une des racines de cette transformée est $yy - aa - cc = 0$, $yy = aa + cc$, $y = \pm\sqrt{aa+cc}$.

Comme la proposée peut s'exprimer par $z^4 * - pzz - qz - r = 0$, les deux équations du second degré seront $zz - yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$; ou la premiere $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$; la seconde $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$. Et parceque si l'on multiplie, ou si l'on divise le numerateur & le denominateur d'une fraction par une même quantité, la valeur de la fraction ne change pas, je multiplie le numerateur & le denominateur de $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ par $\sqrt{aa+cc}$, le produit est $\frac{a^3\sqrt{aa+cc} + acc\sqrt{aa+cc}}{2aa + 2cc}$; je divise le numerateur & le denominateur de ce produit par $aa + cc$, le quotient est $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, que je mets à la place de $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ dans les

deux équations precedentes, ce qui fait $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$.

18. Maintenant pour avoir les valeurs de z, j'arrange la premiere équation ainsi $zz - z\sqrt{aa+cc} = -\frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, & je trouve $z = \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, qui sont les deux valeurs de z, que M. Descartes donne.

De l'autre équation $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, je tirerai de la même maniere $z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, deux autres valeurs de z.

19. Enfin parceque Part. 2. Sect. 2. Art. 3. l'on a fait $z + \frac{1}{2}a = x$, $z = x - \frac{1}{2}a$ je substituë la valeur de z à sa place, après avoir changé $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ en $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$. Ce qui fait ces quatre valeurs de x.

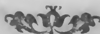
$$z = x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$
$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$
$$z = x - \frac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$
$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

Celle dont M. Descartes se servira est la seconde, à savoir $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Les deux premieres racines sont toûjours réelles parceque dans $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$ est $>$ que $\frac{1}{2}aa$; en effet le quarré $\frac{1}{16}c^4 + \frac{1}{4}acc\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}aacc > \frac{1}{4}a^4$.

Afin que les deux dernieres racines soient réelles, il faut que $cc > 8aa$, $c > \sqrt{8aa}$. Car l'on a $\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, ainsi il faut que $\frac{1}{4}cc > \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, $cc - 2aa > 2a\sqrt{aa+cc}$, & en les quarrant $c^4 > 8aacc$, $cc > 8aa$. Mais lorsque cc sera moindre que $8aa$, ce qui est sous le signe radical, deviendra negatif, & la racine sera imaginaire. Lorsque $cc = 8aa$, ce qui est sous le signe radical, sera nul, & les deux dernieres racines se reduiront à $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$.

De plus quand ces quatre valeurs de x sont réelles, la premiere est évidemment positive, puisque tous les termes ont $+$. La seconde est aussi positive, c'est-à-dire $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} > \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; ce qui se voit en quarrant les deux membres; la troisiéme est fausse, ce qui se prouve de la même maniere. La quatriéme est encore fausse parceque les deux termes qui ont le signe $-$ sont plus grands que $\frac{1}{2}a$.



ARTICLE II.

Exemple de ces ſortes de Reductions.

M. DESCARTES.

MAis afin qu'on puiſſe mieux connoître l'utilité de cette Regle, il faut que je l'applique à quelque Problême.

Si le quarré AD, & la ligne BN étant donnez, il faut prolonger le côté AC juſques à E, en ſorte que EF tirée de E vers B ſoit égale à BN. On apprend de Pappus, qu'ayant premierement prolongé BD juſques à G, en ſorte que DG ſoit égale à DN, & ayant décrit un cercle dont le diametre ſoit BG, ſi on prolonge la ligne droite AC, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne ſauroient point cette conſtruction, elle ſeroit aſſez difficile à rencontrer, & en la cherchant par la Methode ici propoſée, ils ne s'aviſeroient jamais de prendre DG pour la quantité inconnuë, mais plûtôt CF ou FD, à cauſe que ce ſont elles, qui conduiſent le plus aiſément à l'équation : & lors ils en trouveroient une, qui ne ſeroit pas facile à démêler, ſans la Regle que je viens d'expliquer. Car poſant a pour BD ou CD, & c pour EF, & x pour DF, on a $CF = a - x$; & comme CF ou $a - x$, eſt à FE ou c, ainſi FD ou x, eſt à BF, qui par conſequent eſt $\frac{cx}{a-x}$. Puis à cauſe du triangle rectangle BDF, dont les côtez ſont l'un x, & l'autre a, leurs quarrez qui ſont $xx + aa$ ſont égaux à celui de la baſe qui eſt $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$, de façon que multipliant le tout par $xx - 2ax + aa$, on trouve que l'équation eſt $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = ccxx$, ou bien $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 = 0$. Et on connoît par les Regles precedentes, que ſa racine, qui eſt la longueur de la ligne DF, eſt $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

Que ſi on poſoit BF, ou CE, ou BE par la quantité inconnuë, on viendroit derechef à une équation, en laquelle il y auroit quatre

dimensions, mais qui seroit plus aisée à demêler, & on y viendroit assez aisément ; au lieu que si c'étoit DG qu'on supposât, on viendroit beaucoup plus difficilement à l'équation, mais aussi elle seroit très-simple. Ce que je mets ici pour vous avertir, que lorsque le Problême proposé n'est point solide, si en le cherchant par un chemin on vient à une équation fort composée, on peut ordinairement venir à une plus simple, en le cherchant par un autre.

§. 1. *Lorsque* DF *est l'inconnuë.*

1. Les triangles CEF, BFD sont équiangles ; donc CF, $a - x : EF$, $c :: FD$, $x : BF$, $\frac{cx}{a-x}$.

De plus le triangle BDF rectangle en D donne $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$, c'est-à-dire $\frac{ccxx}{aa - 2ax + xx} = aa + xx$; $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + 2aaxx \\ - ccxx \end{matrix} - 2a^3x + a^4 = 0$.

2. Pour resoudre cette équation. 1°. L'on en a fait évanoüir le second terme, Part. 2. Sect. 2. Art. 3. en prenant $x - \frac{1}{2}a = z$, la reduite a été $z^4 * \begin{matrix} + \frac{1}{2}aazz \\ - cczz \end{matrix} \begin{matrix} - a^3z \\ - accz \end{matrix} \begin{matrix} + \frac{5}{16}a^4 \\ - \frac{1}{4}aacc \end{matrix} = 0$, à la place de laquelle on a substitué ; Part. 3. Sect. 4. Art. 1. n. 8. cette transformée $y^6 \begin{matrix} + aay^4 \\ - 2ccy^4 \end{matrix} \begin{matrix} - a^4yy \\ + c^4yy \end{matrix} \begin{matrix} - a^6 \\ - 2a^4cc \\ - aac^4 \end{matrix} = 0$. L'on avoit trouvé un peu auparavant, Sect. 3. Art. 1. n. 4. que cette transformée se divisoit sans fraction par $yy - aa - cc = 0$.

Ensuite Sect. 4. Art. 1. n. 17. & 18. les valeurs de z ont été déterminées $z = \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, & n. 19. les valeurs de x sont $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

3. Fig. 229. Soit AB, $a = 4$; BN, $c = 5$; cc, 25 sera moindre que $8aa$, 128. Fig. 229.

Les deux dernieres valeurs de x sont imaginaires, car $\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}} = \sqrt{-\frac{7}{4} - 2\sqrt{41}}$.

La premiere racine vraye $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ se construit ainsi. Prenez $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} = 2 + \sqrt{\frac{41}{4}}$; ajoûtez $Kf = \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}} = \sqrt{-\frac{7}{4} + 2\sqrt{41}}$; joignez Bf; la ligne Df est x, & la droite fe est égale à BN, c; mais elle ne resout pas le Problême parfaitement, puisqu'on demande, que la ligne FE qui doit être égale à BN coupe le côté DC du quarré donné entre D & C, & le côté AC prolongé. Ainsi l'on voit, comme on l'a dit, Sect. 3. Art. 1. n. 3. que la premiere racine, qui se presente, n'est pas toûjours la racine cherchée.

La racine dont M. DESCARTES se sert est la seconde vraye, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, qui donne la construction parfaite du Problême. Car si de $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$ vous soustrayez $KF = \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, il restera DF. Menez par les points B, F la ligne BFE, FE est la ligne cherchée égale à BN, c.

5. Soit $cc = 8aa$, substituez $8aa$ pour cc dans les valeurs de x, vous aurez la premiere valeur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}aa} + \sqrt{\frac{3}{2}aa + \sqrt{\frac{9}{4}a^4}} = 2a + \sqrt{3aa}$; la seconde $x = 2a - \sqrt{3aa}$; la troisiéme & la quatriéme $x = -a$.

FIG. 230. On construira la premiere racine $x = 2a + \sqrt{3aa}$, Fig. 230. en prenant $DK = 2a$, & en ajoûtant $Kf = \sqrt{3aa}$, & Df sera $2a + \sqrt{3aa} = x$. L'on joindra Bf, & fe sera égale à BN, c.

La seconde $x = 2a - \sqrt{3aa}$ se construira en retranchant $KF = \sqrt{3aa}$ de $DK = 2a$; le reste DF est $2a - \sqrt{3aa} = x$; l'on tirera par B & F la ligne BFE, & FE sera égale à BN, $c = \sqrt{8aa}$.

Pour la troisiéme & quatriéme racine $x = -a$, $-x = a$, prenez de l'autre côté de D, la ligne $DP = a = -x$; la ligne PBL est égale à BN, & c'est la double ligne $c = \sqrt{8aa}$, qui répond à la double racine égale DP, $-x$; aussi la ligne PBL est un *Minima*, comme on le prouvera n. 7.

5. Soit Fig. 231. bN, $c = 3a$, & par consequent $cc > 8aa$. Les quatre valeurs de x, sont $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{2}aa} \pm \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}aa} \pm \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$. Les deux dernieres valeurs sont réelles, car

FIG. 231. $\frac{7}{4}aa > \sqrt{\frac{5}{2}a^4}$. Elles sont fausses, parceque dans la premiere $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}aa} > + \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$. Mais la quantité $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}aa}$ qui est plus grande que $+ \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$, est negative; car $\frac{1}{2}a < \sqrt{\frac{5}{2}aa}$, leurs quarrez étant $\frac{1}{4}aa < \frac{5}{2}aa$: la premiere de ces deux dernieres valeurs de x est donc fausse. La seconde l'est à plus forte raison.

Pour construire la premiere racine vous prendrez $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{2}aa}$, &

$Kf = \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$; & Df sera $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{2}aa} + \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}} = x$; joignez Bf, fe eſt égale à bN, *c.*

La ſeconde ſe conſtruit en ſouſtrayant $KF = \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$ de $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{2}aa}$; & DF ſera $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{2}aa} - \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}} = x$. Tirez BFE, FE eſt égale à bN, *c.*

La troiſiéme ſe doit conſtruire en prenant au deſſous de BD, la quantité $DK = \sqrt{\frac{5}{2}aa}$, dont on retranchera $KP = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$; & DP ſera $\sqrt{\frac{5}{2}aa} - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}} = -x$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}aa} + \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$. Par les points P, B menez PBH, elle eſt égale à bN, *c.*

Pour conſtruire la quatriéme vous couperez encore $DK = \sqrt{\frac{5}{2}aa}$, à quoi vous ajoûterez $KG = \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{5}{2}aa}}$; de DG vous ôterez $Gp = \frac{1}{2}a$; & Dp ſera $\sqrt{\frac{5}{2}aa} + \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{5}{2}aa}} - \frac{1}{2}a = -x$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}aa} - \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{5}{2}a^4}}$. Par les points p, B tirez pBh, elle eſt égale à bN, *c.*

6. Dans tous les cas, qu'on vient d'examiner le ſeul point F & la ſeule ligne FE reſolvent parfaitement le Problême ; les autres lignes, quoique égales à la donnée BN ou bN n'en donnent la ſolution qu'en y mettant quelque changement ; puiſque le Problême demande une ligne qui ſoit égale à BN & qui coupe le côté AC prolongé du côté de E, & le côté CD entre les points C & D.

Afin que toutes les lignes qu'on a tirées égales à la donnée BN ſatisfiſſent au Problême, il faudroit le propoſer ainſi. Etant donné le quarré $ABCD$, & les côtez AC, CD étant prolongez, trouver toutes les lignes, qui 1° ſoient tirées par le point B, qui 2° coupent les côtez AC, CD, & dont 3° la partie compriſe entre ces deux côtez ſoit égale à une donnée BN.

Lorſque $cc < 8aa$ n. 3. Fig. 229. les deux lignes FE, fe reſoudroient le Problême. Lorſque $cc = 8aa$ n. 4. Fig. 230. les trois lignes FE, fe PL le reſoudroient. Lorſque $cc > 8aa$ n. 5. Fig. 231. Ce ſeroient les quatre lignes FE, fe, PH, ph qui ſatisferoient à la queſtion.

7. On peut concevoir Fig. 229. une infinité de lignes MH, mh, qui ſont toutes deux égales entr'elles, & dont l'une a le point M au deſſus de P, l'autre le point m au deſſous. A meſure que les points M, m approchent plus du point P, juſqu'à ce qu'enfin ces points M, m tombent ſur P, & que ces deux lignes égales n'en faſſent plus qu'une PL. Je dis que ſi les côtez du quarré $ABDC$ ſont chacun a, & que PL ſoit $\sqrt{8aa}$. La ligne PL eſt la plus petite des lignes qu'on puiſſe tirer par le point B, & qui ſe terminent aux deux côtez prolongez CD, CA.

Etant PL, $c = \sqrt{8aa}$, ou $cc = 8aa$, si l'on substituë cette valeur de cc en sa place dans $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} + 2aaxx \\ - ccxx \end{array} - 2a^3x + a^4 = 0$, l'on sera $x^4 - 2ax^3 - 6aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$. Et parcequ'on suppose dans cette équation deux racines égales, on en comparera chaque terme, autant qu'il sera necessaire, avec chaque terme de $x^4 \begin{array}{l} - 2ex^3 \\ + fx^3 \end{array} \begin{array}{l} + eexx \\ - 2efxx \\ + ggxx \end{array} \begin{array}{l} + eefx \\ - 2eggx \end{array} + eegg = 0$. Suivant Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 2. & 3.

Les seconds termes $-2ex^3 + fx^3 = -2ax^3$; $f = -2a + 2e$.

Les derniers termes $+eegg = +a^4$; $gg = \frac{a^4}{ee}$.

Les quatriémes termes $+eefx - 2eggx = -2a^3x$; où l'on substituë les valeurs de gg & de f déja trouvées, après avoir divisé par x, & il vient $-2aee + 2e^3 - \frac{2a^4}{e} = -2a^3$; divisez par 2, pour e substituez x; c'est $-axx + x^3 - \frac{a^4}{x} = -a^3$, d'où l'on tire $x^4 - ax^3 + a^3x - a^4 = 0$.

Cette équation se divise exactement par $x - a = 0$; le quotient est $x^3 + a^3 = 0$; qui se divise encore exactement par $x + a = 0$; le quotient est $xx - ax + aa$, dont les deux racines imaginaires sont $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{3}{4}aa}$.

La racine fausse $x + a = 0$, $-x = a$, montre qu'il faut prendre DP, $-x = a$, & par les points P, B mener $PBL = \sqrt{8aa}$, qui est la plus courte des lignes qu'on puisse tirer par le point B, de telle sorte qu'elle soit terminée aux côtez CA, CD prolongez. CP sera donc $CD + DP = 2a$; CL sera aussi $2a$: car à cause de l'angle droit C, $\overline{CL}^2 = \overline{PL}^2 - \overline{PC}^2 = 8aa - 4aa = 4aa$; & $CL = 2a$.

La racine vraye $x - a = 0$, $x = a$, fait voir qu'il faut prendre DC, $+x = a$, & par les points B, C mener BC, qui sera encore la plus courte ligne qu'on puisse tirer par le point B, de sorte qu'elle coupe encore les deux côtez CD, CA. Mais cette plus petite n'est pas $\sqrt{8aa}$, mais seulement $\sqrt{2aa}$; car $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$, $aa + aa = 2aa$.

§. II. *Lorsque* BF *est l'inconnuë.*

Fig. 228. 1. Soit BF l'inconnuë x; chaque côté du quarré a; EF, c; EB, $c + x$.

Dans

Dans les triangles EAB, BDF équiangles : EB, $c + x : BA$, $a :: BF$, $x : FD$, $\frac{ax}{c+x}$; & $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$, $xx = aa + \frac{aaxx}{cc + 2cx + xx}$; donc $x^4 + 2cx^3 \begin{matrix} -2aaxx \\ +ccxx \end{matrix} - 2aacx - aacc = 0$, qui ne peut être divisée juste par aucun binome, tel que le demande la Section troisiéme : c'est pourquoi pour faire évanoüir le second terme, nous prendrons $x + \frac{1}{2}c = y$, $y - \frac{1}{2}c = x$.

La reduite est $y^4 * \begin{matrix} -2aayy \\ -\frac{1}{2}ccyy \end{matrix} * \begin{matrix} +\frac{1}{16}c^4 \\ -\frac{1}{2}aacc \end{matrix} = 0$, qui est une équation quarrée. C'est pour cette raison que M. DESCARTES a dit, que lorsqu'on prenoit BF pour l'inconnuë, l'équation où l'on arrivoit étoit plus aisée à démêler.

Ses racines sont $yy = aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}$, qui se reduisent à $y = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$, $y = -\sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$. Pour y substituez sa valeur $x + \frac{1}{2}c$, vous formerez ces quatre valeurs de x.

1[e] $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$,
2[e] $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$,
3[e] $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}}$,
4[e] $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}}$,

2. La premiere est réelle & vraye, la seconde est réelle & fausse ; afin que les deux autres soient réelles, il faut que cc ne soit pas moindre que $8aa$, car il faut que sous le signe radical $aa + \frac{1}{4}cc$ ne soit pas moindre que $\sqrt{a^4 + aacc}$, & qu'en quarrant tout $a^4 + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{16}c^4$ ne soit pas moindre que $a^4 + aacc$, $\frac{1}{16}c^4$ que $\frac{1}{2}aacc$, cc que $8aa$.

Lorsque $cc > 8aa$, la troisiéme valeur de x est fausse, la quatriéme est fausse. Mais si $cc = 8aa$, l'on a $\sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}} = \sqrt{3aa - \sqrt{9a^4}} = \sqrt{3aa - 3aa} = 0$, & les valeurs dernieres de x sont $-\frac{1}{2}c$. Ces deux mêmes valeurs sont imaginaires, lorsque $cc < 8aa$.

3. La quantité x est la ligne comprise entre le point B, & le côté CD. Ainsi étant $cc < 8aa$, & les deux dernieres valeurs de x imaginaires ; Fig. 229. la premiere valeur de $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$, est BF, la seconde $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$, ou $-x = \frac{1}{2}c + \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$ est Bf, les $+x$ se prennent sur DC determinée, les $-x$ ailleurs.

Etant $cc = 8aa$; Fig. 230. la premiere valeur est BF ; la seconde Bf ; les deux autres, qui sont $-x = \frac{1}{2}c$, s'expriment par BP.

Étant $cc > 8aa$; Fig. 231. la premiere valeur de x eſt BF; la ſeconde Bf; la troiſiéme BP, la quatriéme Bp : ce que le calcul fait connoître. Car ſi l'on fait Bf, $-x$, l'on trouvera dans les triangles AeB, fBD la même équation que n. 1. Cela arrivera dans les triangles ABH, PBD, en faiſant BP, $-x$; PH, c; & dans les triangles ABh, pBD, en faiſant Bp, $-x$; ph, c.

§. III. *Lorſque* CE *eſt l'inconnuë.*

Fig. 228. 1. Soit Fig. 228. CE l'inconnuë x; EA, $x+a$. Dans les triangles ſemblables EAB, ECF; EA, $x+a : AB$, $a :: EC$, $x : CF$, $\frac{xa}{x+a}$. Et dans le triangle rectangle ECF, $\overline{EF}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2$, $cc = xx + \frac{aaxx}{xx+2ax+aa}$, d'où l'on tire

$$\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3 \begin{array}{l} + 2aaxx \\ - ccxx \end{array} - 2accx - aacc = 0, \end{array}$$

qui ne ſe peut diviſer juſte par aucun binome, on en fait évanoüir le ſecond terme, en prenant $x + \frac{1}{2}a = z$, $z - \frac{1}{2}a = x$. La reduite eſt la même, que celle de Sect. 4. Art. 1. n. 17. Ainſi les racines ſeront les mêmes. Pour z ſubſtituant ſa valeur $x + \frac{1}{2}a$;

L'on fait $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$$x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

2. Les deux premieres valeurs ſont réelles, l'on jugera des deux dernieres comme n. 3. 4. 5. La premiere racine eſt vraye, les trois autres ſont fauſſes.

Fig. 229. la premiere eſt CE; la ſeconde Ce; les deux autres ſont imaginaires.

Fig. 230. la premiere eſt CE; la ſeconde Ce; la troiſiéme & la quatriéme CL, $-x = 2a$.

Fig. 231. la premiere eſt CE; la ſeconde Ce; la troiſiéme Ch; la quatriéme CH.

3. Je ne vois pas que l'équation ſoit plus aiſée à démêler, que celle de §. 1.

§. IV. *Lorſque* BE *eſt l'inconnuë.*

1. Soit Fig. 228. BE l'inconnuë x, BF ſera $BE - FE$, $x - c$, & dans les triangles équiangles BEA, BFD, EB, $x : BA$, $a :: BF$, $x - c : FD$, $\frac{ax-ac}{x}$ Et dans le triangle rectangle BDF, $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$ $xx - 2cx + cc = aa + \frac{aaxx - 2aacx + aacc}{xx}$; $x^4 - 2cx^3 \begin{array}{l} - 2aaxx \\ + ccxx \end{array} + 2aacx - aacc = 0$; qui ne peut être diviſée juſte par

aucun binome. Vous en ferez disparoître le second terme, en prenant $x - \frac{1}{2}c = y$, $y + \frac{1}{2}c = x$.

La reduite est $$y^4 * \begin{array}{l} -2aayy \\ -\frac{1}{2}ccyy \end{array} * \begin{array}{l} +\frac{1}{16}c^4 \\ -\frac{1}{2}aacc \end{array} = 0,$$ même reduite, que celle de §. II. Ainsi ses racines seront les mêmes, $y = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$, $y = -\sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$. A la place de y mettez sa valeur $x - \frac{1}{2}c$. Vous ferez $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$. $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}}$.

2. Les deux dernieres valeurs sont réelles dans les cas marquez §. II. n. 2. Car pour les deux premieres elles sont toûjours réelles. La premiere, la troisiéme, la quatriéme, sont positives ; la seconde est negative.

La premiere positive est BE, comme le calcul vient de le prouver.

La seconde negative est Be, comme on le démontrera, en prenant Be, $-x$; ef, c ; dans les triangles BeA, BfD.

La troisiéme positive est BH, que l'on fait $= x$, $HP = c$, dans les triangles BHA, BPD.

La quatriéme positive est Bh, que l'on pose $= x$, $hp = c$, dans les triangles BhA, BpD. Fig. 231.

La quantité $\pm x$ est toûjours prise entre le point B, & la ligne AC.

3. L'équation est ici plus aisée à démêler que §. I.

§. V. *Lorsque* DG *est l'inconnuë.*

1. Cette resolution fera voir, que lorsque le Problême proposé n'est point solide ; si en le cherchant par un chemin, on vient à une équation fort composée, on peut ordinairement venir à une plus simple en le cherchant par un autre. Jusqu'à present l'on a eu des équations du quatriéme degré ; maintenant on en aura une du second. Mais comme cette équation simple est plus difficile à trouver que les autres, cela prouve encore que parmi les Operations, la plus facile & la plus naturelle n'est pas toûjours la meilleure.

2. Supposons la chose faite, c'est-à-dire, que BE rencontre le côté AC prolongé de telle sorte, que FE soit égale à la donnée BN, Fig. 231. sur BE tirez la perpendiculaire EG, qui coupera BD prolongée en G ; abaissez EL perpendiculaire sur BG ; EL sera parallele & égale à CD, sur le diametre BG décrivez le demicercle BEG ; l'angle BEG étant droit supp. il a son sommet E dans la circonference BEG. De plus les triangles BEG, BEL, LEG sont semblables ; mais les triangles BFD, BEL équiangles sont encore semblables : ainsi les triangles BFD, EGL sont encore semblables ; & parcequ'ils ont les côtez BD, EL égaux, les côtez BF, EG le seront aussi. Fig. 231.

3. Nommons chaque côté du quarré, $a = EL$; FE, c; DG, x; BF, $y = EG$; nous aurons BG, $a+x$; BE, $y+c$.

Dans les triangles semblables BGE, EGL, BG, $a+x : BE$, $c+y :: GE$, $y : EL$, a. & $cy+yy = aa+ax$. Le triangle rectangle BEG donne $\overline{BG}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EG}^2$, $aa+2ax+xx = 2yy+2cy+cc$. Pour $yy+cy$ substituez sa valeur, qu'on vient de trouver : il viendra $x = \pm\sqrt{aa+cc}$.

4. La racine vraye $x = \sqrt{aa+cc}$ donne la construction de Pappus,

Fig. 228. dans laquelle on prend DG, $x = DN$, Fig. 228. $= \sqrt{\overline{BN}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{cc+aa}$: Après quoi sur le diametre BG l'on décrit le demi cercle BEG; l'on prolonge AC jusqu'en E, l'on joint BE, & FE est la ligne cherchée égale à BN.

La racine fausse $x = -\sqrt{aa+cc}$, ou $-x = \sqrt{aa+cc}$, apprend

Fig. 231. qu'il faut Fig. 231. de l'autre côté de D prolonger DB jusqu'à ce que Dg, $-x$ soit $\sqrt{aa+cc}$: & que sur le diametre Bg on doit décrire le demi-cercle BHg. Le côté CA se prolonge en H; la ligne HP menée par les points H, B est encore égale à la donnée BN.

En effet joignez Hg, menez Hl parallele & égale à $AB = BD$: vous aurez les triangles semblables BHg, HlB, lHg, BDP, & les deux BDP, Hlg seront égaux à cause de $BD = Hl$: donc $Hg = BP$. Un calcul semblable au precedent donnera la même équation.

5. Bien plus Fig. 231. les deux autres points e, h, où ces deux cercles coupent encore le côté AC, satisfont au Problême, & les lignes ef, hp, tirées par les points e, h, B sont égales à bN.

Pour le démontrer au point e, abaissez la perpendiculaire eM, & joignez eG.

Il est aisé de montrer que ef est égale à FE.

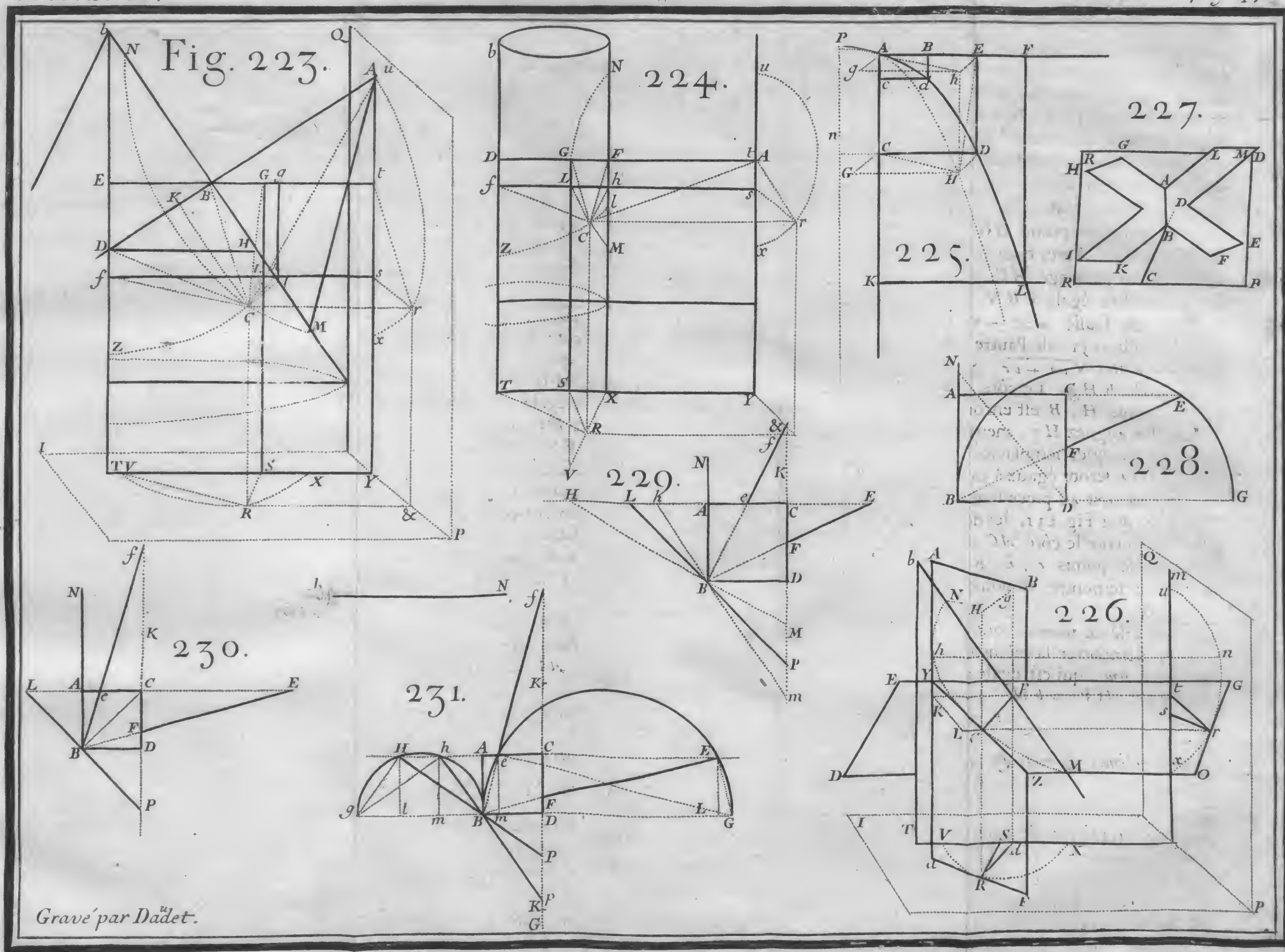
Pour démontrer la même chose au point h, abaissez sur Bg la perpendiculaire hm, qui est égale à $AB = BD$; joignez hg, & vous verrez que $hp = HP = bN$.

ARTICLE III.

Les Problémes de trois & quatre dimensions ne demandent pas toûjours ces Operations.

1. LEs Problêmes de trois dimensions n'ont quelquefois ni second, ni troisiéme terme, comme Liv. 1. Part. 1. Sect. 1. Probl. 4. alors l'on n'a qu'à trouver la racine cubique, suivant Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Quelquefois le second terme manque, & alors il n'est pas necessaire de le faire évanoüir, comme il arrivera dans la trisection de l'angle, Part. 4. Sect. 2. Art. 3.

2. Les Problêmes de quatre dimensions peuvent n'avoir ni second, ni


Fig. 223.
224.
225.
226.
227.
228.
229.
230.
231.
Gravé par Dadet.

quatriéme terme ; & alors on les regarde comme des Problêmes quarrez. Ils peuvent n'avoir point de ſecond terme , alors il n'eſt pas beſoin de le faire évanoüir. Quelquefois en faiſant évanoüir le ſecond terme , le quatriéme diſparoît auſſi ; & alors , comme l'équation eſt plane , il n'eſt pas neceſſaire de faire les autres Operations , qu'il auroit fallu faire ; ſi le quatriéme terme fût demeuré. On en a vû des Exemples , Art. 2. §. 2. 4. En voici encore un autre.

Trouver quatre nombres qui ſe ſurpaſſent de l'unité , & qui ſe multipliant produiſent 100.

Soit le premier nombre z, le ſecond $z + 1$, le troiſiéme $z + 2$, le quatriéme $z + 3$, leur produit eſt $z^4 + 6z^3 + 11zz + 6z - 100 = 0$, qui ne peut être diviſé juſte par aucun binome composé de z & de quelque diviſeur exact de 100.

Pour faire évanoüir le ſecond terme prenez $z + \frac{3}{2} = x$.

La transformée eſt $x^4 * - \frac{5}{2}xx * - \frac{1591}{16}$; $x^4 - \frac{5}{2} = \frac{1591}{16}$ dont les racines ſont $xx = +\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}$, qui ſe reduiſent $x = \pm\sqrt{+\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$; mettez pour x ſa valeur $z + \frac{3}{2}$, les quatre racines ſont $z = -\frac{3}{2} + \sqrt{+\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, $z = -\frac{3}{2} - \sqrt{+\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, $z = -\frac{3}{2} + \sqrt{+\frac{5}{4} - \sqrt{101}}$, $z = -\frac{3}{2} - \sqrt{+\frac{5}{4} - \sqrt{101}}$. Que le premier nombre cherché ſoit $z = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, le ſecond eſt $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, le troiſiéme $z = +\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, le quatriéme $z = +\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$. Le produit du premier par le quatriéme eſt $-1 + \sqrt{101}$, celui du ſecond par le troiſiéme eſt $+1 + \sqrt{101}$: & le produit de $-1 + \sqrt{101}$, par $+1 + \sqrt{101}$ eſt 100. Les autres valeurs de z donnent auſſi 100.

SECTION V.

Regle generale pour reduire les Equations de toutes ſortes de dimenſions.

M. DESCARTES.

JE pourrois ajoûter diverſes Regles pour démêler les équations, qui vont au cube ou au quarré de quarré : mais elles ſeroient ſuperfluës ; car lorſque les Problêmes ſont plans , on en peut toûjours trouver la conſtruction par celles-ci.

Je pourrois auſſi en ajoûter d'autres pour les équations , qui montent juſqu'au ſurſolide , ou au quarré de cube , ou au delà ; mais j'aime mieux les comprendre toutes en une , & dire en gene-

ral, que lorſqu'on a tâché de les reduire à une même forme, que celles d'autant de dimenſions, qui viennent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, & qu'ayant denombré tous les moyens, par leſquels cette multiplication eſt poſſible, la choſe n'a pû ſucceder par aucun, on doit s'aſſurer, qu'elles ne ſçauroient être reduites à de plus ſimples. En ſorte que ſi la quantité inconnuë a trois ou quatre dimenſions, le Problême pour laquelle on le cherche eſt ſolide, & ſi elle en a cinq ou ſix, il eſt d'un degré plus composé; & ainſi des autres.

Au reſte j'ai omis ici les démonſtrations de la plûpart de ce que j'ai dit, à cauſe qu'elles m'ont ſemblé ſi faciles, que pourveu que vous preniez la peine d'examiner methodiquement, ſi j'ai failli, elles ſe preſenteront à vous d'elles-mêmes: & il ſera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les liſant.

Nous apportons en chaque endroit la démonſtration de ce que M. DESCARTES enſeigne dans ſa Geometrie.

Nous allons appliquer la Regle, que M. DESCARTES vient de donner, 1. aux équations cubiques, 2. aux équations quarré-quarrées. 3. aux équations ſurſolides, 4. aux équations quarré-cubes. Ce qui ſervira d'explication à la Regle dont il s'agit. L'on pourroit de même travailler ſur les équations qui ont plus de dimenſions.

Lorſqu'on parle ici des équations de trois, quatre, &c. dimenſions, l'on entend celles où une des inconnuës au moins eſt du troiſiéme, quatriéme, &c. degré. Car pour celles où le produit des deux inconnuës xyy, $xxyy$, &c. ſe trouve, ſans qu'il y ait x^3, y^4, &c. elle ſe reduiſent par la diviſion à un moindre degré, comme celle-ci $aax - xyy - 2aay - ayy = o$ ſe reduit à $x = \frac{2aay + ayy}{aa - yy}$, & celle-ci $xxyy - abxx - aayy + aabb = o$ ſe reduit à $xx = \frac{aayy - aabb}{yy - ab}$, & c'eſt ſous cette forme qu'on cherche les valeurs de x.

ARTICLE I.

Pour les Equations de trois dimenſions.

1. SOient propoſées ces équations cubiques $x^3 \begin{array}{l} -axx \\ -bxx \\ -cxx \end{array} \begin{array}{l} +abx \\ +acx \\ +bcx \end{array} - abc = o$. $x^3 - bxx + aax - aab = o$. $z^3 - 7zz + 5z - 12 = o$.

On divise le nombre 3 exposant de la plus haute puissance x^3, z^3, en autant de nombres, qu'il se peut, de sorte que tous les nombres de chaque division pris ensemble fassent 3. La premiere division est 1, 1, 1; la seconde 1, 2; & l'on n'en peut point faire d'autres. Ce qui montre qu'une équation de trois dimensions peut être divisée ou 1° par trois équations 1, 1, 1, chacune du premier degré; comme $x^3 \begin{array}{l} -axx+abx \\ -bxx+acx \\ -cxx+bcx \end{array}$ $-abc=0$, peut être divisée par ces trois $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$. Ou 2° par deux équations 1, 2, dont l'une est du premier degré, l'autre du second; comme $x^3-bxx+aax-aab=0$, peut être divisée par ces deux $x-b=0$, $xx+aa=0$.

2. Après qu'on a divisé une équation $x^3 \begin{array}{l} -axx+abx \\ -bxx+acx-abc=0, \\ -cxx+bcx \end{array}$ par une équation lineaire $x-a=0$, dont le quotient est $xx \begin{array}{l} -cx \\ -bx \end{array}$ $+bc=0$, l'on cherche encore, si ce quotient peut aussi être divisé juste par un binome lineaire, & l'on trouve qu'il le peut par $x-b=0$, & le quotient est $x-c=0$. Alors on dit, que l'équation proposée est reductible en trois autres équations chacune du premier degré $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, & qu'elle n'est pas proprement du troisiéme degré, mais du premier; parceque toutes ses racines $x=a=x=b$, $x=c$ se peuvent trouver, comme on trouve les équations du premier degré.

Mais après qu'on a divisé une équation $x^3-bxx+aax-aab=0$, par un binome $x-b=0$, & qu'on a tenté inutilement de diviser le quotient $xx+aa=0$ par un autre binome: l'on dit que la proposée est reductible en deux autres, dont l'une $x-b=0$ est du premier degré, l'autre $xx+aa=0$ du second; & qu'elle n'est pas proprement du troisiéme, mais du premier & du second; parceque ses racines $x=b$, $xx=-aa$ se doivent chercher comme on fait celles du premier & du second degré.

Lorsqu'enfin on ne trouve aucun binome, qui divise exactement une équation du troisiéme degré $z^3-7zz+5z-12=0$: alors on dit qu'elle est irreductible, & qu'elle est proprement du troisiéme degré; & il faut chercher ses racines, comme on cherche celles du troisiéme degré, Voyez Part. 4. Sect. 1. Art. 1.

3. J'ai crû devoir ici ajoûter quelques Regles, qui regardent toutes les

dimenſions ; je ne les ai pas miſes d'abord au commencement, parcequ'après ce qu'on vient de dire des équations cubiques, elles ſeront plus intelligibles.

Il faut diviſer l'expoſant d'une équation propoſée en autant de nombres qu'il ſe peut, de ſorte que tous ces nombres ajoûtez enſemble ſoient égaux à l'expoſant. Si l'équation eſt de quatre dimenſions, l'on diviſe l'expoſant 4, 1° en 1, 1, 1, 1. Ce qui montre qu'une équation de quatre dimenſions peut être diviſée par quatre binomes chacun d'une dimenſion ; 2° en 1, 1, 2. Ce qui prouve qu'une telle équation peut être diviſée par trois binomes, dont deux ſont d'une dimenſion, le troiſiéme de deux ; 3° en 2. 2. Ce qui fait voir que cette équation peut être diviſée par deux binomes, chacun de deux dimenſions ; 4° en 1. 3. Ce qui marque qu'une telle équation peut ſe diviſer par deux binomes, l'un d'une, l'autre de trois dimenſions.

On doit commencer la diviſion de la propoſée par tous les binomes du premier degré qui peuvent ſervir ; & ſi cette diviſion donne un quotient exact, on le diviſera encore par tous les binomes du premier degré qui peuvent être employez, & ſi cette diviſion donne encore un quotient, l'on tentera encore la diviſion par un binome du premier degré ; & ainſi de ſuite juſqu'à ce que ces ſortes de binomes ne réüſſiſſent pas.

Mais dès que les binomes du premier degré ſont inſuffiſans, ſoit que cela arrive à la premiere diviſion, ſoit aux autres ; l'on eſſayera de diviſer par tous les binomes du ſecond degré, qui peuvent être utiles, & l'on s'en ſervira, juſqu'à ce qu'ils ne donnent point de diviſion exacte. Alors on viendra aux binomes du troiſiéme degré, &c. Il ne faut jamais ſe ſervir d'un binome d'un degré plus élevé, qu'après que les binomes d'un degré plus ſimple ont été trouvez inutiles : dont la raiſon eſt, qu'une équation qui peut être diviſée juſte par un binome plus composé, le peut toûjours être par un plus ſimple, lequel ſeroit le quotient de la diviſion faite par le plus composé. Car ſi vous diviſez $x^3 - bxx + aax - aab$ par $xx + aa = o$, le quotient eſt $x - b = o$: comme ſi vous aviez diviſé par $x - b = o$, le quotient auroit été $xx + aa = o$. Or la diviſion par un binome plus ſimple eſt plus facile.

De là il ſuit, que ſi la diviſion n'a pas réüſſi par un binome plus ſimple, il ſeroit inutile de la tenter par un binome plus composé, qui auroit dû être le quotient du plus ſimple ; ce qui s'explique ainſi. Soit une équation du troiſiéme degré $x^3 - bxx + aax - aab = o$. Diviſez là par un binome du premier degré $x - b = o$, le quotient ſera du ſecond degré $xx + aa = o$. Si donc la diviſion n'avoit pas pû ſe faire avec le binome du premier degré, il n'auroit pas fallu la tenter avec un binome du ſecond. C'eſt pour cela que M. DESCARTES n'a demandé Sect. III. qu'une diviſion,

division, pour connoître si une équation cubique est un Problême solide, ou non. Soit une équation quarré-quarrée $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$. Divisez-là par $y - 2 = 0$ binome du premier degré, le quotient est $y^3 + 18yy + 107y + 210 = 0$ du troisiéme degré: c'est pourquoi lorsque la division n'est pas exacte avec un diviseur du premier degré, vous ne devez pas la tenter avec un diviseur du troisiéme, qui devroit avoir pour quotient une équation du premier; car si l'on divise $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, par $y^3 + 18yy + 107y + 210 = 0$, le quotient est $y - 2 = 0$. Divisez à present la même proposée par le binome du second degré $yy + 13y + 42 = 0$, le quotient est un autre binome du second degré $yy + 3y - 10 = 0$.

M. DESCARTES n'a aussi demandé, pour connoître, si une équation du quatriéme degré étoit un Problême solide, qu'une division par $y - 2 = 0$, parceque si celle-là ne réüssit pas, la division par $y^3 + 18yy + 107y + 210 = 0$, ne réüssiroit pas non plus. Il auroit pû demander la division par un binome du second degré, mais comme le quotient seroit aussi un binome du second degré; l'équation proposée peut alors se diviser en deux autres du second degré chacune; or il a donné Sect. 4. Art. 1. une Methode pour diviser la proposée en ces deux équations, lorsque cela se peut faire. Par la même raison une équation de cinq dimensions est irreductible, si elle ne peut être divisée juste par aucun binome du premier & du second degré: car si elle pouvoit être divisée exactement par un binome du troisiéme degré, elle auroit pû l'être par un du second: & si elle pouvoit être divisée exactement par un binome du quatriéme, elle auroit pû l'être aussi par un du premier: puisque ces binomes sont mutuellement le quotient les uns des autres.

Ainsi l'on fait cette Regle generale. Pour les équations du 2, 4, & autres degrez en nombre pair, il faut s'arrêter aux binomes dont le degré est la moitié du degré de l'équation proposée; aux binomes du second degré pour les équations du quatriéme, aux binomes du troisiéme pour les équations du sixiéme, &c. Pour les équations du 3, 5, & autres en nombre impair, il faut s'arrêter aux binomes dont le degré est la moitié de celui de l'équation proposée; après qu'on l'a diminué d'une unité; aux binomes du premier degré pour les équations du troisiéme; aux binomes du second degré pour les équations du cinquiéme; aux binomes du troisiéme pour les équations du septiéme; &c. Car il est évident, que toutes les autres divisions seroient superfluës.

Lorsque l'équation cubique est $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, les binomes $yy - 1 = 0$, $yy - 2 = 0$, &c. sont regardez comme du premier degré, &c.

ARTICLE II.

Pour les Equations de quatre dimensions.

1. UNe équation quelconque de quatre dimensions étant proposée

$$y^4 \begin{array}{l} -3ay^3+3aayy-a^3y \\ +by^3-3abyy+3aaby \end{array} -a^3b=0.$$

$$x^4 \begin{array}{l} -bx^3+aaxx-aabx \\ -cx^3+bcxx-aacx \end{array} +aabc=0.$$ $z^4-4z^3-16zz+3z-36=0$. $x^4-4x^3-10xx-28x-8=0$. $v^4-11v^3+21vv-7v+1=0$.

Vous partagerez le nombre 4 exposant de la haute puissance en autant de nombres qu'il se peut, de sorte que tous ceux d'une division pris ensemble fassent 4. Premiere division $1, 1, 1, 1$; seconde $1, 1, 2$; troisiéme $1, 3$; quatriéme $2, 2$.

Ce qui fait voir qu'une équation du quatriéme degré peut être divisée exactement, ou 1° par quatre binomes chacun du premier degré $1, 1, 1, 1$, comme $y^4 \begin{array}{l} -3ay^3+3aayy-a^3y \\ +by^3-3abyy+3aaby \end{array} -a^3b=0$, peut se diviser juste par ces quatre $y-a=0$, $y-a=0$, $y-a=0$, $y+b=0$; ou 2° par trois binomes $1, 1, 2$, dont deux soient chacun du premier degré, le troisiéme du second; comme $x^4 \begin{array}{l} -bx^3+aaxx-aabx \\ -cx^3+bcxx-aacx \end{array} +aabc=0$, peut être divisée par ces trois $x-b=0$, $x-c=0$, $xx+aa=0$; ou 3° par deux équations $1, 3$, dont l'une soit du premier degré, l'autre du troisiéme; comme $z^4-4z^3-16zz+3z-36=0$, peut se diviser juste par ces deux $z+3=0$, $z^3-7zz+5z-12=0$; ou 4° par deux binomes chacun du second degré $2, 2$; comme $x^4-4x^3-10xx-28x-8=0$, par ces deux $xx+2x+4=0$, $xx-6x-2=0$.

2. Après que l'équation $y^4 \begin{array}{l} -3ay^3+3aayy-a^3y \\ +by^3-3abyy+3aaby \end{array} -a^3b$

$=o$, a pû être divisée juste par $y-a=o$, $y-a=o$, $y-a=o$, $y+b=o$, l'on dit qu'elle est proprement du premier degré, parcequ'elle est reductible en des équations du premier degré. Après que l'équation $x^4 \begin{array}{l} -bx^3+aaxx-aabx \\ -cx^3+bcxx-aacx \end{array} +aabc=o$, a été divisée exactement par $x-b=o$, $x-c=o$, $xx+aa=o$; elle est reductible en deux équations du premier degré, & en une du second; & elle passe pour n'être pas proprement du quatriéme, mais du premier & du second, &c. Mais lorsqu'une équation $v^4-11v^3+21vv-7v+1=o$, n'a pû être divisée exactement par aucun binome ni du premier, ni du second degré; l'on ne tente pas la division par d'autres. Cependant avant que de la declarer entierement irreductible, l'on fait les operations que l'on a expliquées, Sect. 4. Art. 1. Que si par cette voye l'on ne trouve aucune racine de $v^4-11v^3+21vv-7v+1=o$, elle est proprement du quatriéme degré, parcequ'elle est irreductible; & l'on doit chercher ses racines, comme l'on fera celles des équations solides du quatriéme degré, Part. 4. Sect. 1. Art. 2. Exemple 4.

3. Il ne sera pas inutile d'apporter ici un Exemple des équations de quatre dimensions, pour lesquelles il faut suivre les Regles de Sect. 4. Art. 1. & de montrer, comment on connoît enfin si l'on a trouvé les racines de l'équation proposée.

Soit $x^4-4x^3-10xx-28x-8=o$, dont on cherche les racines. Suivant la Methode de M. DESCARTES, d'abord vous tentez la division par tous les binomes du premier degré, qui sont composez de x + ou — chaque diviseur exact du dernier terme 8, aucune de ces divisions n'est exacte. Au lieu de tenter la division par des binomes du second degré, comme on le fera n. 5. M. DESCARTES veut, pour vous en épargner la peine, que vous fassiez évanoüir le second terme de la proposée en faisant $x-1=z$, $z+1=x$; la reduite est $z^4 * -16zz-56z-49=o$; ou $z^4 * -pzz-qz-r=o$. Vous la transformez en $y^6-2py^4 \begin{array}{l} +ppyy \\ +4ryy \end{array} -qq=o$, ou $y^6-32y^4+452yy-3136=o$. qui se divise juste par $yy-16=o$. donc $yy=16$,

$y = 4$. Ensuite à la place de $z^4 * - pzz - qz - r = 0$, ou $z^4 * - 16zz - 56z - 49 = 0$, vous écrivez ces deux $zz - yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$; ou $zz - 4z - 7 = 0$, $zz + 4z + 7 = 0$; dont les racines sont $z = 2 \pm \sqrt{11}$, $z = -2 \pm \sqrt{-3}$.

Maintenant pour connoître, si les racines de la proposée $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$ sont trouvées, vous substituez la valeur de zz & de z dans $zz - 4z - 7 = 0$, $zz + 4z + 7 = 0$, & il vient $xx - 6x - 2 = 0$, $xx + 2x + 4 = 0$. Vous divisez la proposée par une de ces deux équations, le quotient exact est l'autre équation; par où il paroît quelles sont les racines de $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$; de sorte que les valeurs de x sont $x = 3 \pm \sqrt{11}$, $x = -1 \pm \sqrt{-3}$. Ce que vous auriez aussi trouvé en substituant $x - 1$ pour z dans les racines $z = 2 \pm \sqrt{11}$, $z = -2 \pm \sqrt{-3}$.

4. Une équation du quatriéme degré, qui ne peut pas être divisée de la maniere, dont on a parlé auparavant peut quelquefois être abaissée au second degré en faisant évanoüir le second terme. Soit donnée l'équation

$$x^4 + 4x^3 \begin{matrix} + 4aaxx \\ - bbxx \end{matrix} - 2abbx - 2aabb = 0,$$

laquelle ne peut pas être divisée par aucun des binomes, qui peuvent être formez avec les quantitez connuës du dernier terme : suivant la Regle expliquée, Part. 2. Sect. 2. Art. 3. je fais $x + a = z$, $x = z - a$; ce qui donne

$$z^4 * \begin{matrix} - 2aazz \\ - bbzz \end{matrix} * \begin{matrix} + a^4 \\ - aabb \end{matrix} = 0.$$

Cette reduite est du second degré, j'arrange ainsi les termes, $z^4 - 2aazz - bbzz = - a^4 + aabb$; dont la racine est $zz = aa + \frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, $z = \pm \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$; & $x = z - a = - a \pm \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$, où sont contenuës les quatre valeurs de x, lesquelles se multipliant, produisent l'équation proposée, dont par consequent elles sont les quatre racines.

5. M. DESCARTES auroit pû nous conduire par le même chemin par lequel il a trouvé les Regles qu'il donne, Sect. 4. Art. 1. & nous dire que lorsqu'une équation de quatre dimensions $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$, n'a pas pû être divisée juste par un binome du premier degré, il faut essayer, si elle pourra être divisée par deux binomes du second. Ce qui se fait ainsi, l'on fait évanoüir le second terme de la proposée, comme n. 3. & l'on a $z^4 * - 16zz - 50z - 49 = 0$, que l'on suppose être la même qu'une autre qui seroit produite par les deux équations $xx + yx$

$+ z = 0$, $xx - yx + v = 0$; & c'est $$x^4 * \begin{array}{l} + zxx \\ - yyxx \\ + vxx \end{array} \begin{array}{l} - yzx \\ + vyx \end{array} + vz$$

$= 0$. Dont on compare chaque terme avec chaque terme de la proposée comme on l'a enseigné, Sect. 4. Art. 1. $y^6 - 32y^4 + 452yy - 3136 = 0$; & le reste comme n. 3.

6. L'on peut chercher si l'équation proposée $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$; peut se diviser en deux autres du second degré, sans ôter le second terme; ce qui fera connoître si le Problême est plan, & quelles sont les racines de la proposée.

Je regarde la proposée comme égale à $$x^4 \begin{array}{l} + yx^3 \\ + sx^3 \end{array} \begin{array}{l} + vxx \\ + syxx \\ + zxx \end{array} \begin{array}{l} + svx \\ + yzx \end{array} + vz$$

$= 0$, qui a été produite par la multiplication des deux du second degré $xx + yx + v = 0$, $xx + sx + z = 0$. & j'en compare les termes.

Les seconds $+ y + s = - 4$. $s = - 4 - y$.

Les derniers $+ vz = - 8$. $z = \frac{-8}{v}$.

Les quatriémes $+ sv + yz = - 28$. Je substituë les valeurs de s & de z; il vient $- 4v - vy - \frac{8y}{v} = - 28$; $y = \frac{28v - 4vv}{vv + 8}$.

Puisque les derniers termes sont $+ vz = - 8$, $- 8$ est le produit de $v \times z$, & v est un des diviseurs de 8, qui sont ± 1, ± 2, ± 4; ± 8.

Soit $v = + 1$: donc $y = \frac{24}{9}$; $s = \frac{-60}{9}$; $z = \frac{-8}{v} = - 8$. Je substituë ces valeurs dans les équations $xx + yx + v = 0$, $xx + sx + z = 0$; elles deviennent $xx + \frac{24}{9}x + 1 = 0$, $xx - \frac{60}{9}x - 8 = 0$. Je tente la division de la proposée $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$ par chacune de ces équations du second degré. Elle n'est pas exacte, d'où je conclus qu'aucune de ces équations n'est la racine de la proposée.

La division ne réüssit pas non plus en faisant $v = - 1$, $v = \pm 2$. Je pose $v = + 4$: donc $y = + 2$, $s = - 6$, $z = - 2$. Je substituë ces valeurs, la division réüssit. De là je conclus que ces deux équations sont racines de la proposée, qui par conséquent se peut diviser en deux autres du second degré, que le Problême est plan; & que les valeurs de x sont les racines de $xx + 2x + 4 = 0$, $xx - 6x - 2 = 0$. à sçavoir $x = - 1 \pm \sqrt{-3}$, $x = 3 \pm \sqrt{11}$, comme n. 3.

Après avoir substitué tous les diviseurs de 8 à la place de v, si aucune division n'avoit été juste, ç'auroit été une marque, que le Problême étoit solide.

J'aurois pû faire évanoüir v en me servant des troisiémes termes $+ v + sy + z = - 10$; en mettant pour s & z leur valeur, j'aurois trouvé $v - 4y - yy - \frac{8}{v} = - 10$; $vv - 4vy - yyv + 10v = 8$, qui donneroit une valeur de v, laquelle ne contiendroit que des y d'inconnuës. Mais en substituant cette valeur de v & de vv dans $y = \frac{28v - 4vv}{vv + 8}$, l'inconnuë y monteroit trop haut, & il seroit plus difficile d'en connoître les racines, que celles de la proposée même.

ARTICLE III.

Pour les Equations de cinq dimensions.

1. SOit proposée une équation quelconque du cinquiéme degré

$$y^5 - 3ay^4 \begin{array}{l} + 3aay^3 - a^3yy \\ - bby^3 + 3abbyy \end{array} - 3aaby + a^3bb = 0.$$

$$x^5 - bx^4 \begin{array}{l} + aax^3 - aabxx \\ - ccx^3 + bccxx \end{array} - aaccx + aabcc = 0.$$ $z^5 - 6z^4 - 8z^3 + 35zz - 42z + 72 = 0$. $v^5 - 9v^4 - 1v^3 + 49vv - 13v + 2 = 0$.

$$y^5 - by^4 \begin{array}{l} + aay^3 - aabyy \\ + ccy^3 - bccyy \end{array} + aaccy - aabcc = 0.$$

$x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0.$

Nous diviserons le nombre 5 exposant de la plus haute puissance en autant de nombres, qu'il se peut, de sorte que tous ceux de chaque division pris ensemble fassent 5. Premiere division $1, 1, 1, 1, 1$; seconde $1, 1, 1, 2$; la troisiéme $1, 1, 3$; la quatriéme $1, 4$; la cinquiéme $1, 2, 2$; la sixiéme $2, 3$. Ce qui fait voir qu'une équation du cinquiéme degré peut être divisée juste ou par cinq équations, chacune du premier degré $1, 1, 1, 1, 1$; comme l'équation $y^5 - 3ay^4 \begin{array}{l} + 3aay^3 - a^3yy \\ - bby^3 + 3abbyy \end{array} - 3aabby + a^3bb = 0$, par $y - a = 0$, $y - a = 0$, $y - a = 0$, $y - b = 0$, $y + b = 0$. Et alors cette équation n'est pas proprement du cinquiéme degré, mais du premier, auquel elle est reductible, parceque toutes ses racines peuvent se trouver, comme celles des équations du premier degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut se diviser juste par quatre équations, dont trois sont chacune du premier degré, la quatriéme

du ſecond 1, 1, 1, 2, comme $x^5 - bx^4 \begin{matrix} + aax^3 - aabxx \\ - ccx^3 + bccxx \end{matrix} -$ $aaccx + aabcc = 0$. par $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x + c = 0$, $xx + aa = 0$. Et cette équation eſt proprement du premier & du ſecond degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut être diviſée exactement par trois équations, dont deux ſont du premier degré, & l'autre du troiſiéme 1, 1, 3; comme $z^5 - 6z^4 - 8z^3 + 35zz - 42z + 72 = 0$, par $z - 2 = 0$, $z + 3 = 0$, $z^3 - 7zz + 5z - 12 = 0$, qui ne peut plus être diviſée juſte. Et alors l'équation eſt proprement du premier & du troiſiéme degré, parceque deux de ſes racines ſe trouvent, comme on fait celles du premier degré, & la troiſiéme comme on trouve les cubiques. Ou une équation du cinquiéme degré peut être diviſée exactement par deux équations, l'une du premier, l'autre du quatriéme degré 1, 4; comme $v^5 - 9v^4 - 1v^3 + 35vv - 13v + 2 = 0$, par $v + 2 = 0$, $v^4 - 11v^3 + 21vv - 7v + 1 = 0$. Et cette équation eſt proprement du premier & du quatriéme degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut ſe diviſer juſte par une équation du premier degré & par deux du ſecond 1, 2, 2; comme $y^5 - by^4 \begin{matrix} + aay^3 - aabyy \\ + ccy^3 - bccyy \end{matrix} + aaccy -$ $aabcc = 0$, $y - b = 0$, $yy + aa = 0$, $yy + cc = 0$. Et l'équation eſt proprement du premier & du ſecond degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut ſe diviſer juſte par une équation du ſecond degré, & par une du troiſiéme 2, 3, comme $x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0$, par $xx + 3 = 0$, $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$. Et elle eſt proprement du ſecond & du troiſiéme degré.

2. Quoiqu'une équation du cinquiéme degré $x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0$. n'ait pas pû être diviſée juſte par un binome du premier degré; elle n'eſt pas toûjours entierement irreductible: ainſi il faut la transformer en une autre, qui vienne de la multiplication de deux équations, qui ſont d'un moindre degré. Mais parmi les ſix diviſions du nombre 5, qui ont été faites n. 1. il ne faut prendte aucune de celles où 1 ſe trouve: parceque ſi la propoſée avoit une racine du premier degré, elle ſe ſeroit manifeſtée par les diviſions, qui ont precedé. Il ne reſte donc que la diviſion faite en 2. 3. laquelle fait connoître, qu'il faut prendre la produite de deux équations, dont l'une ſoit du ſecond, l'autre du troiſiéme degré.

Pour plus grande facilité, je change la propoſée en celle-ci $x^5 - px^4 + qx^3 - rxx + sx - t = 0$, dont je comparerai les termes avec ceux

de $x^5 + fx^4 \begin{matrix} + gx^3 + hxx \\ \\ + nx^3 + nfxx \end{matrix} + ngx + nh = 0$. produite par la multiplication des deux $x^3 + fxx + gx + h = 0$, $xx + n = 0$, dans laquelle je suppose que le second terme manque.

Les seconds termes $+ fx^4 = - px^4$, $f = - p$.

Les troisiémes $+ gx^3 + nx^3 = + qx^3$, $g = q - n$.

Les cinquiémes $+ ngx = + sx$, $g = \frac{s}{n} = q - n$; $s = qn - nn$; $nn - qn = - s$; $n = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} = 4 \pm 1$. Donc $n = 5$, $n = 3$. & $xx + n = 0$, se change en $xx + 5 = 0$, $xx + 3 = 0$.

Maintenant je divise la proposée $x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0$ par $xx + 5 = 0$, la division ne se fait pas exactement, d'où je conclus, que $xx + 5 = 0$ n'est pas une racine de la proposée. Je fais ensuite la division par $xx + 3 = 0$, le quotient exact est $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$, d'où je conclus que $xx + 3 = 0$ & $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$ sont les racines de la proposée. L'équation $xx + 3 = 0$, donne $x = \pm \sqrt{- 3}$. L'équation $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$ ne peut plus se diviser, ainsi on en cherche les racines, comme vous verrez Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. n. 2. si la proposée n'avoit pû être divisée ni par $xx + 5 = 0$, ni par $xx + 3 = 0$, elle auroit été proprement du cinquiéme degré, & entierement irreductible.

3. Soit proposée l'équation $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8xx + 5x - 1 = 0$, qui n'a point pû être divisée ni par aucun binome du premier degré, ni par aucun du second, en supposant qu'il n'avoit point de second terme : il faut encore voir, si elle pourroit être divisée par un binome du second degré, qui a un second terme.

Pour cela l'on prend les deux équations $x^3 + fxx + gx + h = 0$, $xx + mx + n = 0$, dont le produit est

$$x^5 \begin{matrix} + fx^4 & + gx^3 & + hxx & & \\ & & & + hmx & \\ & & & & + hn = 0, \\ + mx^4 & + mfx^3 & + gmxx & & \\ & & & + gnx & \\ & + nx^3 & + fnxx & & \end{matrix}$$

dont il faut comparer les termes avec ceux de la proposée, après l'avoir changé en $x^5 - px^4 + qx^3 - rxx + sx - t = 0$.

Les seconds termes $+ fx^4 + mx^4 = - px^4$, $f = - p - m$.

Les troisiémes $+ g + mf + n = + q$, $g = q - mf - n$, & pour f mettant sa valeur, $g = q + mp + mm - n$.

Les sixiémes $+ hn = - t$, $h = \frac{-t}{n}$.

Les

Les cinquiémes $+hm+gn=+s$, & mettant pour h sa valeur, $-\frac{mt}{n}+gn=s$; & substituant encore pour g sa valeur, $mm+pm-\frac{tm}{nn}+q-n-\frac{s}{n}=0$. qui, après la substitution des valeurs de p, q, s, t, se change en $mm\begin{smallmatrix}+4m\\-\frac{m}{nn}\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}+6\\-n\\-\frac{5}{n}\end{smallmatrix}=0$.

Dans l'équation du second degré $xx+mx+n=0$, je dois découvrir la valeur de m & de n. Dans l'équation qui vient de résulter de la comparaison des termes j'ai laissé n arbitraire; parceque les termes $bn=-t=-1$. font connoître que n est un diviseur exact du dernier terme 1. de la proposée. Ici ce dernier terme n'a point d'autre diviseur exact que 1.

Il faut donc substituer 1 pour n dans $mm\begin{smallmatrix}+4m\\-\frac{m}{nn}\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}+6\\-n\\-\frac{5}{n}\end{smallmatrix}=0$, il vient $mm\begin{smallmatrix}+4m\\-\frac{m}{1}\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}+6\\-1\\-\frac{5}{1}\end{smallmatrix}=0$, $mm+3m=0$, $m=-3$. Après quoi l'on doit mettre la valeur -3 de m, $+1$ de n dans $xx+mx+n=0$; afin d'avoir $xx-3x+1=0$. avec laquelle on divise la proposée $x^5-4x^4+6x^3-8xx+5x-1=0$. Et parceque la division est juste, & que le quotient est $x^3-1xx+2x-1=0$; ce diviseur & ce quotient sont les racines de la proposée, le diviseur $xx-3x+1=0$ donne $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$; le quotient $x^3-1xx+2x-1=0$ ne peut pas se diviser; ainsi il faut chercher les valeurs de x, qu'il contient, comme on fait dans les équations cubiques. Voyez Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemp. 5. n. 2.

Si la division precedente n'avoit pas réüssi, j'aurois substitué -1 pour n, qui auroit donné $mm+3m+12=0$, $m=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{39}{4}}$.

Et j'aurois fait le reste, comme auparavant. Si le dernier terme de la proposée avoit plusieurs diviseurs exacts, je les aurois substitué de même avec le signe $+$ & -1, & si aucune division n'avoit été exacte, la proposée auroit été irreductible & proprement du cinquiéme degré. On chercheroit les racines, comme on fera Part. V.

La comparaison des quatriémes termes $+h+gm+fn=-r$ pourroit faire évanoüir m, de sorte qu'il ne resteroit que n d'inconnuë; mais n monteroit à un degré trop élevé.

4. Si l'équation étoit litterale, l'on prendroit de la même façon tous les diviseurs du dernier terme, que l'on substitueroit les uns après les autres à la place de n, pour faire les divisions de la proposée.

ARTICLE IV.

Pour les Equations de ſix dimenſions.

1. DIviſez le nombre 6 expoſant de la haute puiſſance en autant de nombres qu'il ſe peut, de telle façon que la ſomme de tous les nombres de chaque diviſion pris enſemble faſſe 6. Premiere diviſion 1, 1, 1, 1, 1, 1; ſeconde 1, 1, 1, 1, 2; troiſiéme 1, 1, 1, 3; quatriéme 1, 1, 4; cinquiéme 1, 5; ſixiéme 1, 2, 3; ſeptiéme 1, 1, 2, 2; huitiéme 2, 2, 2; neuviéme 2, 4; dixiéme 3, 3.

Parmi ces diviſions, aprés avoir tenté de diviſer l'équation propoſée avec tous les binomes du premier degré, il faut laiſſer celles où 1 ſe trouve; parceque ſi la propoſée avoit une racine du premier degré, on l'auroit découverte par les precedentes diviſions. D'un autre côté la diviſion par 2, 2, 2. ſe peut laiſſer, parceque la diviſion par 2, 4. manifeſtera les racines du ſecond degré, s'il y en a. Il reſte donc 2, 4; & 3, 3. c'eſt-à-dire qu'il ſuffit de reduire l'équation propoſée à celles des transformées, qui viennent de la multiplication de deux autres, qui ont moins de dimenſions, & qui ſont ou une du ſecond degré & une du quatriéme, ou toutes deux du troiſiéme.

2, Etant propoſée une équation du ſixiéme degré $z^6 - 11z^5 + 23z^4 - 29z^3 + 43zz - 14z + 2 = 0$, ou $z^6 - pz^5 + qz^4 - rz^3 + szz - tz + v = 0$. Prenez une équation du quatriéme degré, $z^4 + fz^3 + gzz + hz + k = 0$ qui ait tous ſes termes, & une du ſecond $zz + n = 0$, qui n'ait point du ſecond terme; multipliez-les l'une par l'autre,

le produit eſt $$z^6 + fz^5 \begin{matrix} + gz^4 + hz^3 + kzz \\ + nz^4 + fnz^3 + gnzz \end{matrix} + hnz + kn = 0.$$

Comparez les termes avec ceux de la propoſée; pour en conclurre la valeur de n.

Les ſeconds termes $+f = -p$.

Les ſeptiémes $+v = kn$, $k = \frac{v}{n}$.

Les troiſiémes $g + n = +q$, $g = q - n$.

Les cinquiémes $k + gn = +s$; ſubſtituez les valeurs de k & de g; ce ſera $v + qnn - n^3 = ns$. Mais n monte ici au troiſiéme degré.

Il faut donc voir, ſi par la comparaiſon d'autres termes l'on pourra former une équation où n n'ait que deux dimenſions.

Les ſixiémes $+ hn = -t$, $h = \frac{-t}{n}$.

Les quatriémes $+h+fn=-r$ mettez pour h & f leur valeur, vous ferez $nn-\frac{rn}{p}=-\frac{t}{p}$; ſubſtituez les valeurs de p, r, t; ce ſera $nn-\frac{29}{11}n=-\frac{14}{11}$; d'où l'on tire $n=\frac{29}{22}\pm\frac{15}{22}$; $n=2$, $n=\frac{7}{11}$. Donc $zz+n=zz+2=0$.

Diviſez à preſent la propoſée par $zz+2=0$, la diviſion ſera juſte, & le quotient $z^4-11z^3+21zz-7z+1=0$; ce qui montre que ces deux équations ſont les racines de la propoſée. $zz+2=0$ donne $z=\pm\sqrt{2}$. $z^4-11z^3+21zz-7z+1=0$ ne peut pas ſe diviſer, ainſi il faut en chercher les racines comme Part. 4. Sect. 1.

Quand aucune de ces diviſions ne réüſſit, l'on vient à une transformée produite par deux équations, l'une du ſecond, l'autre du quatriéme degré, qui ont tous leurs termes. Soit propoſée $z^6-13z^5+45z^4-71z^3+57zz-16z+2=0$, ou $z^6-pz^5+qz^4-rz^3+szz-tz+v=0$, que l'on ſuppoſe égale à l'équation produite par les deux $z^4+fz^3+gzz+hz+k=0$, $zz+mz+n=0$; & c'eſt

$$z^6 \begin{matrix} +fz^5 & +gz^4 & +hz^3 & & \\ & & & +kzz & +kmz \\ & & & & & +kn+0. \\ +mz^5 & +fmz^4 & +gmz^3 & +hmzz & +hnz \\ & +nz^4 & +fnz^3 & +gnzz & \end{matrix}$$

Voici la comparaiſon des termes.

Les ſeconds $f+m=-p$, $f=-p-m$.

Les troiſiémes $g+fm+n=+q$, ou mettant pour f ſa valeur $g=q+mm+mp-n$.

Les ſeptiémes $+kn=v$, $k=\frac{v}{n}$.

Les ſixiémes $+km+hn=-t$, ou mettant pour k ſa valeur; $h=\frac{-t}{n}\frac{-vm}{nn}$.

Les cinquiémes $+k+hm+gn=s$, ou mettant pour k, h, g leurs valeurs, il vient

$$mm\;\frac{\begin{matrix} +n^3pm & +vn \\ -ntm & +qn^3 \\ & -n^4 \\ & -nns \end{matrix}}{n^3-v}=0.$$

$$mm\;\frac{\begin{matrix} +13n^3m & +2n \\ -16nm & +45n^3 \\ & -n^4 \\ & -57nn \end{matrix}}{n^3-2}=0$$

en ſubſtituant les valeurs de p, q, s, t, v.

Après cela pour connoître la valeur de m, il faut mettre successivement les differentes valeurs de n avec le signe + & —. Or parceque $kn = v = 2$, n est un diviseur exact du dernier terme 2 de la proposée. La substitution de ± 1 pour n ne donne pas une valeur de m telle qu'étant mise dans $zz + mz + n = 0$, la division de la proposée se fasse exactement. Je suppose donc $n = +2$, ce qui donne $mm + 12m + 20 = 0$, d'où l'on tire $m = -2$; & $zz - 2z + 2 = 0$, & cette derniere équation divise exactement la proposée, & donne le quotient $z^4 - 11z^3 + 21zz - 7z + 1 = 0$. Ce diviseur & ce quotient sont donc des racines de la proposée. $zz - 2z + 2 = 0$ fournit $z = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Mais $z^4 - 11z^3 + 21zz - 7z + 1 = 0$ ne peut plus être divisée, & l'on en cherche les racines comme Part. 4. Sect. 1. Art. 2. Ex. 4.

3. Si les Operations de n. 1. 2. ne réüssissent pas, l'on vient à deux équations du troisiéme degré. Au commencement l'on suppose que le second terme manque dans l'une des deux, ensuite qu'il ne manque dans aucune.

Soit proposée l'équation $z^6 - 7z^5 + 7z^4 - 27z^3 + 17zz - 29z + 12 = 0$ ou $z^6 - pz^5 + qz^4 - rz^3 + szz - tz + v = 0$, que l'on suppose égale à une autre de même forme, produite par la multiplication de $z^3 + fzz + gz + h = 0$ par $z^3 + mz + n = 0$, & c'est

$$\begin{array}{llllll} & +gz^4 & +hz^3 & +gmzz & +hmz & \\ z^6 + fz^5 & +mz^4 & +fmz^3 & & & +hn \quad 0. \\ & & +nz^3 & +fnzz & +gnz & \end{array}$$

L'on regarde n comme un des diviseurs du dernier terme 12, & l'on cherche la valeur de m.

Les troisiémes termes $+g + m = q$, $g = q - m$.

Les septiémes $+hn = v$, $h = \frac{v}{n}$.

Les sixiémes $hm + gn = -t$, ou substituant les valeurs de h, g; il vient $m = \frac{-qnn - nt}{v - nn} = \frac{-7nn - 29n}{12 - nn} = \frac{-7 + 29}{12 - 1} = 2$ en supposant $n = -1$. Donc $z^3 + mz + n = 0$ est $z^3 + 2z - 1 = 0$, qui divise juste la proposée, & fait le quotient $z^3 - 7zz + 5z - 12 = 0$, qui ne peut plus se diviser. Il faudra chercher les racines tant du diviseur que du quotient, comme Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. n. 2. Ex. 5. n. 3.

4. Soit proposee l'équation $y^6 - 8y^5 + 13y^4 - 23y^3 + 10yy - 7y - 12 = 0$, ou $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty - v = 0$, dont on n'a point trouvé de racines par n. 1. 2. 3. vous la concevrez égale à une équation formée par la multiplication de deux équations du troisiéme degré qui ont tous leurs termes $y^3 + fyy + gy + h = 0$, $y^3 + myy + ny +$

$k = o$, & la transformée est

$$\begin{array}{llllll} y^6 + fy^5 & + gy^4 & + hy^3 & + hmyy & + hny & \\ + my^5 & + fmy^4 & + gmy^3 & + gnyy & + gky & \\ & + ny^4 & + ky^3 & + fkyy & & \\ & & + fny^3 & & & \end{array}$$

$+ hk = o.$

Les ſeconds termes $f + m = -p$, $f = -p - m.$

Les ſeptiémes $hk = -v$; $h = \frac{-v}{k}.$

Les ſixiémes $hn + gk = -t$, ou ſubſtituant la valeur de h; $g = \frac{-t}{k} + \frac{vn}{kk}.$

Les troiſiémes $g + fm + n = + q$, ou ſubſtituant les valeurs de g & f; $n = \frac{kkq + kt + kkmp + kkmm}{v + kk}$

Les quatriémes $+ h + gm + fn + k = - r$, pour h, g, f ſubſtituons leur valeur; $- \frac{v}{k} - \frac{tm}{k} + \frac{vmn}{kk} - pn - mn + k = - r$, multipliez par kk, $n = \frac{-kkr + kv + ktm - k^3}{vm - kkp - kkm} = \frac{kkq + kt + kkmp + kkmm}{v + kk}.$
D'où l'on tire, après avoir tout diviſé par k,

$$\begin{array}{llll} + kkvm^3 - 2k^4pmm & - k^4ppm & + k^5 & \\ - k^4m^3 + kkpvmm & - k^4qm & - k^4pq & = o. \\ & - 2k^3tm & + k^4r & \\ & + kkqvm & - k^3pt & \\ & & + kkrv & \\ & & - kvv & \end{array}$$

$$m^3 \; \frac{\begin{array}{llll} & & & + k^4 \\ & - k^3ppm & & - k^3pq \\ - 2k^3pmm & - k^3q & & + k^3r \\ + kpv & - 2k^2t & & - k^2pt \\ & + kqv & & + krv \\ & & & - vv \end{array}}{kv - k^3} = o.$$

Pour avoir les valeurs de m, n, k de l'équation $y^3 + myy + ny + k = o$, je regarde k comme un diviſeur exact du dernier terme $hk = v = 12$, dont les diviſeurs ſont $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Je prends d'abord $k = + 1$, & je ſubſtituë cette valeur de k dans l'équation $m^3 - 2k^3pmm$, &c. avec les valeurs de p, q, r, t, v; elle devient $m^3 + \frac{80mm + 65m - 4}{11} = o$, & ſuivant Part. 2. Sect. 2. Art. 7. pour ôter cette fraction, je fais $m = \frac{z}{11}$, & je multiplie le ſecond terme $80mm$ par 11, le troiſiéme $65m$ par 121, le quatriéme 4 par 1331. Ce qui produit $z^3 + 80zz$

$+ 715z - 484 = 0$; que je divise par un binome composé de $z +$ ou $-$ un des diviseurs exacts de 484. La division se fait par $z + 11 = 0$, le quotient est $zz + 69z - 44 = 0$. J'ai donc $z = -11$; donc $m = \frac{z}{11} = \frac{-11}{11} = -1$.

Après cela je substituë cette valeur de m dans $n = \frac{-kkr + kv + ktm - k^3}{vm - kkp - kkm}$, avec les valeurs de p, r, t, v, pour avoir $n = \frac{-19}{-19} = +1$.

Maintenant je substituë les valeurs trouvées de m, n, k, dans $y^3 + myy + ny + k$, & c'est $y^3 - 1yy + 1y + 1 = 0$. Avec cette équation je tente la division de la proposée, le quotient exact est $y^3 - 7yy + 5y - 12 = 0$. Ce diviseur & ce quotient sont les deux racines de la proposée. Enfin l'on cherche les racines de ces deux équations comme Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. Ex. 6.

Si en supposant $k = +1$ la chose n'avoit pas réüssi, il auroit fallu faire la même chose à l'égard de tous les diviseurs de 12 dernier terme, de la proposée.

5. Soit proposée l'équation $x^6 ** + x^3 - 4xx + 6x - 2 = 0$, ou $x^6 ** + rx^3 - sxx + tx - v = 0$. Le second terme qui manque, prouve qu'elle est le produit de deux équations du troisiéme degré, qui n'avoient aussi point de second terme. Je suppose que c'est $x^3 + gx + h = 0$, $x^3 + mx + n = 0$. dont le produit est

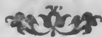
$$x^6 * \begin{array}{l} + gx^4 \\ + mx^4 \end{array} \begin{array}{l} + hx^3 \\ + nx^3 \end{array} + gmxx \begin{array}{l} + hmx \\ + gnx \end{array} + hn = 0.$$

Les troisiémes termes $g + m = 0$, $g = -m$.

Les cinquiémes $gm = -s$, $g = \frac{-s}{m} = -m$. Donc $mm = s = 4$. $m = 2$.

Dans $x^3 + mx + n = 0$, je substituë cette valeur de m, avec un des diviseurs du dernier terme pour n, à cause de $hn = -2$; par exemple -1. Je trouve $x^3 + 2x - 1 = 0$, qui divise sans reste la proposée, le quotient est $x^3 - 2x + 2 = 0$. Ainsi la proposée a été produite par la multiplication de ce diviseur & de ce quotient.

6. Lorsqu'après avoir fait sur une équation proposée de six dimensions toutes les operations marquées n. 1. 2. 3. 4. 5. l'on n'a point pû découvrir de ses racines : elle est irreductible, & proprement du sixiéme degré, & l'on cherche ses racines, comme Part. 5.





PARTIE QUATRIEME.

SECTION I.

La Façon generale de construire les Problémes reduits à une Equation de trois ou quatre dimensions.

M. DESCARTES.

OR quand on est assuré que le Probléme proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que jusqu'au cube, on peut toûjours en trouver les racines par l'une des trois Sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites & de cercles. Mais je me contenterai ici de donner une Regle generale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Premierement il faut ôter le second terme de l'équation proposée, s'il n'est déja nul, & ainsi la reduire à telle forme $z^3 = * . apz . aaq$. si la quantité inconnuë n'a que trois dimensions; ou bien à telle, $z^4 = * . apzz . aaqz . a^3r$, si elle en a quatre; ou bien en prenant a pour l'unité, à telle $z^3 = * . pz . q$, & à telle $z^4 = * . pzz . qz . r$.

Après cela, Fig. 232. 233. 234. 235. supposant que la parabole FAG est déja décrite, & que son aissieu est $ACDKL$, & que son côté droit est a au 1, dont AC est la moitié, & enfin que le point C est au dedans de cette parabole, & que A en est le sommet; il faut Fig. 232. 233. 235. faire $CD = \frac{1}{2}p$, & la prendre Fig. 232. 235. du même côté qu'est le point A, au regard du point C, s'il y a $+ p$ en l'équation. Mais s'il y a $- p$, il faut Figure 233. la prendre de l'autre côté. Et du point D Figure 232. 233. 235. ou bien si la quantité p étoit nulle, du point

C Fig. 234. il faut élever une ligne à angles droits jusques à *E*, en sorte qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}q$. Et enfin du centre *E* il faut décrire le cercle *FG*, dont le demi-diametre soit *AE*, si l'équation n'est que cubique, en sorte que la quantité *r* soit nulle. Mais quand il y a $+ r$, il faut dans cette ligne prolongée *AE* prendre Fig. 232. d'un côté *AR* égale à *r*, & de l'autre *AS* égale au côté droit de la parabole, qui est 1; & ayant décrit un cercle dont le diametre soit *RS*, il faut faire *AH* perpendiculaire sur *AE*, laquelle *AH* rencontre ce cercle au point *H*, qui est celui, où l'autre cercle *FGH* doit passer. Et quand il y a $- r$, il faut après avoir ainsi trouvé Fig. 235. la ligne *AH*, inscrire *AI*, qui lui soit égale, dans un autre cercle, dont *AE* soit le diametre, & lors c'est par le point *I*, que doit passer *FIG* le premier cercle cherché. Or ce cercle *FG* peut couper ou toucher la parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 points, desquels tirant des perpendiculaires sur l'aissieu, on a toutes les racines de l'équation tant vrayes que fausses. A savoir si la quantité *q* est marquée du signe $+$, les vrayes racines seront celles de ces perpendiculaires, qui se trouveront du même côté de la parabole, que *E* le centre du cercle, comme *FL*; & les autres comme *GK* seront fausses.

Mais au contraire si cette quantité *q* est marquée du signe $-$ 1 les vrayes seront celles de l'autre côté; & les fausses ou moindres que rien seront du côté où est *E* le centre du cercle. Et enfin si ce cercle ne coupe ni ne touche la parabole en aucun point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine ni vraye ni fausse en l'équation, & qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette Regle est la plus generale & la plus accomplie qu'il soit possible de souhaitter.

Et la démonstration en est fort aisée. Car si la ligne *GK* trouvée, Fig. 232. par cette construction se nomme z, *AK* sera zz à cause de la parabole, en laquelle *GK* doit être moyenne proportionelle entre *AK* & le côté droit, qui est 1. Puis si de *AK* j'ôte *AC*, qui est $\frac{1}{2}$, & *CD* qui est $\frac{1}{2}p$, il reste *DK* ou *EM*, qui est $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le quarré est $z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p$

$\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et à cause que *DE*, ou *KM* est $\frac{1}{2}q$, la toute *GM* est $z + \frac{1}{2}q$, dont le quarré est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$; & assemblant ces deux quarrez, on a $z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$ pour le quarré de la ligne *GE*, à cause qu'elle est la base du triangle rectangle *EMG*.

Mais à cause que cette ligne *GE* est le demi-diametre du cercle *FG*, elle se peut encore expliquer en d'autres termes, à sçavoir *ED* étant $\frac{1}{2}q$, & *AD* étant $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, *EA* est $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$ à cause de l'angle droit *ADE*, puis *HA* étant moyenne proportionelle entre *AS*, qui est 1, & *AR* qui est r, elle est $\sqrt{r}$; & à cause de l'angle droit *EAH*, le quarré de *HE*, ou *EG* est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$. Si bien qu'il y a équation entre cette somme & la precedente. Ce qui est le même que $z^4 = * pzz - qz + r$. Et par consequent la ligne trouvée *GK*, qui a été nommée z, est la racine de cette équation. Ainsi qu'il falloit démontrer. Et si vous appliquez ce même calcul à tous les autres cas de cette Regle, en changeant les signes + & — selon l'occasion, vous y trouverez vôtre compte en même sorte, sans qu'il soit besoin, que je m'y arrête.

ARTICLE I.

Construction des Equations cubiques.

REGLE I.

Lorsqu'on a connu, qu'un Problême du troisiéme degré est solide, Part. 3. Sect. 3. Art. 2. l'on fait évanoüir le second terme de l'équation, s'il n'est pas déja nul : ce qui la reduit à cette forme $z^3 = * . apz . aaq$, ou étant $a = 1$, $z^3 = * . pz . q$. de sorte pourtant que le troisiéme terme apz, ou pz peut encore être nul : ainsi il y a six formes.

1. $z^3 = * + apz + aaq$. ou $z^3 = * + pz + q$.
2. $z^3 = * + apz - aaq$. ou $z^3 = * + pz - q$.
3. $z^3 = * - apz + aaq$. ou $z^3 = * - pz + q$.
4. $z^3 = * - apz - aaq$. ou $z^3 = * - pz - q$.
5. $z^3 = * \quad * + aaq$. ou $z^3 = * \quad * + q$.
6. $z^3 = * \quad * - aaq$. ou $z^3 = * \quad * - q$.

Car pour les formes, où le dernier terme aaq ou q manque ; elles

donnent un Problême plan, $z^3 = * \pm apz *$ se reduit, en divisant tout par z, à $zz = * \pm ap$, $z = \pm \sqrt{\pm ap}$, qui est un Problême plan.

REGLE II.

Les lignes a, p, q sont près de Fig. 232.

Si l'on veut construire le Problême cubique avec le cercle & la parabole: l'on décrit d'abord une parabole, dont le parametre ou côté droit est $a = 1$,
FIG. 234. 236. 237. 238. le sommet A Fig. 234. 236. 237. 238. l'axe $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$.

REGLE III.

Lorsqu'il y a $+p$ dans l'équation, l'on prend encore $CD = \frac{1}{2}p$ sur ce même axe Fig. 236. du même côté qu'est le point C à l'égard du point A. Mais lorsqu'il y a $-p$, l'on prend $CD = \frac{1}{2}p$ sur l'axe prolongé s'il est necessaire, de l'autre côté de C, c'est-à-dire en retournant de C vers A; Fig. 237. 238. Et lorsque $p = o$, $pz = o$, l'on ne prend point CD, & l'on n'a pas le point D, Fig. 234.

REGLE IV.

Au point D Fig. 236. 237. 238. s'il y a p dans l'équation, ou au point C Fig. 234. si $p = o$, l'on éleve DE ou $CE = \frac{1}{2}q$ perpendiculaire à l'axe AC. Et du point E comme centre, de l'intervale EA Fig. 234. 236. 237. 238. l'on décrit le cercle FGA.

REGLE V.

Il peut y avoir autant de points d'intersection du cercle avec la parabole, qu'il peut y avoir de racines dans l'équation, que l'on construit, c'est-à-dire qu'il peut y en avoir trois; s'il y a un point touchant, il n'y en aura qu'un coupant, à cause que le point touchant équivaut à deux coupans, Part. 3. Sect. 2. Art. 2. Il peut aussi arriver que le cercle ne touche, ni ne coupe la parabole en aucun point.

De tous les points d'intersection ou de contact l'on abaisse des perpendiculaires ou des appliquées sur l'axe, ce sont autant de racines de l'équation à construire. L'appliquée tirée d'un point touchant marque deux racines égales, ainsi quand le cercle touche en un point la parabole, il la peut couper en un autre point seulement, qui donnera la troisiéme racine: mais il ne peut pas la toucher une seconde fois, autrement il y aura quatre racines dans une équation cubique, ce qui ne se peut. Part. 2. Sect. 1. Art. 2. n. 9. Les points qui manquent, donnent à connoître les racines imaginaires: ainsi il y a une racine imaginaire, s'il n'y a que deux points coupans, ou un touchant; & deux imaginaires, s'il n'y a qu'un point coupant; mais il ne peut pas y avoir trois racines imaginaires, parceque

le cercle coupant la parabole au sommet A, doit encore necessairement la couper ailleurs.

Au reste toutes les constructions supposent que les équations cubiques sont élevées au quatriéme degré par la multiplication de $z = o$, de sorte que $z^3 = * + pz + q = o$ est équivalemment $z^4 = * + pzz + qz = o$. Car 1° la section faite au sommet de la parabole donne une racine aussi bien que les autres sections, & ce ne peut être que $z = o$; 2° toutes les preuves donnent le premier terme de quatre dimensions & tous les termes multipliez par l'inconnuë, lesquels on divise d'abord par l'inconnuë égale à zero. Ainsi ces preuves donnent quatre racines.

REGLE VI.

Lorsqu'il y a $+ q$ dans l'équation à construire, les racines vrayes sont du même côté de l'axe, où le centre E se trouve, comme FL; & les fausses sont de l'autre KG Figure 232. Au contraire lorsqu'il y a $- q$ les racines fausses sont du côté, où est le centre E, & les vrayes de l'autre.

Venons aux Exemples, & commençons par les plus simples.

EXEMPLE I. $z^3 = ** + aaq$, $z^3 = ** + q$.

1. L'On a Liv. 1. Part. 1. Sect. 1. Probl. 4. $z^3 = \frac{1}{2}a^3$, qui se reduit en faisant $\frac{1}{2}a = q$, $a = 1$, à $z^3 = aaq = q$. L'on a trouvé dans ce même endroit la valeur de z, en suivant les Regles de cet Article.

2. L'on a encore dans ce même endroit $x^3 = \frac{1}{2}c^3$, ou $x^3 = q$ en faisant $\frac{1}{2} = q$, $c = 1$. La valeur de x peut se trouver de la même façon.

3. L'on a Liv. 1. Part. 2. Art. 1. n. 1. $x^3 = a + \sqrt{aa + bb}$, ou $x^3 = q$ en faisant $a + \sqrt{aa + bb} = q$.

Je décris Fig. 234. une parabole, dont le parametre est la ligne a, que je prends pour l'unité Regle 2. sur l'axe AB je coupe $AC = \frac{1}{2}$ Reg. 3. au point C Regle 4. j'éleve $CE = \frac{1}{2}q$ perpendiculaire à l'axe. Et du point E comme centre, de l'intervale EA, je décris le cercle AGF, qui coupe la parabole en F. L'appliquée FL est la valeur positive de x Regle 6. parcequ'il y a $+ q$. Joignez EA, EF; prolongez LF en I; du centre E abaissez EM perpendiculaire sur FI. Nommez AL, v; LF, x. Fig. 234.

Dém. EC est $\frac{1}{2}q = LM$, FM est $LM - LF$, $\frac{1}{2}q - x$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 =$ parametre $1 \times AL$, $xx = 1v$, $v = xx = AL$; CL est $AL - AC$, $xx - \frac{1}{2} = EM$.

Maintenant dans le triangle rectangle ECA, $\overline{EA}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$. Dans le triangle rectangle EMF, $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, x^4

$+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}qq-qx$. Mais les rayons EA, EF sont égaux : donc $\overline{EA}^2 = \overline{EF}^2$, $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}=x^4+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}qq-qx$; $x^4-qx=0$, $x^3=q$. Ainsi FL a été bien supposée égale à x. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine vraye de $x^3=q$ est donc $x=\sqrt[3]{q}$; si l'on divise l'équation $x^3-q=0$ par $x-\sqrt[3]{q}$, le quotient est $xx+x\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{qq}$, qui contient les deux autres racines qui sont $x=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{q}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{qq}}$ imaginaires.

EXEMPLE II. $z^3=**-aaq.\ z^3=**-q.$

FAites la même construction que Ex. 1. n. 3. parcequ'il y a $-q$, l'appliquée FL est $-z$ Regle 6.

Dém. EC est $\frac{1}{2}q=LM$; FM est $LM-LF$, $\frac{1}{2}q+z$; par la nature de la parabole AL est zz comme Ex. 1. & $CL=AL-AC$, $zz-\frac{1}{2}=EM$.

Vous avez aussi dans le triangle rectangle ECA, $\overline{EA}^2=\overline{EC}^2+\overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}$; dans le triangle rectangle EMF, $\overline{EF}^2=\overline{EM}^2+\overline{FM}^2$, $z^4-zz+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}qq+qz+zz$. Et si vous comparez $\overline{EA}^2$ & $\overline{EF}^2$, il viendra $z^4+qz=0$, $z^3=-q$. $z=\sqrt[3]{-q}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Les deux autres racines sont $z=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-q}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{qq}}$ imaginaires.

EXEMPLE III. $z^3=*+apz+aaq.\ +z^3=*pz+q.$

1. L'On a Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 4. n. 3. $x^3+\frac{1}{2}ppx-pvx-\frac{1}{2}app=0$. qui se reduit à $x^3*-3x-1=0$, en prenant $p=1$, $v=3\frac{1}{2}$, $a=2$. $x^3=*+3x+1$. où 3 répond à p de la formule, & 1 à q.

FIG. 236. Il faut décrire Fig. 236. la parabole AF, dont le parametre soit $p=1$, l'axe AL, le sommet A, Regle 2. & couper $AC=\frac{1}{2}$. Ensuite Regle 3. l'on prendra $CD=\frac{3}{2}$. Parcequ'il y a $+3$, au point D, Regle 4. l'on élevera la perpendiculaire $DE=\frac{1}{2}$; & du point E comme centre, de l'intervale EA l'on décrira le cercle FGA, qui coupe la parabole AF aux points F, G, g. Les droites FL, GK, gk tirées de ces points perpendiculairement sur l'axe AL sont les valeurs de x Regle 5. & Regle 6. FL est une racine vraye, GK, gk deux fausses. Ce qu'il faut montrer au point G, en supposant $GK=-x$, $AK=y$.

Dém. ED est $\frac{1}{2}=mK$; Gm est $GK+mK$, $-x+\frac{1}{2}$; par la nature de la parabole $\overline{GK}^2=$ parametre $1\times AK$, $xx=1y$, $y=xx=AK$; AD est $AC+CD$, $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$; KD est $AD-AK$, $2-xx=Em$; ED est $\frac{1}{2}=mK$; $Gm=GK+Km$, $-x+\frac{1}{2}$.

Maintenant $\overline{EA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$, $4 + \frac{1}{4}$; $\overline{EG}^2 = \overline{Gm}^2 + \overline{Em}^2$, $xx - x + \frac{1}{4} + 4 - 4xx + x^4$. Donc $\overline{EA}^2 = \overline{EG}^2$, $4 + \frac{1}{4} = xx - x + \frac{1}{4} + 4 - 4xx + x^4$; $x^4 - 3xx - x = 0$; $x^3 = * + 3x + 1$. Ce qu'il &c.

On peut faire la démonstration au point F en supposant $FL = + x$; $AL = y$; & au point g en supposant $gk = - x$, $Ak = y$.

2. L'on a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 1. n. 2. $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$, dont vous ôterez le second terme en faisant $x - \frac{7}{3} = v$, $v + \frac{7}{3} = x$.

Ce qui donne $v^3 * - \frac{34}{3}v - \frac{645}{27} = 0$; $v^3 = * + \frac{34}{3}v + \frac{215}{9}$. Faisons $1 = a$, $\frac{34}{3} = p$, $\frac{215}{9} = q$. L'équation se changera en $v^3 = * + apv + aaq$.

On construira cette équation en coupant $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, en élevant la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$; le cercle ne coupera la parabole qu'en un point F, & l'on n'aura qu'une racine vraye; les deux autres étant imaginaires.

FL, v étant ainsi trouvé, si on lui ajoûte $\frac{7}{3}$, l'on aura la valeur de x qu'on cherche.

3. On pourra construire de la même maniere l'équation, qui se trouve Liv. 3. Part. 2. Sect. 2. Art. 3. n. 2.

EXEMPLE IV. $z^3 = * + apz - aaq$. $z^3 = * + pz - q$.

Il n'y a point d'autre difference de l'Exemple 3. si ce n'est que Regle 6. FL est la racine fausse, & que les autres sont les vrayes.

1. Il sera donc aisé de construire l'équation de Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 4. n. 3. $x^3 * + \frac{1}{2}ppx - pvx + \frac{1}{2}app = 0$, qui se reduit à $x^3 = * + 3x - 1$, en faisant $p = 1$, $v = \frac{7}{2}$, $a = 2$. L'on trouvera deux racines vrayes GK, gk, & une fausse FL.

2. Et l'équation de Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 5. §. 2. $x^3 * - \frac{1}{3}ax\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3 = 0$, qui se reduit à $x^3 = * + apx - aaq$, en faisant $a = 1$, $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2} = p$, $\frac{2}{27}a = q$. L'on trouvera deux racines vrayes GK, gk, une fausse FL.

C'est la même chose de $y^3 * - \frac{1}{3}ay\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3$, qui est au même endroit.

3. L'on a Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. Ex. 3. $y^3 - 6ayy + 9aay + 2a^3 = 0$, qui ne peut se diviser par aucun binome, l'on fait Regle 1. évanoüir le second terme, en prenant $y - 2a = z$, $z + 2a = y$, & la reduite est $z^3 * - 3aaz + 4a^3 = 0$, $z^3 = * + 3aaz - 4a^3$. $z^3 = * + apz - aaq$, en faisant $3a = p$, $4a = q$.

Pour la construction décrivez Regle 2. la parabole AF, Fig. 237. dont le parametre est $a = 1$, le sommet A, l'axe AC; prenez $AC =$ Fig. 237.

$\frac{1}{2}a$; parcequ'il y a $-p$; prenez $CD = \frac{1}{2}p$, en allant de C vers A Regle 3. Au point D Regle 4. élevez la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Du point E comme centre, de l'intervale EA, décrivez le cercle AF, qui coupera la parabole au point F; tirez FL appliquée à l'axe; parcequ'il y a $+q$, c'est une racine vraye. Nommez FL, z; AL, v. Joignez EA, EF; prolongez FL en M, abaissez la perpendiculaire EM.

Dém. ED est $\frac{1}{2}q = LM$; FM est $LM - LF$, $\frac{1}{2}q - z$; DA est $CD - AC$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = av$, $v = \frac{zz}{a} = AL$; $DL = DA + AL$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a + \frac{zz}{a} = EM$.

A present dans les triangles rectangles EDA, EMF, qui ont les rayons EA, EF pour bases; $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}aa = \overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MF}^2$, $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}ap + \frac{pzz}{a} + \frac{1}{4}aa - zz + \frac{z^4}{aa} + \frac{1}{4}qq - qz + zz$, qui se reduit à $\frac{pzz}{a} + \frac{z^4}{aa} - qz = 0$, $z^3 = * - apz + aaq$. Ce qu'il, &c.

Le cercle AF ne peut jamais couper la parabole, que dans un point, ainsi, il ne peut y avoir qu'une valeur de z. Si à z ainsi trouvée vous ajoûtez $2a$, vous aurez la valeur de y.

EXEMPLE V. $z^3 = * - apz + aaq$. $z^3 = * - pz + q$.

2. On a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 3. n. 3. $x^3 - xx + 2x - 1 = 0$, dont on fait évanoüir le second terme en prenant $x - \frac{1}{3} = z$, $z + \frac{1}{3} = x$, la reduite est $z^3 * + \frac{5}{3}z - \frac{11}{27} - 0$, $z^3 = * - \frac{5}{3}z + \frac{11}{27}$ qui se construira comme l'équation de n. 1.

On a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 4. n. 3. $z^3 = * - zz + 1$. dont la construction est semblable à celle de n. 1.

EXEMPLE VI. $z^3 = * - apz - aaq$. $z^3 = * - pz - q$.

IL n'y a point d'autre difference de cet Exemple & du precedent, si ce n'est que Regle 6. la racine FL est $-z$, parcequ'il y a $-q$.

1. On a Liv. 3. Sect. 5. Art. 4. n. 4. $y^3 - yy + y + 1 = 0$. Pour faire évanoüir le second terme, nous prendrons $y - \frac{1}{3} = z$, $z + \frac{1}{3} = y$, & nous formerons $z^3 * + \frac{2}{3}z + \frac{34}{27} = 0$; $z^3 = * - \frac{2}{3}z - \frac{34}{27}$. ou $z^3 = * - apz - aaq$, en faisant $a = 1$. $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{34}{27}$.

FIG. 238. La construction se fait Fig. 238. en prenant $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, $DE = \frac{1}{2}q$; le parametre de la parabole AC étant a. L'appliquée FL est $-z$. Nommons AL, v.

Dém. ED est $\frac{1}{2}q = LM$; FM est $FL - ML$, $-z - \frac{1}{2}q$; DA est $AC - CD$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = av$, $v = \frac{zz}{a} = AL$; $DL = AL - AD$, $\frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p = EM$.

Après cela dans les triangles rectangles EDA, EMF, dont les bases EA, EF sont égales, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp = \overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MF}^2$, $\frac{z^4}{aa} - zz + \frac{pzz}{a} + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + zz + qz + \frac{1}{4}qq$; qui se reduit à $\frac{z^4}{aa} + \frac{pzz}{a} + qz = 0$; $z^3 = * - apz - aaq$. Ce qu'il, &c.

Si à FL, $-z$ ainsi trouvée l'on ajoûte $\frac{1}{3}$, l'on aura $z + \frac{1}{3} = y$.

2. Il y a Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 5. §. 1. n. 5. $y^3 - \frac{3}{2}ayy + 3aay + 2a^3 = 0$.

Pour ôter la fraction je fais $2y = v$, $y = \frac{v}{2}$, je change l'inconnuë y en v, je multiplie le second terme par 2, le troisiéme par 4, le quatriéme par 8. Il vient $v^3 - 3avv + 12aav + 16a^3 = 0$, Pour ôter le second terme je prends $v - a = z$, $z + a = v$, ce qui donne la reduite $z^3 * + 9aaz + 26a^3 = 0$; $z^3 = * - 9aaz - 26a^3$, $z^3 = * - apz - aaq$, en supposant $p = 9a$, $q = 26a$.

3. Il faut construire l'équation $z^3 = * - pz - q$. étant $p = q = 1$ Fig. 239. Fig. 239.

Le parametre de la parabole AF est 1 AC est $\frac{1}{2}$, CD est $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p$; & le point D tombe sur le sommet A; DE est $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}q = ML = EF$; FL, $-z$; FM est $FL - ML$, $-z - \frac{1}{2}$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = 1 \times AL$, v; $zz = v = EM$.

Dém. Dans le triangle rectangle EMF; $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{1}{4} = z^4 + zz + z + \frac{1}{4}$; $z^4 + zz + z = 0$; $z^3 = * - z - 1 = * - pz - q$. Ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE II.

Construction des Equations quarré-quarrées.

REGLE I.

Lorsqu'on connoît qu'un Problême du quatriéme degré est solide, l'on fait évanoüir le second terme de l'équation, s'il n'est pas déja nul; ce qui le reduit à cette forme $z^4 = * . apzz . aaqz . a^3r$, ou supposant $a = 1$, $z^4 = * . pzz . qz . r$. de sorte pourtant que outre le second terme, il peut encore manquer le troisiéme : ce qui donne douze formes.

1. $z^4 = * + apzz + aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * + pzz + qz + r$.
2. $z^4 = * + apzz - aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * + pzz - qz + r$.
3. $z^4 = * + apzz + aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * + pzz + qz - r$.
4. $z^4 = * + apzz - aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * + pzz - qz - r$.
5. $z^4 = * - apzz + aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * - pzz + qz + r$.
6. $z^4 = * - apzz - aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * - pzz - qz + r$.
7. $z^4 = * - apzz + aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * - pzz + qz - r$.

8. $z^4 = * - apzz - aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * - pzz - qz - r$.
9. $z^4 = *\ \ * + aaqz + a^3r$. ou $z^4 = *\ \ * + qz + r$.
10. $z^4 = *\ \ * - aaqz + a^3r$. ou $z^4 = *\ \ * - qz + r$.
11. $z^4 = *\ \ * + aaqz - a^3r$. ou $z^4 = *\ \ * + qz - r$.
12. $z^4 = *\ \ * - aaqz - a^3r$. ou $z^4 = *\ \ * - qz - r$.

Car pour les formes où le cinquiéme manque avec le second $z^4 = * . apzz . aaqz *$, elles se reduisent au troisiéme après qu'on a divisé par z, $z^3 = * . apz . aaq$. celles dans lesquelles le quatriéme terme manque outre le second $z^4 = * . apzz * . a^3r$, elles sont du second degré $z^4 . apzz = . a^3r$. celles où le second, le troisiéme & le quatriéme termes sont nuls $z^4 = *** . a^3r$, ce sont encore des Problêmes plans $zz = \sqrt{a^3r}$, $z = \sqrt{\sqrt{a^3r}}$.

REGLE II.

Comme Regle 2. Art. 1.

REGLE III.

Comme Regle 3. Art. 1.

REGLE IV.

FIG. 232. 233. 235. 240. 241. 242. 243. 244.

Au point D Fig. 232. 233. 235. lorsqu'il y a p l'on éleve la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$; ou au point C, s'il n'y a point de p, l'on éleve $CE = \frac{1}{2}q$. Fig. 240. 241. 242.

REGLE V.

On joint EA, sur laquelle prolongée l'on prend d'un côté du sommet A la ligne $AS = a = 1$, & de l'autre $AR = r$. Ensuite sur le diametre RS l'on décrit le cercle RHS, & au point A l'on éleve la perpendiculaire AH, qui coupera le cercle RHS au point H.

REGLE VI.

Lorsqu'il y a $+ r$ dans l'équation, du point E comme centre, de l'intervale EH l'on décrit le cercle HGF, Fig. 232. 233. 243.

Lorsqu'il y a $- r$, avant que de décrire ce cercle GF, l'on décrit encore sur le diametre AE le demi-cercle AIE, dans lequel on inscrit la droite $AI = AH$. Alors du centre E, de l'intervale EI l'on décrit le cercle FGI, Fig. 242. 235. 244.

REGLE VII.

Le cercle FH peut couper la parabole en autant de points, que l'équation peut avoir de racines, c'est-à-dire en quatre. Chaque point touchant marque deux racines égales ; si le cercle coupe la parabole au sommet il y aura

aura une racine égale à zero, Fig. 244. si le cercle coupe la parabole en un point, & la touche en un autre, il y aura une racine imaginaire; s'il la coupe en un point seulement sans la toucher, il y en aura trois imaginaires; s'il la touche en un point sans la couper; il y en aura deux imaginaires: enfin s'il ne la coupe & ne la touche point, les quatre racines sont imaginaires; elles sont aussi toutes imaginaires, lorsque le cercle ne peut pas être décrit, comme Fig. 241. De chaque point coupant ou touchant l'on tire des appliquées à l'axe AC, qui sont les racines de l'équation.

REGLE VIII.

Lorsque dans l'équation il y a $+q$, les racines vrayes sont du même côté de l'axe, où le centre E se trouve, & les fausses de l'autre. Au contraire lorsqu'il y a $-q$, les racines fausses sont du côté de l'axe, où le centre E se trouve, & les vrayes de l'autre.

Je vais donner des Exemples de plusieurs formules, en commençant par les plus simples.

EXEMPLE I. $z^4 = ** + aaqz + a^3r.$ $z^4 = ** + qz + r.$

DEcrivons Fig. 240. la parabole FAG Regle I. dont le parametre AP, $a = 1$, le sommet A, l'axe AC, sur lequel nous couperons $AC = \frac{1}{2}a$. Au point C élevons la perpendiculaire $CE = \frac{1}{2}q$ Regle 4. Par les points A, E menons l'infinie ES, sur laquelle Regle 5. nous prendrons $AS = a$, $AR = r$; sur le diametre RS nous décrirons le demi-cercle RHS; & au point A nous éleverons AH perpendiculaire à RS. Parcequ'il y a $+r$, du centre E Regle 6. de l'intervale EH décrivons le cercle FGH, qui coupe la parabole aux points F, G, desquels nous tirerons sur l'axe AC les appliquées FL, GK, qui sont les racines de l'équation, Regle 7. & parcequ'il y a $+q$, Regle 8. FL est une racine vraye $+z$, GK une fausse $-z$. Joignons EH, EF, EG; du point E abaissons sur FL la perpendiculaire EM, & élevons sur GK prolongée la perpendiculaire Em. Nommons AL, AK, x. FIG. 240.

Dém. Au point F, $\overline{AH}^2 = AR \times AS$, ar; & $AH = \sqrt{ar}$: de plus $ML = EC$, $\frac{1}{2}q$; $FM = FL - ML$, $z - \frac{1}{2}q$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = AP \times AL$, $zz = ax$, $x = \frac{zz}{a} = AL$; $CL = AL - AC$, $\frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a = EM$; $\overline{EA}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$ dans le triangle rectangle ECA.

Maintenant dans les triangles rectangles EMF, EAH, nous avons $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{z^4}{aa} - zz + \frac{1}{4}aa + zz - qz + \frac{1}{4}qq = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$; $\frac{z^4}{aa} - qz = ar$; $z^4 = ** + aaqz + a^3r$.

Au point G nous avons auſſi $\overline{AH}^2 = ar$; $mK = EC$, $\frac{1}{2}q$; $mG = mK + KG$, $\frac{1}{2}q - z$; $\overline{KG}^2 = AP \times AK$, $zz = ax$; $x = \frac{zz}{a} = AK$; $KC = AC - AK$, $\frac{1}{2}a - \frac{zz}{a} = Em$; $\overline{EA}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$.

De plus dans les triangles rectangles EmG, EAH, nous avons $\overline{EG}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mG}^2$, $\frac{1}{4}aa - zz + \frac{z^4}{aa} + \frac{1}{4}qq - qz + zz = \overline{EH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$, $z^4 = ** + aaqz + a^3r$. Ce qu'il falloit démontrer.

FL, z eſt donc la racine vraye ; KG, $-z$ la fauſſe ; les deux autres ſont imaginaires, Regle 7.

EXEMPLE II. $z^4 = ** - aaqz + a^3r$. $z^4 = ** - qz + r$.

COmme Exemple I. excepté Regle 8. FL, $-z$; KG, $+z$; $FM = FL - ML$, $-z - \frac{1}{2}q$, $mG = mK + KG$, $\frac{1}{2}q + z$.

Au point F dans les triangles rectangles EMF, EAH ; $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{z^4}{aa} - zz + \frac{1}{4}aa + zz + qz + \frac{1}{4}qq = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$; $\frac{z^4}{aa} + qz = ar$; $z^4 = ** - aaqz + a\ r$.

Au point G dans les triangles rectangles EmG, EAH ; $\overline{EG}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mG}^2$, $\frac{1}{4}aa - zz + \frac{z^4}{aa} + \frac{1}{4}qq + qz + zz = \overline{EH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$; $\frac{z^4}{aa} + qz = ar$; $z^4 = ** - aaqz + a^3r$.

EXEMPLE III. $z^4 = ** + aaqz - a^3r$. $z^4 = ** + qz - r$.

1. QUe cette équation ſoit $z^4 = ** + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$, de ſorte que $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $a = 1$.

FIG. 241. Je décris Fig. 241. la parabole FAG, dont le parametre $AP = a$, le ſommet A, l'axe AC Regle 2. ſur lequel je prends $AC = \frac{1}{2}a$. Au point C Regle 4. j'éleve la perpendiculaire $EC = \frac{1}{2}q = \frac{1}{4}$. Par les points E, A Regle 5. je mene l'infinie EAS, ſur laquelle je prends $AS = a$, $AR = \frac{1}{2} = r$; ſur le diametre AR je décris le demi-cercle RHS, & au point A j'éleve la perpendiculaire AH. Et parcequ'il y a $-r$, Regle 6. ſur le diametre AE je décris encore le demi-cercle AiE, dans lequel il faut inſcrire une ligne $AI = AH$; mais comme cela ne ſe peut, à cauſe que le demi-cercle AiE eſt trop petit, le Problême eſt impoſſible, Regle 7. & toutes les racines de l'équation ſont imaginaires.

2. Que l'équation ſoit $z^4 = ** + 5z - \frac{1}{2}$; & $q = 5$, $r = \frac{1}{2}$, $a = 1$.

FIG. 242. Je décrirai Regle 2. Fig. 242. la parabole FAG, dont le parametre 1, le ſommet A, l'axe AC, ſur lequel je coupe $AC = \frac{1}{2}$. Au point C Regle 4. j'éleve $CE = \frac{5}{2}$. Je tire l'indeterminée EAS Regle 5. ſur laquelle je coupe $AS = 1$, $AR = \frac{1}{2}$; ſur le diametre RS je décris le

demi-cercle RHS ; & au point A j'éleve la perpendiculaire AH. Parce-qu'il y a $-r$, Regle 6. je décris encore le demi-cercle EIA sur le diametre AE, dans ce demi-cercle j'inscris $AI = AH$; & du centre E, du rayon EI je décris le cercle IfF, qui coupe la parabole aux points f, F ; d'où Regle 7. je tire les appliquées fl, FL perpendiculaires à l'axe. Ces deux appliquées sont Regle 8. les deux valeurs vrayes de l'équation. Je nomme FL, fl, $+z$; AL, Al, $+x$; du point E j'abaisse EM perpendiculaire sur FL, & j'éleve Em perpendiculaire sur lf prolongée, je tire encore les rayons égaux EI, EF, Ef.

Dém. Au point f. $\overline{AH}^2 = RA \times AS$, $\frac{1}{2} = \overline{AI}^2$; CE est $\frac{5}{2} = lm$; mf est $ml - fl$, $\frac{5}{2} - z$; par la nature de la parabole $\overline{fl}^2 = AP \times Al$, $zz = 1x = Al$; $Cl = AC - Al$, $\frac{1}{2} - zz = Em$; $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2$, $\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$; & dans le triangle EIA, $\overline{EI}^2 = \overline{EA}^2 - \overline{AI}^2$, $\frac{13}{2} - \frac{1}{2} = 6$.

A present dans le triangle rectangle Emf, l'on a $\overline{Ef}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mf}^2$, $\frac{1}{4} - zz + z^4 + \frac{25}{4} - 5z + zz = \overline{EI}^2$, 6 ; $z^4 - 5z + \frac{1}{2} = 0$; $z^4 = ** + 5z - \frac{1}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Le même peut se démontrer au point F. Ainsi FL, fl sont les deux racines vrayes de l'équation, les autres Regle 7. sont imaginaires.

EXEMP. IV. $z^4 = * + apzz + aaqz + a^3r$. $z^4 = * + pzz + qz + r$.

On a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 4. n. 2. $z^4 - 11z^3 + 21zz - 7z + 1 = 0$.

Il y en a aussi une semblable, Art. 2. n. 2. Pour ôter son second terme, soit $z - \frac{11}{4} = v$, $v + \frac{11}{4} = z$. La reduite est $v^4 * - \frac{390}{16}vv - \frac{3704}{64}v$ $\frac{7939}{256} = 0$. L'on fera disparoître le second terme en prenant $4v = x$, $\frac{x}{4}v$, & après avoir changé x en v, en multipliant le second terme par 4, le troisiéme par 16, le quatriéme par 64, le cinquiéme par 256 ; la transformée sera $x^4 = * + 390xx + 3704x + 7939$. Soit $70 = a$, que je considere comme l'unité ; $p = \frac{390}{70}$, afin que ap soit 390 ; $aa = 4900$; $q = \frac{3704}{4900}$, afin que aaq soit 3704 ; $a^3 = 343000$, $r = \frac{7939}{343000}$; afin que a^3r soit 7939 ; & la derniere transformée sera $x^4 = * + apzz + aaqz + a^3r$.

On décrira Fig. 243. la parabole FAG, dont le parametre $AP = a$, le sommet A, l'axe AC Regle 2. sur lequel on prendra $AC = \frac{1}{2}a$, & Regle 3. $CD = \frac{1}{2}p$. Au point D Regle 4. l'on élevera la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Par les points E, A Regle 5. l'on tirera l'infinie AS, sur laquelle on coupera d'un côté $AS = a$, de l'autre $AR = r$; sur le diametre RS l'on décrit le demi-cercle RHS, & au point A l'on éleve la perpendiculaire AH. Du centre E Regle 6, de l'intervale EH, l'on décrira le cercle HGF, qui coupe la parabole aux points G, F : desquels FIG. 243.

Regle 7. l'on mene les appliquées à l'axe ; FL, qui Regle 8. est la racine vraye de l'équation ; GK, qui en est la fausse ; les deux autres étant imaginaires. L'on nommera donc $FL, +x$; $GK, -x$; AK, AL ; y ; AD, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; du point E l'on tirera les perpendiculaires EM, Em sur FL, GK prolongées ; & les rayons égaux EH, EG, EF.

Dém. Au point G. $\overline{AH}^2 = EA \times AS$, ar ; dans le triangle rectangle EDA, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ap + \frac{1}{4}pp$; DE est $\frac{1}{2}q = Km$; $Gm = Km + GK$, $\frac{1}{2}q - x$; par la nature de la parabole $\overline{GK}^2 = AP \times AK$, $xx = ay$, $y = \frac{xx}{a} = AK$; KD est $AD - AK$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p - \frac{xx}{a} = Em$.

Maintenant dans les triangles rectangles EmG, EAH, $\overline{EG}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mG}^2 = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, prenez les valeurs de $\overline{EG}^2$ & de $\overline{EH}^2$, vous trouverez $x^4 = * + apxx + aaqx + a^3r$.

On fera aisément la démonstration au point F. Quand on a ainsi trouvé FL, x ; si on la divise par 4, ce sera $\frac{x}{4} = v$, & si à v l'on ajoûte $\frac{11}{4}$, l'on aura $v + \frac{11}{4} = z$ que l'on cherche. De même KG est $-x$, $-\frac{x}{4} = -v$, $-v - \frac{11}{4} = -z$.

Ex. V. $z^4 = * + apzz - aaqz + a^3r$. $z^4 = * + pzz - qz + r$.

C'Est l'Exemple que M. DESCARTES construit, & qu'il démontre Fig. 232. L'on fait la même construction que dans l'Exemple IV. il faut seulement concevoir encore les rayons EG, EF tirez, & Em perpendiculaire sur FL.

FIG. 232.

Dém. Au point F. Soit FL, $+z$; AL, $+y$; $AD = AC + CD$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; $\overline{AH}^2 = RA \times AS$, $1r$; car SA égale au parametre de la parabole est 1 ; dans le triangle rectangle EDA, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ap + \frac{1}{4}pp$; DE est $\frac{1}{2}q = mL$; $FM = FL - mL$, $z - \frac{1}{2}q$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 =$ le parametre $1 \times AL$, $zz = 1y$, $= AL$; $DL = AL - AD$, $zz - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = Em$.

Après cela dans les triangles rectangles EmF, EAH, nous avons $\overline{EF}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{Fm}^2 = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, ce qui donne $z^4 = * + pzz + qz + r$.

Ex. VI. $z^4 = * + apzz - aaqz - a^3r$. $z^4 = * + pzz - qz - r$.

SOit l'équation à construire $z^4 = * + 5zz - 2z - \frac{5}{2}$, de sorte que $a = 1$, $p = 5$, $q = 2$. $r = \frac{5}{2}$.

FIG. 235. Décrivez Fig. 235. la parabole FGA, dont le parametre est $a = 1$, le sommet A, l'axe AC, sur lequel vous coupez $AC = \frac{1}{2}a$; au dessous de C, parcequ'il y a $+p$, Regle 3. vous prenez encore $CD = \frac{1}{2}p$. Au point D Regle 4. élevez la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Par les points E, A,

Regle 5. menez l'infinie EAS, ſur laquelle vous coupez $AS = a$, $AR = r$; ſur le diametre RS décrivez le demi-cercle RHS, & au point A élevez la perpendiculaire AH. Parcequ'il y a $-r$, Regle 6. ſur le diametre AE vous décrivez encore le demi-cercle AIE, dans lequel vous inſcrivez $AI = AH$, & du centre E, de l'intervale EI, vous décrivez le cercle IGF, qui coupe la parabole aux points F, f, G, g; deſquels Regle 7. vous tirez les appliquées à l'axe FL, fl, GK, gk. Parcequ'il y a $-q$, FL, fl ſont les valeurs fauſſes $-z$, GK, gk les vrayes $+z$; & l'équation a quatre racines réelles. Les AL, Al, AK, Ak ſont $+x$. Joignez EF, Ef, EG, Eg; & du point E tirez des perpendiculaires ſur chaque appliquée.

Dém. Au point G. $\overline{AH}^2 = AS \times AR$, $ar = AI$; AD eſt $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; & dans le triangle rectangle EDA, $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap$ $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq$. Concevez le triangle rectiligne EIA, $\overline{EI}^2 = \overline{EA}^2 - \overline{AI}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq = ar$; par la nature de la parabole $\overline{KG}^2 = a \times KA$, $zz = ax$, $x = \frac{zz}{a} = AK$; $MK = ED$, $\frac{1}{2}q$; $GM = z + \frac{1}{2}q$; $DK = \frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = Em$.

Après cela dans les triangles rectangles EMG, EIA, vous avez $\overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{GM}^2 = \overline{EI}^2$, ce qui donne $z^4 = * + apzz - aaqz - a^3r$.

Ex. VII. $z^4 = * - apzz + aaqz + a^3r$. $z^4 = * - pzz + qz + r$.

LEs valeurs de a, p, q, r, ſont auprès de Fig. 239.

Il faut Regle 2. décrire la parabole FGA, Fig. 233. dont le parametre eſt a, le ſommet A, l'axe AC, ſur lequel on prend $AC = \frac{1}{2}a$. Sur l'axe prolongé au deſſus du ſommet Regle 3. parcequ'il y a $-p$, il faut prendre $CD = \frac{1}{2}p$; & au point D Regle 4. élever la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Par les points E, A, Regle 5. l'on doit tirer l'indefinie AS, & prendre $AS = a$, $AR = r$; décrire ſur le diametre RS le demi-cercle RHS, & au point A élever la perpendiculaire AH. Du centre E Regle 6. & du rayon EH, il faut décrire le cercle HFG, qui coupe la parabole aux points F, G. Les appliquées FL, GK, Regle 7. ſont les deux racines réelles de l'équation, les deux autres étant imaginaires. Parcequ'il y a $+q$ Regle 8. FL eſt la racine vraye, GK la fauſſe. L'on joindra les rayons EH, EF, EG, & du point E l'on menera des perpendiculaires ſur FL, GK. Nommons FL, $+z$; GK, $-z$; AL, AK, x; $AD = CD - AC$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a$.

Fig. 233.

Dém. Au point F. $\overline{AH}^2 = AR \times RS$, ar; par la nature de la parabole; $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = ax$, $x = \frac{zz}{a} = AL$; $EM = DL = DC - AC + AL$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a + \frac{zz}{a}$; $ML = DE = \frac{1}{2}q$; $MF = ML - FL$, $\frac{1}{2}q - z$.

Maintenant dans le triangle rectangle DAE, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{AD}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}aa$. De plus les triangles rectangles EAH, EMF, donnent $\overline{EH}^2 = \overline{EF}^2$, dont les valeurs produisent l'équation $z^4 = * - apzz + aaqz + a^3r$.

Ex. VIII. $z^4 = * - apzz + aaqz - a^3r$. $z^4 = * - pzz + qz - r$.

Soit $a = 1 = p = r$; $q = 11$, l'équation sera $z^4 = * - 1zz + 11z - 1$.

FIG. 244. Je décris Fig. 244. la parabole AF, dont le parametre $AP = 1$, le sommet A, l'axe AC Regle 2. sur lequel je prends $AC = \frac{1}{2}$; parcequ'il y a $-p$, Regle 3. je prends $CD = \frac{1}{2}$ en retournant de C vers A, de sorte que le point D tombe sur le sommet A; au point A Regle 4. j'éleve la perpendiculaire $AE = \frac{11}{2}$, sur laquelle Regle 5. je coupe $AS = 1$, AP, $AR = 1$; sur le diametre RS je décris le demi-cercle RHS, dont le centre est A, où j'éleve la perpendiculaire $AH = 1$. Parcequ'il y a $-r$, Regle 6. sur le diametre AE je décris encore le demi-cercle EIA, dans lequel j'inscris $AI = AH = 1$, & du centre E, du rayon EI je décris le cercle IfF, qui coupe la parabole au point f, F. Les appliquées fl, FL Regle 7. 8. sont deux racines vrayes de l'équation; les autres deux sont imaginaires. Du point E j'abaisse la perpendiculaire EM sur LF prolongée, je joins EF, EI. Enfin je nomme FL, $+z$; AL, $+y$.

Dém. Au point F. Par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = 1 \times AL$, $zz = y = AL = EM$; ML est égal à ED, $\frac{11}{2}$, $MF = ML - FL$, $\frac{11}{2} - z$.

Les triangles rectangles EMF, EIA donnent $\overline{EF}^2 = \overline{EI}^2$ dont les valeurs produisent $z^4 = * - zz + 11z - 1$.

SECTION II.

Utilité des Regles de la Section I.

1°. Nous rapporterons la Methode, dont on se sert pour construire une équation déterminée solide. 2°. Nous chercherons deux & trois moyennes proportionelles entre deux quantitez données. 3°. Nous diviserons un angle ou un arc donné en trois parties égales. 4°. Nous démontrerons, comme M. DESCARTES l'avance Art. 3. que lorsque un cercle coupe une parabole des deux côtez de l'axe, les appliquées qui sont d'un côté prises ensemble sont égales aux appliquées qui sont de l'autre

aussi prises ensemble. 5°. Nous parlerons de la description des courbes par leur équation solide.

ARTICLE I.

Methode pour construire une Equation déterminée solide.

CEtte Methode peut aussi convenir aux Problêmes plus que solides : mais il me suffit ici de l'appliquer aux solides, afin de faire voir comment M. DESCARTES a trouvé les Regles qu'il a données, Sect. I. Art. I. 2. pour la construction des équations cubiques & quarré-quarrées avec le cercle & la parabole. Aussi est-ce la reflexion, qu'on a faite sur cette construction, qui a produit cette Methode.

REGLE I.

On suppose que l'équation à construire n'a point de second terme, & que le premier est reduit à l'unité.

Si l'équation est cubique $z^3 * - apz + aaq = o$, ou étant $a = 1$, $z^3 * - pz + q = o$, on la multiplie par son inconnuë z, afin de la rendre du quatriéme $z^4 * - apzz + aaqz * = o$, $z^4 * - pzz - qz * = o$. Sans cela on ne pourroit pas en deduire tous les lieux dont on a besoin.

REGLE II.

On employe toûjours deux équations indéterminées, ou deux lieux; qui sont chacun d'un degré inferieur à celui de la proposée. Ils contiennent les deux mêmes inconnuës, dont l'une est encore la même que l'inconnuë de la proposée, & elle s'appelle l'inconnuë principale; & l'autre l'inconnuë introduite.

REGLE III.

Un des lieux est donné, ou bien on le choisit, & alors on le prend très simple, par exemple celui à la parabole. Pour augmenter la facilité, le lieu à la parabole est composé du quarré zz de l'inconnuë z, qui est dans l'équation à construire, & d'un rectangle sous l'inconnuë y que l'on introduit, & sous une connuë qui se trouve le plus souvent dans l'équation proposée. Ce sera donc $zz = ay$. $zz - ay = o$. La connuë peut pourtant être telle que l'on veut.

REGLE IV.

Pour avoir le second lieu, l'on compare le lieu choisi avec l'équation proposée, ce qui fournit quelques nouveaux lieux : les autres se trouvent

en combinant les lieux déja trouvez ou avec le lieu choisi, ou entr'eux : ce qui s'execute ainsi.

1. La proposée est $z^4 - apzz + aaqz = o$, le lieu donné $zz = ay$. Dans le premier terme de la proposée, mettez pour un zz sa valeur ay; il vient $ayzz - apzz + aaqz = o$, $yz - pz + aq = o$, à l'hyperbole entre ses asymptotes. Ce lieu auroit pû se tirer par la même substitution de l'équation cubique $z^3 * - apz + aaq = o$.

2. Mettez deux fois la valeur de zz dans le premier terme, pour avoir $aayy - apzz + aaqz = o$, $ayy - pzz + aqz = o$, à l'hyperbole par rapport à ses diametres.

3. Substituez dans le premier & dans le troisiéme terme pour zz sa valeur, vous ferez $aayy - aapy + aaqz = o$, $yy - py + qz = o$, à la parabole.

4. Combinez le lieu donné avec ce dernier en les ajoûtant, il se fera $zz - ay + yy - py + qz = o$, au cercle.

5. Si vous soustrayez l'un de l'autre, ce sera $zz - ay - yy + py - qz = o$, à l'hyperbole équilatere par rapport à ses diametres.

6. Multipliez le lieu donné par une quantité quelconque b, divisez-le par une autre quelconque c, vous aurez $\frac{bzz}{c} - \frac{aby}{c} = o$, qui demeure à la parabole.

7. Ajoûtez les lieux de n. 3. & de n. 6. ce sera $yy - py + qz + \frac{bzz}{c} - \frac{aby}{c} = o$, à toutes sortes d'ellipses, parceque b & c peuvent representer toutes sortes de quantitez.

8. Soustrayez ces lieux l'un de l'autre, pour avoir $yy - py + qz - \frac{bzz}{c} + \frac{aby}{c} = o$, à toutes sortes d'hyperboles.

9. On peut poursuivre les combinaisons, en doublant, triplant, &c. ceux qu'on voudra des lieux déja trouvez.

Dans ces sortes de substitutions & de combinaisons il faut prendre garde, qu'il ne resulte pas un lieu plus élevé, que la construction du Problême ne le demande. Par exemple si dans $z^4 - apzz + aaqz = o$, vous substituez la valeur de zz dans le premier terme une fois, & ensuite dans le troisiéme, & enfin la valeur de z dans le dernier : il viendra $ayzz - aapy + aaq\sqrt{ay} = o$, $apy - yzz = aq\sqrt{ay}$, qui se reduit en quarrant chaque membre à $aappyy - 2apyyzz + yyz^4 = a^3qqy$.

REGLE V.

On construit deux de ces lieux ; ou le donné avec un des déduits, ou deux des déduits. L'on demande ordinairement, que ces lieux soient les plus simples. M. DESCARTES a construit les équations de Sect. 1. Art. 1. 2. en se servant du lieu donné $zz = ay$ à la parabole, & du lieu reduit au cercle $zz - qz = ay + py - yy$; c'est-à dire que l'on décrit les

lignes

lignes droites ou courbes, dont la nature eſt exprimée par ces lieux, en ſuivant les Regles ordinaires de la conſtruction des lieux Geometriques.

Les inconnuës tant la principale, que l'introduite ont un même axe, une même origine; les abſciſſes priſes ſur cet axe ſont exprimées par l'introduite, & les appliquées à cet axe par la principale; l'angle des coordonnées eſt droit.

REGLE VI.

LEs lignes ainſi décrites ſe rencontreront en autant de points, qu'il y a de racines réelles dans la propoſée. Il y aura autant de racines réelles, qu'il y a de points d'interſection; autant de deux racines réelles égales, qu'il y a de points de contact.

Si les lignes ne ſe coupent & ne ſe touchent pas, toutes les racines ſont imaginaires. Enfin s'il manque quelque point d'interſection ou de contact de ceux, qui peuvent être, il y aura autant de racines imaginaires; or il peut y avoir quatre points pour les équations quarré-quarrées, en comptant un point d'attouchement pour deux; & trois pour les équations cubiques.

Mais il faut obſerver que l'on multiplie les équations cubiques $z^3 . pz . q = o$ par z; & que c'eſt la même choſe que ſi on les multiplioit par $z = o$. Ainſi l'on voit dans les conſtructions de Sect. 1. que le cercle coupe la parabole au ſommet, où l'appliquée z eſt nulle. Ce point d'interſection n'eſt pas compté parmi les trois qui conviennent à une équation cubique.

On tirera donc de chacun des points de rencontre des appliquées ſur l'axe; elles ſeront les racines vrayes & fauſſes de l'équation propoſée. On les diſtingue par le calcul; celle-là par exemple eſt vraye, qui étant ſuppoſée telle, donne par le calcul l'équation propoſée. C'eſt là-deſſus qu'eſt fondée la Regle 6. Art. 1. & la Regle 8. Art. 2. Sect. 1.

REGLE VII.

Il faut que ces deux lieux comparez enſemble de la maniere dont on le fera bientôt, & dans les Art. 2. 3. rendent & recompoſent l'équation propoſée. Ce qui ſe fait en ſubſtituant dans les équations des lieux la valeur des nouvelles inconnuës, que la reduction faite ſelon la Methode ordinaire des lieux, y a introduites; & enfin en ſubſtituant à la place de l'inconnuë, que nous avons nommée l'introduite, ſa valeur tirée du lieu donné ou choiſi comme ici pour y ſa valeur $\frac{zz}{a}$ tirée de $zz = ay$. Cette recompoſition eſt la démonſtration, qui prouve, que les racines de la propoſée ont été trouvées.

Voyez les dificultez de cette Methode dans les Memoires de l'Academie Royale des Sciences, 1708. 1709. 1710.

On trouvera plusieurs Exemples de ces Regles pour les équations cubiques dans les Art. 2. 3. qui suivent. Je vais ici en donner un pour les équations quarré-quarrées.

1. Soit proposée l'équation $z^4 * - apzz + aaqz - a^3r = 0$; le lieu choisi $ay = zz$, $zz - ay = 0$. Dans le premier & troisiéme terme substituez pour zz sa valeur, il vient $aayy - aapy + aaqz - a^3r = 0$, $yy - py + qz - ar = 0$ à la parabole. Ajoûtez ces deux lieux ensemble, pour former $yy - py + qz - ar + zz - ay = 0$ au cercle. Voyons comment M. DESCARTES a pû construire l'équation proposée avec le lieu donné à la parabole, & le lieu au cercle qu'on vient de conclurre. Il sera aisé de s'appercevoir de l'usage qui se fera des Regles 1. 2. 3. 4.

FIG. 232. 2. Décrivez Fig. 232. la parabole AF, dont A le sommet, AD l'axe, $a = 1$ le parametre. Nommez l'abscisse quelconque AL, y; son appliquée correspondante FL, z. Voilà suivant la Regle 5. Sect. 2. que les inconnuës ont un même axe AC, une même origine A; l'introduite y est l'abscisse, la principale z est l'appliquée, l'angle qu'elles font est droit. Vous avez aussi executé, ce que demande la premiere partie de la Regle 2. de Sect. 1. Art. 2.

3. Pour construire le cercle, il faut comme dans les lieux Geometriques reduire l'équation $yy - py + qz - ar + zz - ay = 0$, en prenant $z + \frac{1}{2}q = v$, $v - \frac{1}{2}q = z$; $y - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = x$, $x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p = y$: & la reduite est $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar - xx$. C'est pour avoir le rayon de cercle $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$, que M. DESCARTES Regle 3. 4. 5. 6. Sect. 1. Art. 2. veut qu'on prenne $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$, car l'on a déja $\overline{EA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq$; ensuite que sur AE l'on prenne $AS = a$, $AR = r$, qu'on décrive le demi-cercle SHR sur le diametre RS, qu'au point A on éleve la perpendiculaire AH, car elle est moyenne proportionelle entre AS, AR, & elle est $\sqrt{ar}$. Ainsi dans le triangle rectangle EAH, $\overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar$, & la droite EH est le rayon $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$ du cercle cherché. Et la Reg. 5. de cet Article est gardée.

4. Ce cercle coupe la parabole aux points F, G, d'où par la Regle 6. de cet Article, & Regle 7. 8. Art. 2. Sect. 1. l'on tire sur l'axe AC les perpendiculaires FL, GK, qui sont les deux seules racines de l'équation proposée, qui soient réelles; les deux autres sont imaginaires: FL est une racine vraye, GK une fausse. Ce qui se démontre ainsi.

5. Supposons FL, $+z$; la recomposition de la proposée se fait de cette façon. Soit AL, y; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 =$ parametre $a \times AL$, $zz = ay$.

Pour le cercle, ſi l'on achevoit de tirer le diametre Em, Fm ſeroit une appliquée $= FL - mL$, $z - \frac{1}{2}q$, car $mL = ED$, $\frac{1}{2}q$; Fm eſt donc v. $Em = DL = AL - AD$, $y - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = x$. Or par la nature du cercle $\overline{Fm}^2$ eſt égal au rectangle ſous la ligne compoſée du rayon & de Em, & ſous la ligne compoſée du rayon moins Em, c'eſt-à-dire ſous $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar} + x$ & ſous $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar} - x$; donc $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar - xx$. Pour vv & xx ſubſtituez leur valeur, il vient $zz + qz + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar - yy + ay + py - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}pp$, qui ſe reduit à $zz + qz = ar - yy + ay + py$. Pour y ſubſtituez encore ſa valeur $\frac{zz}{a}$ tirée du lieu choiſi $zz = ay$, vous ferez $zz + qz = ar - \frac{z^4}{aa} + zz + \frac{pzz}{a}$; ou $z^4 * - apzz + aaqz - a^3r = 0$. Et la Regle 7. de cet Article eſt expliquée, l'on voit auſſi pourquoi M. DESCARTES dit Sect. 1. Art. 2. Regle 8. que lorſqu'il y a $-q$ dans $z^4 = * + apzz - aaqz + a^3r$, les racines vrayes ſont du côté où le centre E du cercle ſe trouve.

M. DESCARTES dans ſa maniere de démontrer Sect. 1. recompoſe l'équation propoſée ſans ſe ſervir des inconnuës v, x, que la reduction a introduite. Voyez cette démonſtration Sect. 1. dans le Texte, & Sect. 1. Art. 2. Exemple 5.

ARTICLE II.

Trouver deux & trois moyennes proportionelles.

M. DESCARTES.

SI on veut donc ſuivant cette Regle trouver deux inconnuës proportionelles entre les lignes a & q; chacun ſçait, que poſant z pour l'une, comme a eſt à z, ainſi z à $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a équation entre q & $\frac{z^3}{aa}$, c'eſt-à-dire $z^3 = * * aaq$.

Et la parabole FAG, Fig. 234. étant décrite avec la partie de ſon aiſſieu AC, qui eſt $\frac{1}{2}a$ la moitié du côté droit; il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}q$, & du centre E, par A décrivant le cercle AF, on trouve FL & LA pour les deux moyennes cherchées. Fig. 234.

Voyez la conſtruction de ce Problême, Sect. 1. Art. 1. Ex. 1. la maniere dont cette conſtruction a pû être trouvée par M. DESCARTES ſe découvrira bientôt n. 2. Par tout cela il conſte que FL eſt z, & AL,

$\frac{zz}{a}$, qui sont les deux moyennes proportionelles entre a & q. Car $a : z :: z : \frac{zz}{a} :: \frac{zz}{a} : \frac{z^3}{aa} = q$. Appliquons la Methode de Art. 1. à l'équation $z^3 = ** + aaq$.

Nous parlerons de trois moyennes proportionelles n. 5.

1. Soit proposée l'équation $z^3 = ** + aaq$. $z^3 - aaq = 0$.

1°. Multipliez-là par z, pour la changer en celle-ci $z^4 - aaqz = 0$.

2°. Soit le lieu donné $zz = ay$, $zz - ay = 0$.

3°. Pour zz mettez une fois sa valeur, vous aurez $ayzz - aaqz = 0$, $yz = aq$, à l'hyperbole entre ses asymptotes.

4°. Dans $ayzz - aaqz = 0$, substituez encore ay pour zz, il viendra $aayy - aaqz = 0$, $yy - qz = 0$, à la parabole.

5°. Ajoûtez les lieux des n. 2. 4. il se fait $zz - ay + yy - qz = 0$, au cercle.

6°. Soustrayez-les l'un de l'autre, vous aurez $zz - ay - yy + qz = 0$, à l'hyperbole équilatere rapportée à ses diametres, &c.

2. Construisons, ainsi que M. DESCARTES l'a fait, l'équation proposée avec la parabole donnée $zz = ay$ & le cercle $zz - ay + yy - qz = 0$. ou $zz - qz = ay - yy$.

FIG. 234. Décrivez Fig. 234. la parabole AF, dont le parametre est a, le sommet A, l'axe AL.

Pour le cercle il faut le reduire en prenant $z - \frac{1}{2}q = v$, $v + \frac{1}{2}q = z$; $y - \frac{1}{2}a = x$, $x + \frac{1}{2}a = y$. Et la reduite est $vv - \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}aa - xx$, $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx$.

C'est pourquoi sur AL vous couperez $AC = \frac{1}{2}a$, au point C vous éleverez la perpendiculaire $CE = \frac{1}{2}q$. Du point E comme centre, du rayon EA, vous décrirez le cercle FG, qui coupe la parabole au point F. Menez l'appliquée FL, nommez la, z; & AL, y.

Par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = ay$, $y = \frac{zz}{a} = AL$.

De plus dans le triangle rectangle ECA; $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$, & le rayon $EA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$. $EM = GL = AL - AC$, $y - \frac{1}{2}a = x$; $ML = EC$, $\frac{1}{2}q$; $MF = ML - FL$, $\frac{1}{2}q - z = v$. Mais par la nature du cercle $\overline{MF}^2$ est égal au rectangle sous $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} - x$; & $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} + x$; donc $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx$. Substituez les valeurs de v, x, y, il vient $z^4 = aaqz$. $z^3 = ** + aaq$.

La démonstration suivant la maniere de M. DESCARTES se trouve Sect. 1. Art. 1. Exemple 1.

De là suit la duplication du cube. Car soit $a = 1$ la premiere des quatre lignes proportionelles, la quatriéme $q = 2$. Ayant trouvé FL, z pour la seconde, zz pour la troisiéme. Le cube fait sur z est double du cube

fait sur 1. car ces quatre lignes continuellement proportionelles étant données $1 . z . zz . 2$. la premiere 1 est à la quatriéme 2 en raison triplée de la premiere 1 à la seconde z. Mais 33. 11. Eucl. le cube sur 1 est au cube sur z en raison triplée de 1 à z: donc ces cubes sont entr'eux, comme 1 à 2, c'est-à-dire, que le second est double du premier; & la duplication d'un cube donné est trouvée.

3. Construisons l'équation proposée avec le même cercle, & l'hyperbole entre ses asymptotes $yz = aq$.

Pour construire l'hyperbole, tirez à angles droits les lignes AB, AL, Fig. 245. coupez $AB = q$, au point B élevez la perpendiculaire $BG = a$. Par le point G & entre les asymptotes AB, AL décrivez l'hyperbole FG, comme on l'enseigne dans les Traitez des Sections coniques.

Pour construire le cercle, dont la reduction a été faite n. 2. Au point C milieu de AB, élevez la perpendiculaire $CE = \frac{1}{2}a$. Du centre E, de l'intervale EA décrivez le cercle AF, qui coupe l'hyperbole au point F par lequel menez FL parallele à AB; joignez EA, EF, EG, prolongez EC en K & en P, LF en M. Nommez LF, z; AL, $y = CM$, EM est $CM - EC$, $y - \frac{1}{2}a = x$. Dans le triangle rectangle ECA, $\overline{EA}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$, & le rayon $EA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} = EF = EP = EK$. Donc $KM = KE + EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} + x$; $MP = EP - EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} - x$. De plus $LM = AC$, $\frac{1}{2}q$; $FM = LM - LF$, $\frac{1}{2}q - z = v$.

Maintenant par la nature des asymptotes $AB \times BG = AE \times LF$, $qa = yz$.

Par la nature du cercle $KM \times MP = \overline{MF}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx = vv$. L'on a fait n. 2. la recomposition de l'équation proposée en faisant les substitutions dans l'équation au cercle. Vous reviendrez aussi à la proposée, en substituant dans $yz = aq$ la valeur de y, car ce sera $\frac{z^3}{a} = aq$, $z^3 = * * + aaq$.

Le cercle coupe encore l'hyperbole au point G, c'est-à-dire que EG est un rayon, ce qui se prouvera en montrant que EG est comme EA égal à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$. Pour cela menez EN parallele à CB; comme CE, BG sont paralleles supp. l'on aura $EN = CB$, $\frac{1}{2}q$; l'on aura $NB = CE$, $\frac{1}{2}a$; & $EG = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$.

4. Construisons la proposée avec le même cercle, dont la reduction se trouve n. 2. & avec l'hyperbole équilatere par ses diametres $zz + qz = yy + ay$. qui se reduit en faisant $z + \frac{1}{2}q = s$, $s - \frac{1}{2}q = z$; $y + \frac{1}{2}a = r$, $r - \frac{1}{2}a = y$; la reduite est $ss - rr = ss + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}qq$.

Pour la construire Figure 246. *a.* sur la droite $CR = \frac{1}{2}q$ décrivez le demi-cercle CBR, dans lequel vous inscrirez $BR = \frac{1}{2}a$, & $CB = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$. Ensuite sur BC prolongée coupez $CA = CB$: la toute Fig. 245. *a.*

$BA = 2\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$ sera l'axe déterminé de l'hyperbole, C le centre, A le sommet. Vous pouvez donc, suivant ce qui s'enseigne dans les Traitez des lieux Geometriques, décrire l'hyperbole équilatere AF. Prenez encore $CK = \frac{1}{2}q$, le point K sera au dessous de A, puisque CA n'est que $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$. Au point K élevez la perpendiculaire KL, sur laquelle vous prendrez $KN = NH = \frac{1}{2}a$; par les points N, H menez NP, HE paralleles à l'axe.

Vous construirez le cercle, si vous coupez sur l'axe AT la ligne $KD = \frac{1}{2}q$, si au point D vous élevez la perpendiculaire DM, & que du centre E, de l'intervale EN vous décriviez le cercle NF, qui coupe l'hyperbole au point F, par lequel vous menerez FL parallele à l'axe. Ce sera la ligne cherchée. Joignez EN, EF.

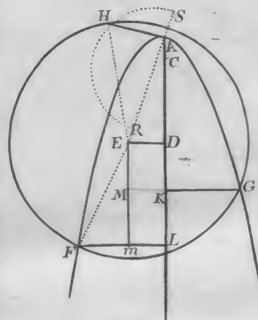
Car nommez NG, $z = FL = KT$; NL, $y = PM = GF$: la ligne NL est l'axe des inconnuës, N leur origine suivant la Regle 5. vous aurez $CT = CK + KT$, $\frac{1}{2}q + z = s$; $BT = TC + CB$, $s + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$; $AT = CT - CA$, $s - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$; $KL = KN + NL$, $\frac{1}{2}a + y = r = FT$; $HL = NL - NH$, $y - \frac{1}{2}a = EM = x$; comme $NP = KD$, $\frac{1}{2}q$, $EP = NH$, $\frac{1}{2}a$, dans le triangle EPN, le rayon $EN = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} = EI = EQ$; donc $IM = IE + EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} + x$; $MQ = EQ - EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} - x$. Enfin $LM = KD$, $\frac{1}{2}q$, & $FM = LM - LF$, $\frac{1}{2}q - z = v$.

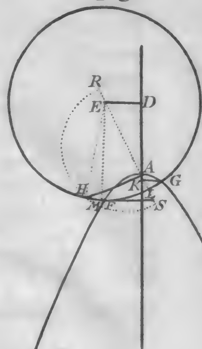
Par la nature de l'hyperbole équilatere $BT \times AT = \overline{TF}^2 = ss - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa = rr$.

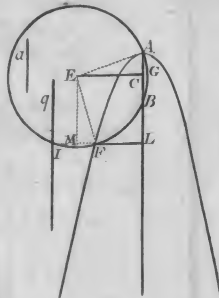
Par la nature du cercle $IM \times MQ = \overline{MF}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx = vv$. Substituez dans l'équation à l'hyperbole les valeurs de ss, rr. Vous ferez $zz + qz = yy + ay$; mettez encore pour y & yy leurs valeurs, vous aurez $z^4 = aaqz$; $z^3 = ** + aaq$.

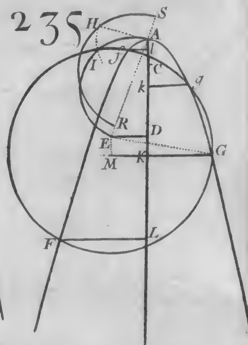
Le point N est commun au cercle & à l'hyperbole, ce qui se prouve en montrant que $KN = \frac{1}{2}a$ est une appliquée de l'hyperbole. Car nommez NK, n; vous avez $BK = KC + CB$, $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$; $AK = KC - AC$, $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$. Or par la nature de l'hyperbole équilatere $BK \times AK = \overline{NK}^2$, $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa = nn$; $n = \frac{1}{2}a$, & le point N étant l'origine des inconnuës, z est nulle dans ce point.

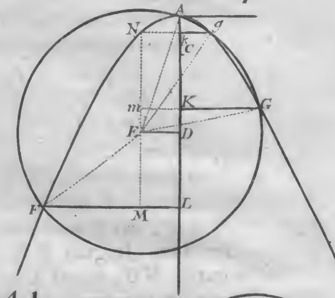
Une des manieres les plus simples, se fait avec deux paraboles, Fig. 246. b Les lignes AQ, CP se coupent à angles droits au point A. Je prends $AB = a$ premiere ligne donnée, $AC = b$ seconde ligne donnée. Sur l'axe AQ avec le parametre AB je décris la parabole ADM; sur l'axe AP avec le parametre CA je décris la parabole AEM. Du point d'intersection M j'applique MQ, MP. Je dis que AP, AQ sont les deux moyennes proportionelles cherchées.

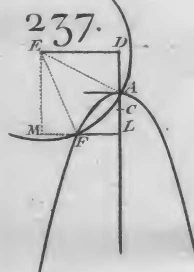


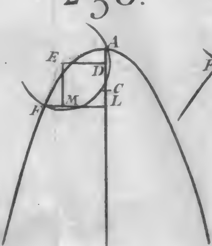


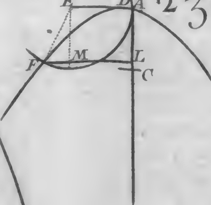


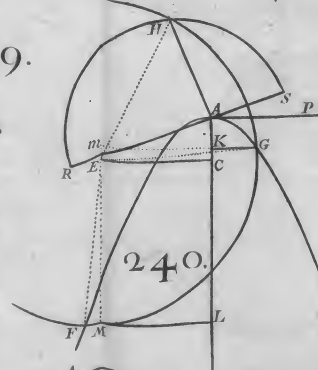


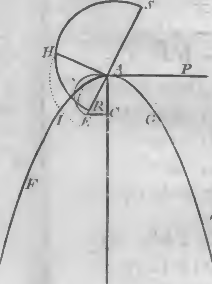


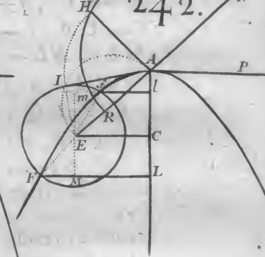


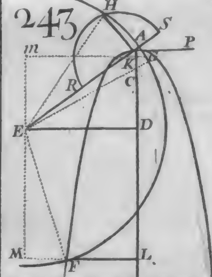


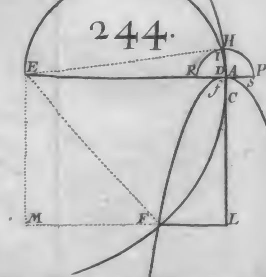


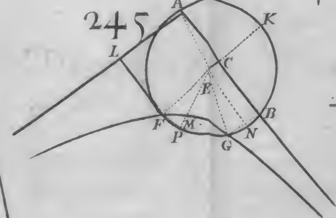


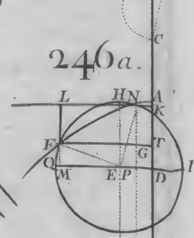


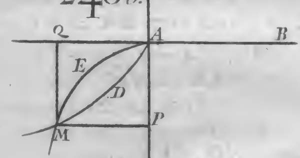












Gravé par Daudet



Nommons AP, $x = MQ$, AQ, $y = MP$. L'équation à la parabole ADM eſt $AB \times AQ = \overline{QM}^2$, $ay = xx$. L'équation à la parabole AEM eſt $CA \times AP = \overline{PM}^2$, $bx = yy$. Or la premiere équation donne $a : x :: x : y$, & la ſeconde $x : y :: y : b$, donc on a une proportion continuë $a . x . y . b$. & $AB . AP . AQ . AC$.

L'angle A peut être oblique. Cette Methode eſt de Menechme Aſcalonite.

5. Il faut trouver trois moyennes proportionelles entre les données a, & q. Soit z la premiere des trois, l'on aura donc cette proportion continuë $a : z :: z : \frac{zz}{a} :: \frac{zz}{a} : \frac{z^3}{aa} :: \frac{z^3}{aa} : \frac{z^4}{a^3}$; & cette quatriéme proportionelle par la ſuppoſition eſt égale à q; en ſorte que $\frac{z^4}{a^3} = q$; $z^4 = a^3 q$. Or cette équation du quatriéme degré ſe reduit à une quarrée par l'extraction de la racine quarrée, comme on a dit Sect. 1. Art. 2. Regle 1. L'on fait donc d'abord $zz = \pm \sqrt{a^3 q}$; dont les racines ſont encore $z = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a^3 q}}$. Ce qui montre qu'il ne peut y avoir que deux racines réelles $z = \pm \sqrt{+ \sqrt{a^3 q}}$, les deux autres $z = \pm \sqrt{- \sqrt{a^3 q}}$ ſont imaginaires.

Soit donc Fig. 247. $AB = a = 1$; $BC = q$; ſur le diametre AC je décris le demi-cercle ADC; au point B j'éleve la perpendiculaire BD qui eſt $= \sqrt{aq}$. Enſuite je prolonge DB en E, de ſorte que $BE = a$; ſur le diametre BE je décris le demi-cercle DFE, ainſi $\overline{BF}^2 = EB \times BD$, $a\sqrt{aq} = \sqrt{a^3 q}$, & $BF = \sqrt{+ \sqrt{a^3 q}} = z$, la premiere des trois moyennes proportionelles. Or ayant la premiere quantité a, la ſeconde z de la progreſſion, il eſt aiſé par la prop. 11. 6. Eucl. de trouver la troiſiéme, & enfin la quatriéme par la prop. 12. 6. Eucl.

ARTICLE III.

Diviſer un Arc donné en trois parties égales.

M. DESCARTES.

TOut de même ſi on veut diviſer l'angle NOP, Figure 248. ou bien l'arc ou portion de cercle $NQTP$ en trois parties égales; faiſant $NO = 1$, pour le rayon du cercle, & $NP = q$, pour la ſubtenduë de l'arc donné, & $NQ = z$, pour la ſubtenduë du tiers de cet arc; l'équation vient $z^3 = * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT, & faiſant QS parallele à TO, on voit que comme NO eſt à NQ, ainſi NQ à QR, & QR à RS, en ſorte que NO étant 1; & NQ, z; QR eſt zz, & RS eſt FIG. 248. 249.

z^3. Et à cauſe qu'il s'en faut ſeulement *R S* ou z^3, que la ligne *N P*, qui eſt *q*, ne ſoit triple de *N Q*, qui eſt *z*; on a $q = 3z - z^3$, ou bien $z^3 = * \, 3z - q$.

Puis la parabole *F A G* étant décrite, & *C A* la moitié de ſon côté droit principal étant $\frac{1}{2}$; ſi on prend $C D = \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire $D E = \frac{1}{2} q$; & que du centre *E* par *A* on décrive le cercle *F A g G*, il coupe cette parabole aux trois points *F*, *g*, & *G*, ſans compter le point *A*, qui eſt le ſommet. Ce qui montre qu'il y a trois racines en cette équation; à ſavoir les deux *G K* & *g k*, qui ſont vrayes; & la troiſiéme qui eſt fauſſe, à ſavoir *F L*, Et de ces deux vrayes c'eſt *g k* la plus petite, qu'il faut prendre pour la ligne *N Q*, qui étoit cherchée: car l'autre *G K* eſt égale à *N V* la ſubtenduë de la troiſiéme partie de l'arc *N V P*, qui avec l'autre arc *N Q P* acheve le cercle. Et la fauſſe *F L* eſt égale à ces deux enſemble *Q N* & *N V*, ainſi qu'il eſt aiſé à voir par le calcul.

1. Il faut expliquer l'operation de M. DESCARTES. Soit donné l'angle *N O P*, ou l'arc *N T P*, car c'eſt la même choſe, qu'il faut diviſer en trois parties égales. Je ſuppoſe la choſe faite, & que cet arc eſt diviſé, comme on le demande, aux points *Q*, *T*. Je tire les rayons *O N*, *O Q*, *O T*, *O P*; la corde *N P* de l'arc donné, les cordes *N Q*, *Q T*, *T P*; & *Q S* parallele à *T O*.

Les triangles *N O Q*, *Q O T*, *T O P* ſont égaux, iſoſceles & ſemblables.

Les triangles *N O Q*, *Q N R* ſont auſſi ſemblables, car ils ont l'angle *N Q R* commun; l'angle *N O Q* au centre, égal 20. 3. Eucl. à l'angle *Q N P* à la circonference. Et comme le triangle *N O Q* eſt iſoſcele, le triangle *Q N R* le ſera auſſi, & les angles *N Q R*, *N R Q* ſur la baſe *Q R* ſont égaux, & les côtez *N Q*, *N R* ſont encore égaux.

On peut dire les mêmes choſes du triangle *M P T* comparé avec le triangle *P O T*, de ſorte que les triangles *Q N R*, *M P T* ſont égaux & ſemblables.

Les angles *N Q R*, *N R Q* viennent d'être démontrez égaux : mais les angles *N Q R*, *O Q T* ſont auſſi égaux: donc les angles *N R Q*, *O Q T* le ſont auſſi. Mais les angles *N R Q*, *O R M* ſont encore égaux : donc enfin les angles *O Q T*, *O R M* ſont égaux; & les lignes *N P*, *Q T* ſont paralleles.

Les triangles *N Q R*, *Q R S* ſont auſſi équiangles, car ils ont l'angle *Q R S* commun; & à cauſe des paralleles *Q S*, *T O*, les angles *Q S R*, *T M P* ſont égaux. Mais dans les triangles équiangles *Q N R*, *M P T*, les angles

angles QRS, TMP sont égaux: les angles QSR, QRS sont donc égaux. Le triangle QRS est isoscele comme le triangle NQR, & les côtez QR, QS égaux.

Nommons à present le rayon donné ON, 1; la corde donnée PN, q; la corde NQ, z. Nous avons ces Analogies ON, $1 : NQ$, $z :: NQ$, $z : QR$, $zz :: QR$, $zz : RS$, z^3.

Mais parceque $NQ = NR$ dans le triangle isoscele QNR, $PT = PM$ dans le triangle isoscele TPM, $QT = SM$ dans le parallelogramme $QTMS$; il suit que si l'on ajoûtoit une quantité égale à RS à la corde PN, l'on feroit $PN + RS =$ aux trois cordes NQ, QT, TP: donc $q + z^3 = 3z$; $z^3 = * \, 3z - q$, ou étant $3 = p$, $z^3 = * + pz - q$.

Maintenant suivant les Regles de Sect. 1. Art. 1. Fig. 249. décrivez la parabole FAG dont le parametre est 1, le sommet A, l'axe AC; sur lequel prenez $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{3}{2}$. Au point D élevez la perpendiculaire $ED = \frac{1}{2} q$. Du centre E, de l'intervale EA, décrivez le cercle FAG, qui outre le sommet A, coupe la parabole aux points g, G, F. De ces points tirez sur l'axe les pependiculaires gk, GK, FL, qui sont les valeurs de z. Parcequ'il y a $-q$, la fausse FL est du côté, où est le centre E, les vrayes gk, GK sont de l'autre. La plus petite gk est la corde cherchée $NQ = QT = TP$; & parceque PN n'est pas moins la corde de l'arc NVP, que de l'arc NTP, la plus grande racine vraye GK est égale à NV corde du tiers de l'arc NVP.

Dém. au point g. Par la nature de la parabole le parametre $1 \times Ak = \overline{kg}^2$, zz; & $Ak = zz$. AD est $AC + CD$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$; & dans le triangle rectangle EDA, $\overline{EA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2$, $4 + \frac{1}{4} qq$; de plus Dk est $AD - Ak$, $2 - zz = EM$; $Mk = ED$, $\frac{1}{2} q$; & $gM = gk + km$ $z + \frac{1}{2} q$; & dans le triangle rectangle EMg, $\overline{Eg}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{Mg}^2$, $4 - 4zz + z^4 + zz + qz + \frac{1}{4} qq$. Mais $\overline{EA}^2 = \overline{Eg}^2$; donc $4 + \frac{1}{4} qq = 4 - 4zz + z^4 + zz + qz + \frac{1}{4} qq$; $z^3 = * \, 3z - q$. Ce qu'il falloit démontrer.

2. Pour faire voir que l'appliquée GK est égale à NV, corde du tiers de l'arc NVP, appliquons le calcul à NV, Fig. 250. il doit donner l'équation $z^3 = * \, 3z - q$. Fig. 250.

Supposons la chose faite, que les trois arcs NV, VT, TP soient égaux aussi bien que les trois cordes NV; VT, TP, que l'on nommera z chacune. Tirez les rayons ON, OV, OT, OP; VS parallele à TO jusqu'à ce qu'elle rencontre la corde PN prolongée. Continuez encore la même corde en Q de sorte que PQ soit égale à PT, z; TO en M, VO en R.

Les arcs NV, VT, TP sont égaux: donc les arcs NVT, VTP le sont aussi; aussi bien que les angles NVT, VTP. Et parceque dans le quadrilatere $NVTP$ les angles NVT, NPT sont ensemble égaux à deux

droits, comme aussi les angles *VTP*, *VNP*; il faut que les angles *VNP*, *NPT* soient égaux entr'eux : donc enfin les angles *VNP*, *NVT* sont égaux à deux droits, les lignes *NP*, *VT* sont paralleles.

Les lignes *VS*, *TM*; *VT*, *SMP* sont paralleles, & $SM = VT$, z. Les triangles *NOV*, *VOT*, *TOP* sont isosceles, égaux & semblables, & les angles sur leurs bases *NV*, *VT*, *TP* égaux.

Il faut prouver que les triangles *NOV*, *VNR*, *RVS* sont équiangles.

Les triangles *NOV*, *VNR* ont l'angle *V* commun. A cause des paralleles *NR*, *VT*, les angles alternes *NRV*, *RVT* sont égaux : mais les angles *RVT* ou *OVT*, *VNO* sont aussi égaux; donc les angles *NRV*, *VNO* sont aussi égaux : sont encore égaux; & le triangle *NVR* est isoscele, comme le triangle *NOV* l'est; donc $NR = NV$, z.

Les triangles *NVR*, *VRS* sont équiangles; car outre l'angle *R* commun, les angles *VSR*, *NVR* sont égaux, puisque à cause des paralleles *VS*, *TM*, les angles *VSR*, *TMR* sont égaux; & à cause des paralleles *NP*, *VT*, les angles alternes *TMR*, *MTV* sont égaux : mais les angles *MTV* ou *OTV*, *NVR* ou *NVO* sont encore égaux : donc les angles *TMR*, *NVR* sont égaux : donc enfin les angles *VSR*, *NVR* sont égaux.

Dans les triangles équiangles *NOV*, *VNR*, *RVS* l'on a ces analogies $ON, 1 : NV, z :: NV, z : VR, zz :: VR, zz : SR, z^3$.

Ensuite le triangle *MPT* est isoscele, car à cause des paralleles *NP*, *VT*, les angles alternes *TMP*, *MTV* sont égaux, mais les angles *MTV* ou *OTV*, *PTM* ou *PTO* sont égaux; donc les angles *TMP*, *PTM* sont égaux, & $PM = PT$, z.

Il faut maintenant considerer que la ligne *SQ* est $3z$, car elle est composée de $SM = z$, $MP = z$, $PQ = z$. D'un autre côté l'on a prouvé que *NR* est z, ainsi $NR = PQ$; ajoûtez la ligne commune *RP*, vous ferez $RQ = NP$, q. Mais $SR = SQ - RQ$, $z^3 = 3z - q$. Ainsi le calcul donne sur la corde *NV*, Fig. 250. la même équation que sur la corde *NQ*, Fig. 248. M. DESCARTES assure que la racine fausse *FL*, Fig. 249. est égale aux deux vrayes *GK*, *gk*; c'est la matiere de l'Article suivant.

3. M. DESCARTES ne parle point de l'usage qu'on peut faire de la racine fausse *FL* Fig. 249. on pourroit d'abord penser qu'elle appartient au cercle *NPVN*, & qu'elle sert à diviser en trois parties égales ou la somme ou la difference des deux arcs que les racines vrayes divisent.

FIG. 248. 249.

Mais on peut prouver que ces deux choses sont fausses par ce seul raisonnement. Les arcs *NQP*, *NVP* Fig. 248. composent toute la circonference : donc les arcs *NQ*, *NV* sont le tiers de la circonference, & la corde *QV*, si on la tiroit, mesureroit exactement trois fois toute la circon-

ference. Mais cette corde fait un triangle avec les cordes *VN*, *NQ*, elle est donc plus petite que ces deux cordes prises ensembles ; & moindre par consequent que la racine fausse, laquelle leur est égale : donc enfin cette racine fausse est trop grande pour pouvoir diviser la circonference entiere ou la somme des deux arcs *NTP*, *NVP* en trois parties égales ; & à beaucoup plus forte raison sera-t-elle trop grande pour pouvoir diviser en trois parties égales la difference de ces deux arcs.

De quel usage est donc cette racine fausse ? je remarque deux choses, la premiere que cette racine étant trouvée par un Problême, où l'on demande la trisection d'un arc, elle doit servir à diviser un arc circulaire en trois parties égales. La seconde qu'il n'y a qu'une racine fausse, tandis qu'il y en a deux vrayes : & qu'ainsi les deux vrayes peuvent se partager toute la circonference, de sorte que l'une en divise l'arc *NTP*, l'autre l'arc *NVP* : mais que la fausse étant seule, il faut qu'elle divise toute une circonference, parceque si elle ne divisoit qu'un arc déterminé quelconque *NTP*, on demanderoit avec raison, ou pourquoi elle divise cet arc plûtôt que l'autre, ou quelle est la racine fausse, qui divise l'autre arc *NVP*.

La racine fausse divisant toute une circonference, elle est le côté d'un triangle équilateral inscrit dans un cercle, & il s'agit de sçavoir quel est ce cercle. Pour cela je cherche la valeur du côté d'un triangle équilateral inscrit, ou de la corde d'un arc de 120. degrez. Ce que je fais de deux manieres.

La premiere c'est que afin que la circonference *NPVN* de Fig. 248. soit divisée en trois parties égales, il faut que le rayon *ON* demeurant dans la même position, le rayon *OQ* vienne en *Oq* de Fig. *A*, & le rayon *OT* en *Ot*, & le rayon *OP* en *Op*. De sorte que les points *N*, *P* n'en faisant qu'un Fig. *A*, la droite *NP* de Fig. 248. devient nulle, & $q = 0$ dans $z^3 - 3z + q = 0$, & il ne reste que $z^3 - 3z = 0$, dont les racines sont $z = 0$, $z = \sqrt{3}$, qu'on peut considerer comme vrayes, l'une divisant le premier arc, lequel est ici toute la circonference ; l'autre divisant le second arc, lequel est zero. Et il n'y a point dans ce cas de racine fausse.

La seconde sera telle. Tirez la perpendiculaire *OB*, Fig. *A*. Dans le triangle isoscele *NOq* l'angle *O* est de 120. degrez, ainsi chacun des deux autres angles est de 30. degrez.

Dans le triangle rectangle *OBq*, par le Problême de trigonometrie, comme le sinus total au sinus de 30. degrez, ainsi le rayon *Oq* au côté *OB* ; mais le sinus de 30. degrez est la moitié du sinus total, donc *OB* est la moitié de *Oq*. Ainsi étant $OQ = 1$, on aura $OB = \frac{1}{2}$; & dans le triangle *OBq* rectangle, $Bq = \sqrt{\overline{Oq}^2 - \overline{OB}^2}$, $\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, & $Nq = \sqrt{3}$ comme auparavant, car la perpendiculaire *OB* divise en deux parties égales la droite *NQ*.

Ainsi dans tous les cercles la raison du rayon aux sinus & aux cordes des

arcs semblables étant la même : la raison du rayon au côté du triangle équilateral inscrit est toûjours comme 1 à $\sqrt{3}$. Ainsi la racine fausse trouvée en cherchant la trisection de l'angle dans un cercle, divise en trois parties égales toute la circonference d'un autre cercle, dont on trouvera le rayon, en faisant comme $\sqrt{3}$ est à 1, ainsi la racine fausse n au rayon $\frac{n}{\sqrt{3}}$ de ce second cercle ; le rayon du premier cercle étant 1.

Et parceque les cercles sont en raison doublée de leurs rayons. Faites $1 : \frac{n}{\sqrt{3}} :: \frac{n}{\sqrt{3}} : \frac{nn}{3}$. Le second cercle sera au premier, comme le tiers du quarré de la racine fausse est à 1.

La racine fausse est la plus grande, lorsque NP est le diametre du cercle, car soit Fig. 248. $NP, q = 2$: les racines de $z^3 - 3z + 2 = 0$ sont $z - 1 = 0$, $z - 1 = 0$, $z + 2 = 0$. En effet le rayon divise en trois parties égales les deux demi-circonferences.

Ensute la racine fausse est d'autant plus petite, qu'elle s'éloigne plus du diametre.

Soit $q = \sqrt{2}$, côté du quarré inscrit ; les racines de $z^3 - 3z + \sqrt{2} = 0$ sont $z - \sqrt{2} = 0$, laquelle divise le grand arc NVP, les deux autres $z + \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$.

Il est évident que le Problême de la trisection de l'angle est souvent un Problême plan.

4. Examinons quelques-unes des constructions, que l'on peut faire de l'équation $z^3 - 3z + q = 0$, ou étant $3 = p$, $z^3 - pz + q = 0$. Multiplions la par sa racine z, pour la faire du quatriéme degré $z^4 - pzz + qz = 0$.

Ensuite prenons l'équation à la parabole $zz = 1y$, parceque le rayon du cercle proposé est 1, $zz - y = 0$.

Substituons deux fois la valeur de zz dans le premier terme seulement de la proposée, il se fait $yy - pzz + qz = 0$, à l'hyperbole par ses diametres.

Substituons encore la valeur de zz dans le second terme, nous ferons $yy - py + qz = 0$, à la parabole.

Substituons cette valeur une fois dans le premier terme de la proposée, nous aurons $yzz - pzz + qz = 0$; $yz - pz + q = 0$, à l'hyperbole par ses asymptotes.

Ajoûtons les deux équations à la parabole, c'est $zz - y + yy - py + qz = 0$, au cercle, &c.

5. M. DESCARTES a pû faire la construction, qu'il nous a donnée, avec l'équation $zz = y$ à la parabole, & l'équation $zz - y + yy - py + qz = 0$ au cercle.

Car Fig. 249. Décrivons la parabole AF, dont le parametre est 1, A le sommet, AL, l'axe, les appliquées gk, z ; les abscisses AK, y.

Fig. 249.

Pour construire l'équation $zz + qz = y + py - yy$, faisons $z + \frac{1}{2}q = v$, $v - \frac{1}{2}q = z$; & $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p = x$, $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p = y$; & la reduite sera $vv = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq - xx$. Maintenant parceque nous avons $z + \frac{1}{2}q = v$; nous prolongerons gk en M de sorte que kM soit $\frac{1}{2}q$, & $gM = gk + kM$, $z + \frac{1}{2} = v$. Parceque nous avons $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p - y = x$, sur l'axe nous couperons $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2}p$, & nous aurons $DK = DC + CA - AK$, $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - y = x = EM$; au point D nous éleverons la perpendiculaire $DE = kM = \frac{1}{2}q$. Du centre E, de l'intervale EA décrivons le cercle FAG, qui coupe la parabole aux points F, g, G, outre le sommet A; de chaque point d'intersection menons sur l'axe les appliquées FL, kg, KG, la premiere est une valeur negative, les deux autres sont les valeurs positives de la proposée.

Par la nature de la parabole $1 \times Ak = \overline{kg}^2$, $y = zz$.

Par la nature du cercle $\overline{Mg}^2$ = au rectangle sous le rayon $+ EM$, & sous le rayon $- EM$. Or le rayon EA, est $\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2}$, $= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq}$: donc $\overline{MG}^2$, $vv = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq - xx$. Pour vv, xx, y & yy substituons leurs valeurs, il vient $z^4 = pzz - qz$; $z^3 = * + pz - q$.

6. Construisons la même équation avec les deux paraboles $1y = zz$, qui Fig. 251. se construira à l'ordinaire par la parabole FAG; $yy - py + qz = 0$, qui après avoir fait $y - \frac{1}{2}p = s$ ou $\frac{1}{2}p - y = s$, se reduit à Fig. 251.
$ss = \frac{1}{4}pp - qz$. Elle se construit ainsi. Sur l'axe AL je prends $AD = \frac{1}{2}p$; par le point D je mene l'infinie DB perpendiculaire à AL; je coupe $DB = \frac{pp}{4q}$, & avec le parametre q je décris la parabole $FBGA$, dont B est le sommet, BD l'axe, qui coupe l'autre parabole aux points F, G, g & au sommet A. Des points F, G, g je tire les appliquées GK, gk, FL qui sont, comme n. 4. les racines de la proposée.

Au point G, par la nature de la premiere parabole $1 \times AK = \overline{KG}^2$, $y = zz$. Car $AK = y$; $GK = + z$.

Dans la seconde parabole du point G abaissez GM perpendiculaire sur l'axe BD. $GM = KD = AD - AK$, $\frac{1}{2}p - y = s$; $DM = KG$, z; $BM = BD - DM$, $\frac{pp}{4q} - z$. Par la nature de la parabole $q \times BM = \overline{MG}^2$, $\frac{1}{4}pp - qz = ss$. Pour ss mettez sa valeur; il vient $\frac{1}{4}pp - qz = \frac{1}{4}pp - py + yy$. Pour y & yy mettez encore leur valeur tirée de $y = zz$; vous ferez $\frac{1}{4}pp - qz = \frac{1}{4}pp - pzz + z^4$; $z^4 = pzz - qz$, $z^3 = * pz - q$.

La parabole FBG passe par le sommet A de l'autre parabole, car $q \times BD = \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp$.

La trisection de l'angle peut se trouver encore avec d'autres équations, & par l'intersection d'autres courbes.

ARTICLE IV.

Lorſqu'un cercle coupe une parabole des deux côtez de l'axe, les appliquées, qui ſont d'un côté, priſes enſemble, ſont égales aux appliquées priſes enſemble, qui ſont de l'autre.

IL faut obſerver 1° que lorſque le cercle coupe la parabole au ſommet, ce point d'interſection n'eſt d'aucun côté de l'axe, auſſi l'appliquée eſt là égale à zero. 2°. Que lorſque le cercle touche la parabole, le point d'attouchement vaut deux points d'interſection, auſſi l'appliquée doit alors être priſe deux fois: ainſi quand le cercle touche d'un côté, & coupe en deux points de l'autre la parabole, les deux appliquées de ce côté ſont égales à l'appliquée de l'autre, priſe deux fois. 3°. Que le cercle doit couper la parabole en quatre points, un point de contact étant pris pour deux.

FIG. 252. 1. Soit Fig. 252. l'axe KA de la parabole $EDKBF$, ſur lequel eſt A le centre du cercle qui coupe cette parabole aux points E, D, B, F; l'on a les appliquées à l'axe $GB = GD$, $HF = HE$, puiſqu'elles ſont priſes deux à deux à une diſtance égale du ſommet K.

FIG. 253. 2. Que le cercle coupe la parabole, Fig. 253. en quatre points F, A, G, g; dont le ſommet A en ſoit un. Appliquez FL, GK, gk à l'axe de la parabole; prolongez KG en M, kg en m, juſqu'à ce qu'elles rencontrent le diametre EM du cercle parallele à l'axe AB; par le centre E tirez EB perpendiculaire au même axe; joignez les rayons EA, EG, Eg, EF.

Nommez le parametre de la parabole, a; AB, b; EB, $c = MK = mk = NL$; AK, t; Ak, s; AL; r; KG, y; kg, z; FL, v. Et vous aurez $GM = GK + KM$, $y + c$; $gm = gk + km$, $z + c$; $FN = FL - NL$, $v - c$. De plus par la nature de la parabole, le parametre $a \times AK = \overline{KG}^2$; $at = yy$, $t = \frac{yy}{a}$; $a \times Ak = \overline{kg}^2$, $as = zz$, $s = \frac{zz}{a} = Ak$; $a \times AL = \overline{FL}^2$, $ar = vv$, $r = \frac{vv}{a} = AL$. Enſuite $ME = KB = AB - AK$, $b - \frac{yy}{a}$; $mE = kB = AB - Ak$, $b - \frac{zz}{a}$; $EN = BL = AL - AB$, $\frac{vv}{a} - b$. Maintenant dans le triangle rectangle EMG, $\overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MG}^2$, $bb - \frac{2byy}{a} + \frac{y^4}{aa} + cc + 2cy + yy =$ dans le triangle rectangle EBA, $\overline{EA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$, $bb + cc$. Ce qui ſe reduit à $2ab = \frac{y^3 + 2aac + aay}{y}$.

Dans le triangle rectangle Emg, $\overline{Eg}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mg}^2 = \overline{EA}^2$, d'où l'on tire $2ab = \frac{z^3 + 2aac + aaz}{z}$.

Dans le triangle rectangle ENF, $\overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{NF}^2 = \overline{EA}^2$, d'où l'on fait $2ab = \frac{v^3 - 2aac + aav}{v}$.

Donc 1° $2ab = \frac{y^3 + 2aac + aay}{y} = \frac{z^3 + 2aac + aaz}{z}$; $y^3z + 2aacz + aayz = yz^3 + 2aacy + aayz$; $2aac = zzy + zyy$.

Donc 2° $2ab = \frac{y^3 + 2aac + aay}{y} = \frac{v^3 - 2aac + aav}{v}$; $vy^3 + 2aacv + aavy = v^3y - 2aacy + aavy$; $2aac = vvy - vyy$

Donc 3° $2aac = vvy - vyy = zzy + zyy$, $vv - vy = zz + zy$; $vv - zz = vy + yz$; & divisant par $v + z$; le quotient est $v - z = y$; $v = y + z$. $FL = KG + kg$. Ainsi M. DESCARTES a eu raison de l'assurer.

3. Si Fig. 254. le cercle coupoit la parabole au sommet A, au point F, & la touchoit au point G; l'on concevroit une seconde appliquée kg au point infiniment proche du point g; l'on feroit aux trois points F, G, g le même calcul que n. 2. l'on viendroit à l'équation $v = y + z$; & parceque $kg = KG$, puisque l'une est infiniment peu differente de l'autre, l'on a $y = z$; & $v = 2y$, FL double de KG. Fig. 254.

4. Que le cercle coupe Fig. 255. la parabole aux quatre points F, f, G, g, dont le sommet A n'est pas un; & qu'il y en ait trois d'un côté de l'axe, & un de l'autre. Il faut outre les lignes de Fig. 253. n. 2. mener l'appliquée fl jusqu'en n, tirer le rayon Ef; nommer Al, q; lf, x; fn sera $fl + ln$, $x + c$; & par la nature de la parabole $a \times Al = \overline{lf}^2$, $aq = xx$, $q = \frac{xx}{a} = Al$; & $nE = lB = AB - Al$, $b - \frac{xx}{a}$. Fig. 255.

Maintenant dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{En}^2 + \overline{nf}^2$, $bb - \frac{2bxx}{a} + \frac{x^4}{aa} + cc + 2cx + xx =$ dans le triangle rectangle EGM, $\overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MG}^2$, $bb - \frac{2byy}{a} + \frac{y^4}{aa} + cc + 2cy + yy$; $\frac{2byy}{a} - \frac{2bxx}{a} = \frac{y^4}{aa} - \frac{x^4}{aa} + 2cy - 2cx + yy - xx$; multipliez par aa, $2abyy - 2abxx = y^4 - x^4 + 2aacy - 2aacx + aayy - aaxx$; divisez par $y - x$, $2aby + 2abx = y^3 + yyx + yxx + x^3 + 2aac + aay + aax$; divisez encore par $y + x$, $2ab = \frac{y^3 + yyx + yxx + x^3 + 2aac + aay + aax}{y + x}$.

Dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{Eg}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mg}^2$, d'où vous formez $2ab = \frac{z^3 + xzz + xxz + x^3 + 2aac + aaz + aax}{z + x}$.

Dans le triangle Efn, $\overline{Ef}^3 = \overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{NF}^2$, d'où vous aurez $2ab = \frac{v^3 - vvx + vxx - x^3 - 2aac + aav - aax}{v - x}$.

Donc 1° $2ab = \frac{y^3 + yyx + yxx + x^3 + 2aac + aay + aax}{y + x} = \frac{z^3 + xzz + xxz + x^3 + 2aac + aaz + aax}{z + x}$. Reduisez à la même denomination, ôtez les termes qui s'effacent, & ordonnez ainsi ceux qui restent, $2aacz - 2aacy = yz^3 + xyzz + xz^3 + xxzz - y^3z - xyyz - xy^3 - xxyy$; divisez par $z - y$, $2aac = yzz + yyz + 2xyz + xzz + xyy + xxz + xxy$.

Donc 2° $2ab = \frac{y^3 + xyy + xxy + x^3 + 2aac + aay + aax}{y + x} = \frac{v^3 - xvv + xxv - x^3 - 2aac + aav - aax}{v - x}$. Reduisez à la même denomination. Divisez par $v + y$, $2aac = yvv - vyy + vvx - 2vxy + xyy - vxx + xxy$.

Donc 3° $2aac = vyy - vyy + vvx - 2vxy + xyy - vxx + xxy = yzz + yyz + 2xyz + xzz + xyy + xxz + xxy$, qui se reduit à $yvv + vvx - vyy - 2vxy - vxx - yzz - yyz - 2xyz - xzz - xxz = 0$. Divisez par $vy + yz + vx + xz$, le quotient est $v - z - y - x = 0$, $v = x + y + z$, $FL = fl + KG + kg$.

5. Si le cercle coupoit la parabole en F, f, & la touchoit en G, l'on concevroit le point g infiniment proche de G; l'on feroit le calcul comme n. 4. & l'on auroit toûjours l'équation $v = x + y + z$. Mais parceqne KG, kg sont infiniment peu differentes l'une de l'autre, l'on feroit KG, $y = kg$, z; & $v = x + 2y$, $FL = fl + 2KG$.

Fig. 256. 6. Que le cercle Fig. 256. coupe la parabole aux quatre points F, f, G, g, dont deux sont d'un côté, & deux de l'autre. Il n'y a d'autre difference dans les valeurs des lignes de n. 2. 4. si ce n'est $GM = GK - KM$, $y - c$; $gm = gk - km$, $z - c$; $FN = FL + LN$, $v + c$; $Em = Bk = Ak - AB$, $\frac{zz}{a} - b$.

Maintenant dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{En}^2 + \overline{nf}^2$, $bb - \frac{2bxx}{a} + \frac{x^4}{aa} + xx + 2cx + cc = \overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{NF}^2$ dans le triangle rectangle ENF, $bb - \frac{2bvv}{a} + \frac{v^4}{aa} + vv + 2cv + cc$; $\frac{2bvv}{a} - \frac{2bxx}{a} = \frac{v^4}{aa} - \frac{x^4}{aa} + vv - xx + 2cv - 2cx$. Multipliez par aa, $2abvv - 2abxx = v^4 - x^4 + aavv - aaxx + 2aacv - 2aacx$; divisez par $v - x$; $2abv + 2abx = v^3 + vvx + vxx + x^3 + 2aac + aav + aax$; divisez encore par $v + x$, $2ab = \frac{v^3 + vvx + vxx + x^3 + 2aac + aav + aax}{v + x}$.

Dans le triangle rectangle $Enf = \overline{Ef}^2 = \overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MG}^2$; divisez par $y + x$, & vous formerez $2ab = \frac{y^3 - xyy + xxy - x^3 - 2aac + aay - aax}{y - x}$.

Dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{Eg}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mg}^2$; divisez par $z + x$, & vous aurez $2ab = \frac{z^3 - xzz + xxz - x^3 + aaz - aax - 2aac}{z - x}$.

Donc 1° $2ab = \frac{y^3 - xyy + xxy - x^3 - 2aac + aay - aax}{y - x} = \frac{v^3 + vvx + vxx + x^3 + 2aac + aav + aax}{v + x}$. Reduisez à la même denomination, ôtez les termes qui s'effacent & arrangez ainsi les autres: $2aacy + 2aacv = vy^3 - vxyy + xy^3 - xxyy - v^3y - vvxy + v^3x + vvxx$; divisez par $y + v$, $2aac = vyy - vvy - 2vxy + xyy + vvx - xxy + vxx$.

Donc 2° $2ab = \frac{y^3 - xyy + xxy - x^3 - 2aac + aay - aax}{y - x} = \frac{z^3 - xzz + xxz - x^3 + aaz - aax - 2aac}{z - x}$. Reduisez à la même denomination, divisez par $z - y$, $2aac = xzz + 2xyz + xyy - yzz - yyz - xxz - xxy$.

Donc 3° $2aac = vyy - vvy - 2vxy + xyy + xvv - xxy + vxx$

$vxx = xzz + 2xyz + xyy - yzz - yyz - xxz - xxy$; qui se reduit à $vyy - vvy - 2vxy + vvx + xxv - xzz - 2xzy + yzz + yyz + xxz = o$; divisez par $vy - vx + yz - xz$, le quotient est $y - x - v + z = o$, $x + v = y + z$, $fl + FL = KG + kg$.

ARTICLE V.

Description des courbes par leur Equation solide.

1. LOrsque dans une équation, il n'y a qu'une des inconnuës qui monte au troisiéme ou au quatriéme degré, & que l'autre n'est que du premier ou du second; on regarde le Problême, qui doit décrire la courbe, dont cette équation exprime la nature, comme plan; & l'on n'a besoin que du cercle & de la ligne droite, pour trouver tous les points qu'on cherche. Vous en avez des Exemples, Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

2. Lorsque les deux inconnuës vont au troisiéme ou quatriéme degré, si celle qui monte au quatriéme n'a que le premier terme, comme $v^4 = ax^3 + x^4$; le Problême est encore plan; car l'on a $vv = \sqrt{ax^3 + x^4}$, $v = \sqrt{\sqrt{ax^3 + x^4}}$, & chaque valeur de v se trouve avec la Regle & le Compas.

Si l'inconnuë qui est élevée au quatriéme degré n'a que le troisiéme terme $v^4 - 2aavv = ax^3 + x^4$, le Problême est plan par la même raison, car ajoûtant a^4 de chaque côté, l'on fait $v^4 - 2aavv + a^4 = ax^3 + x^4 + a^4$, $vv - aa = \pm\sqrt{ax^3 + x^4 + a^4}$, $v = \sqrt{aa \pm \sqrt{ax^3 + x^4 + a^4}}$.

3. Mais lorsque cela n'arrive pas aux équations de trois ou quatre dimensions, l'on suppose toutes les Regles de Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 3. & l'on cherche autant de points de la courbe à décrire, que l'on veut, en se servant de quelque Section conique outre le cercle & la ligne droite; en un mot pour trouver chaque point, on construit un Problême solide, comme on a fait ceux de toute cette Partie IV.

Il faut décrire la courbe, dont l'équation est $x^3 = -ayx + y^3$, dans laquelle a est l'unité, Fig. 257. Je tire à angles droits les lignes HG, BN; les $+x$ se prennent sur BN en allant de B vers I; les $-x$ de l'autre côté; les $+y$ sur BG en allant de B vers G; les $-y$ en allant de B vers H. FIG. 257.

Soit $y = +a$, l'équation se change en $x^3 = * - aax + a^3$, ou pour la reduire à l'expression de M. DESCARTES $x^3 = * - apx + aaq$, en faisant $p = a = q$. L'on décrit Fig. 258. la parabole AF, dont le parametre est AP, a; le sommet A, l'axe AC; sur lequel l'on coupe $AC = \frac{1}{2}a$; & parcequ'il y a $-p$ dans l'équation Regle 3. Art. 1. Sect. 1.

Part. 4. Liv. 3. l'on prend $CD = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a$, & le point D tombe sur le sommet A; au point D ou A l'on éleve la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}a$; du point E, du rayon EA l'on décrit le cercle DF, qui coupe la parabole au point F, & l'appliquée FL, parcequ'il y a $+ q$, est Reg. 7. du même endroit; la valeur vraye cherchée de x. C'est pourquoi Fig. 257. étant BG, $+ y = a$, comme on l'a prise, j'éleve la perpendiculaire $GK = BI$, x; $= FL$; & le point K est un point de la courbe cherchée, qui répond à l'appliquée $IK = BG$, $y = a$.

Soit $y = - a$, l'équation proposée se change en $x^3 = * + aax - a^3$, ou $x^3 = * + apx - aaq$. Ainsi vous vous servirez de la même parabole AF, Fig. 258. & de $AC = \frac{1}{2}a$; mais parcequ'il y a $+ p$, vous prendrez $Cd = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a$ en allant de C vers l; au point d vous éleverez la perpendiculaire $de = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}a$; du centre e, & de l'intervale eA vous décrirez le cercle Af, qui coupe la parabole en f; l'appliquée fl, parcequ'il y a $- q$, est la valeur fausse de x. C'est pourquoi Fig. 257. étant $BH = - y = a$, j'éleve la perpendiculaire $HM = BN$, $- x$; $= fl$; le point M est à la courbe cherchée, qui répond à l'appliquée $MN = BH = - y = a$.

On cherchera de la même maniere tous les autres points, que l'on voudra de la courbe MBK, & pour chacun l'on resoudra un Problême solide; & l'on décrira la courbe en joignant tous ces points. Si l'on suppose par exemple $y = \frac{1}{2}a$, l'équation proposée devient $x^3 = - \frac{1}{2}aax + \frac{1}{8}a^3$, &c. L'on doit observer, que la même parabole peut toûjours servir, aussi-bien que le même point C; mais les points D, d varient, car dans ce second cas CD doit être $\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a$; les points E, e varient aussi, car ici DE est $\frac{1}{2}q = \frac{1}{16}a$: d'où il suit que les cercles sont toûjours differens.

4. L'on peut aussi chercher les points de la courbe, ou les valeurs de x, en suivant les Regles de Art. I. de cette Section.

5. Il arrive souvent que l'on trouve des manieres plus aisées de décrire les courbes, sans avoir besoin de se servir de leur équation.



SECTION III.

Tous les Problêmes ſolides ſe peuvent reduire à trouver deux moyennes proportionelles, ou à diviſer un angle en trois parties égales.

M. DESCARTES.

IL ſeroit ſuperflu que je m'arrêtaſſe ici à donner d'autres Exemples ; car tous les Problêmes, qui ne ſont que ſolides, ſe peuvent reduire à tel point, qu'on n'a aucun beſoin de cette Regle pour les conſtruire ; ſinon entant qu'elle ſert à trouver deux moyennes proportionelles, ou bien à diviſer un angle en trois parties égales. Ainſi que vous connoîtrez en conſiderant, que leurs difficultez peuvent toûjours être compriſes en des équations, qui ne montent que juſqu'au quarré de quarré, ou au cube ; & que toutes celles qui montent au quarré de quarré, ſe reduiſent au quarré par le moyen de quelques autres, qui ne montent que juſques au cube ; & qu'enfin on peut ôter le ſecond terme de celle-ci, en ſorte qu'il n'y en a point qui ne puiſſe ſe reduire à quelqu'une de ces trois ſortes $z^3 = * - pz + q$, $z^3 = * + pz + q$, $z^3 = * pz - q$.

Or ſi on a $z^3 = * - pz + q$, la Regle dont * Cardan attribuë l'invention à un nommé Scipio Ferreus, nous apprend que la racine eſt $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

* *Artis magnæ cap. 11. Scipio Ferreus Bononienſis jam annis abhinc triginta ferme hoc capitulum invenit; tradidit verò Antonio Maria Florido veneto, qui cum in certamen cum*

Comme auſſi lorſqu'on a $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme eſt plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme, une pareille Regle nous apprend que la racine eſt $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

D'où il paroît qu'on peut conſtruire tous les Problêmes, dont les difficultez ſe reduiſent à l'une de ces deux formes, ſans avoir beſoin des Sections coniques pour autre choſe, que pour tirer les racines cubiques de quelques quantitez données, c'eſt-à-dire pour trouver deux moyennes proportionelles entre ces quantitez & l'unité.

Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit, ut Nicolaus invenerit & ipse.

Fig. 248. 249.

Puis ſi on a $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme ne ſoit pas plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme ; en ſuppoſant le cercle $NQPV$, dont le demi-diametre NO ſoit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, c'eſt-à-dire la moyenne proportionelle entre le tiers de la quantité donnée p & l'unité ; & ſuppoſant auſſi la ligne NP inſcrite dans ce cercle, qui ſoit $\frac{3q}{p}$, c'eſt-à-dire qui ſoit à l'autre quantité donnée q, comme l'unité eſt au tiers de p ; il ne faut que diviſer chacun des deux arcs NQP, & NVP en trois parties égales, & on aura NQ la ſubtenduë du tiers de l'un, & NV la ſubtenduë du tiers de l'autre, qui jointes enſemble compoſeront la racine cherchée.

Enfin ſi on a $z^3 = pz - q$, en ſuppoſant derechef le cercle $NQPV$, dont le rayon NO ſoit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & l'inſcrite NP ſoit $\frac{3p}{q}$*, NQ la ſubtenduë du tiers de l'arc NQP ſera l'une des racines cherchées, & NV la ſubtenduë du tiers de l'autre arc ſera l'autre. Au moins ſi le quarré de la moitié du dernier terme n'eſt point plus grand, que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme : car s'il étoit plus grand, la ligne NP ne pourroit être inſcrite dans le cercle, à cauſe qu'elle ſeroit plus longue que ſon diametre. Ce qui ſeroit cauſe que les deux vrayes racines de cette équation ne ſeroient qu'imaginaires, & qu'il n'y en auroit de réelles que la fauſſe, qui en ſuivant la Regle de Cardan ſeroit $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

* *Faute d'impreſſion : il faut* $\frac{3q}{p}$.

Au reſte il eſt à remarquer, que cette façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux côtez de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoiſſe, n'eſt en rien plus intelligible, ni plus ſimple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux ſubtenduës de certains arcs ou portions de cercles, dont le triple eſt donné.

En ſorte que toutes celles, qui ne peuvent être exprimées par les Regles de Cardan, le peuvent être autant ou plus clairement par la façon ici propoſée.

Car ſi par Exemple on croit de connoître la racine de cette équation $z^3 = * + pz + q$, à cauſe qu'on ſçait, qu'elle eſt compo-

ſée de deux lignes, dont l'une eſt le côté d'un cube, duquel le contenu eſt $\frac{1}{2}q$ ajoûté au côté d'un quarré, duquel derechef le contenu eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, & l'autre eſt le côté d'un autre cube, dont le contenu eſt la difference qui eſt entre $\frac{1}{2}q$, & le côté de ce quarré dont le contenu eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, qui eſt tout ce qu'on apprend par la Regle de Cardan.

Il n'y a point de doute, qu'on ne connoiſſe autant ou plus diſtinctement la racine de celle-ci $z^3 = * + pz - q$, en la conſiderant inſcrite dans un cercle, dont le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & ſçachant qu'elle y eſt la ſubtenduë d'un arc dont le triple a pour ſa ſubtenduë $\frac{3q}{p}$. Même ces termes ſont beaucoup moins embarraſſez que les autres, & ils ſe trouveront beaucoup plus courts, ſi on veut uſer de quelque chifre particulier pour exprimer ces ſubtenduës, ainſi qu'on fait du chifre $\sqrt{C}$. pour exprimer le côté des cubes.

Et on peut auſſi enſuite de tout ceci exprimer les racines de toutes les équations, qui montent juſques au quarré de quarré, par les Regles ci-deſſus expliquées. En ſorte que je ne ſçache rien de plus à deſirer en cette matiere. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus ſimples, ni qu'on les détermine par aucune conſtruction, qui ſoit enſemble plus generale & plus facile.

Après que M. DESCARTES a donné des Methodes generales pour conſtruire toutes les équations du troiſiéme & du quatriéme degré, tant celles qui ſont ſolides, que celles qui ne le ſont pas ; il en donne maintenant une autre pour les ſolides, qui conſiſte à trouver deux moyennes proportionelles & à diviſer un angle en trois parties égales ; pour celles, qui demandent deux moyennes proportionelles, il ſuit l'expreſſion, que les Regles de Cardan fourniſſent. Il applique cette Methode aux équations du troiſiéme degré, & il ſe contente de dire que le quatriéme ſe reduit au ſecond par le moyen du troiſiéme.

Les Problêmes qui montent au cube, ſe reduiſent après qu'on en a ôté le ſecond terme, à ces formules, $z^3 = * - pz + q$, $z^3 = * + pz + q$, $z^3 = * + pz - q$; auſquelles l'on peut ajoûter $z^3 = * - pz - q$, $z^3 = * * \pm q$.

§. I. $z^3 = * * \pm q$.

On a vû la construction & les racines de ces deux équations, Sect. 1. Art. 1. Ex. 1. 2. Pour les construire on n'a eû besoin que de trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & la quantité donnée q; c'est-à-dire qu'on n'a eu besoin que d'extraire la racine cubique de q. Car extraire une racine cubique d'une quantité quelconque cubique a^3, c'est trouver la quantité a racine de ce cube; laquelle étant connuë, l'on trouve aa quarré de a, qui est troisiéme proportionelle de l'unité & de a; & aa étant trouvé, l'on cherchera encore a^3 qui est troisiéme proportionelle de a & aa. Or ces quatre quantitez 1, a, aa, a^3 sont évidemment en proportion continuë: donc pour trouver le cube a^3, il ne faut que trouver les deux quantitez a, aa, moyennes proportionelles entre 1, & la quantité donnée a^3.

§. II. $z^3 = * - pz + q$.

La racine réelle & positive est $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Pour le prouver soit $z = x - \frac{p}{3x}$; l'on a $z^3 = x^3 - px + \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3}$; $pz = px - \frac{pp}{3x}$; & l'équation $z^3 = -pz + q$ se changera en $x^3 - px + \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3} = -px + \frac{pp}{3x} + q$; $x^3 - \frac{p^3}{27x^3} = q$; multipliez tout par x^3, ce sera $x^6 - \frac{1}{27}p^3 = qx^3$; $x^6 - qx^3 = \frac{1}{27}p^3$. Ajoûtez $\frac{1}{4}qq$ de chaque côté, vous ferez $x^6 - qx^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$, dont la racine quarrée est $z^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique est $x = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Substituons à present cette valeur de x dans $z = x - \frac{p}{3x}$, il viendra

$$z = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}},$$

ce qui ne demande qu'une extraction de racine cubique, à savoir celle de $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Pour reduire cette expression à celle de Cardan, je multiplie le numerateur & le denominateur de la fraction $\frac{p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ par $\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, 1° le numerateur deviendra $p\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, 2° $\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, produit $\sqrt{C.\,\frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$, qui doit être multiplié par 3, de sorte que le denominateur $3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, se changera en $3 \times \frac{1}{3}p = p$;

& toute la fraction $\frac{p}{p}\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, $=\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, & enfin la valeur de z sera $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, qui demande l'extraction de deux racines cubiques. De sorte que par la raison apportée §. 1. il faut trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & $\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ quantité connuë, & deux autres entre l'unité, & $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Et ces deux quantitez étant trouvées, par la Sect. 2. Art. 2. Ex. 1. l'on soustrait la plus petite de la plus grande ; le reste est la valeur cherchée de z.

Cette équation $z^3=*-pz+q$, ou $z^3=*-15z+124$ étant proposée, pour former la racine réelle & positive de z suivant la forme de Cardan ; il faut prendre 1° $\frac{1}{2}q=62$, dont le quarré est $\frac{1}{4}qq=3844$; 2° $\frac{1}{3}p=5$, dont le cube est $\frac{1}{27}p^3=125$; 3° ajoûter ce quarré à ce cube pour faire $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3=3969$; 4° en extraire la racine pour avoir $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=63$; 5° ajoûter $\frac{1}{2}q=62$, ce qui donne $\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=125$; 6° extraire la racine cubique de cette quantité, ce sera $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=5$. Après cela il faut 7° soustraire $\frac{1}{2}q=62$ de $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=63$, le reste est $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=1$; dont la racine cubique est $1=\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$; 8° l'on soustraira la seconde de ces racines cubiques de la premiere de cette façon : $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=5-1=4=z$.

Avec cette racine de z l'on trouvera les deux autres de l'équation proposée, si l'on divise $z^3+15z-124=0$ par $z-4=0$; le quotient est $zz+4z+31=0$, dont les deux racines imaginaires sont $z=-2\pm\sqrt{-27}$.

Dans cette forme $z^3=*-pz+q$, il y a une racine réelle positive, qui ne vient jamais sous une forme imaginaire, parceque tout est positif sous $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Les deux autres racines sont imaginaires.

Mais la racine réelle positive vient souvent, lorsqu'on veut l'exprimer en nombres, sous une forme irrationelle, quoique cette racine soit rationelle. Car soit proposée l'équation $z^3=*-6z+88$; la valeur vraye & réelle de z est 4, puisque substituant 4 pour z, 64 pour z^3, l'équation devient $64=-24+88=64$. Cependant si vous cherchez la valeur de z suivant la Formule de Cardan, vous trouverez $\frac{1}{2}q=44$, $\frac{1}{4}qq=1936$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; & $z=\sqrt{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=\sqrt{C.44+\sqrt{1944}}-\sqrt{C.-44+\sqrt{1944}}$, qui est une forme irrationelle, parceque 1944 n'est pas un quarré parfait. Cette valeur de z se trouve aussi aisément qu'une rationelle par la Geometrie comme on a vû, Sect. 1. Art. 1. Exemple 5.

§. III. $z^3 = * + pz + q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est plus grand que $\frac{1}{27}p^3$.

La racine réelle & positive est $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Ce qui se prouve ainsi. Soit $z = x + \frac{p}{3x}$; l'on aura $z^3 = x^3 + px + \frac{pp}{3x} + \frac{p^3}{27x^3}$; $pz = + px + \frac{pp}{3x}$; & l'équation $z^3 = + px + q$ deviendra $x^3 + px + \frac{pp}{3x} + \frac{p^3}{27x^3} = + px + \frac{pp}{3x} + q$; $x^3 + \frac{p^3}{27x^3} = q$.

Multiplions tout par x^3, il vient $x^6 + \frac{1}{27}p^3 = qx^3$, $x^6 - qx^3 = - \frac{1}{27}p^3$; ajoûtons dans chaque membre $\frac{1}{4}qq$, nous aurons $x^6 - qx^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, dont la racine quarrée est $x^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique est $x = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Maintenant substituons la valeur de x dans $z = x + \frac{p}{3x}$; nous formerons $z = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$ qui n'a besoin que d'une extraction de racine cubique. Nous reduirons cette expression à celle de Cardan, si nous multiplions le numerateur & le denominateur du second terme $\frac{p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$ par $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. 1°. Le numerateur deviendra $p\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. 2°. $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ produit $\sqrt{C.\, + \frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$, qui doit être multiplié par 3, de sorte que le denominateur se changera en p; & toute la fraction $\frac{p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$ devient $\frac{p}{p}\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, & enfin la valeur de z sera $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, qui a besoin de deux extractions de racines cubiques. Ainsi suivant ce qui a été dit §. 1. il faut seulement trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & la quantité connuë $\sqrt{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, & deux autres entre l'unité & la quantité donnée $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$. Ces deux quantitez se trouvent Ex. 1. Art. 1. Sect. 1. on les ajoûte, & la somme est la valeur cherchée de z.

Cette équation $z^3 = * + pz + q$, ou $z^3 = * 27z + 730$ étant proposée, pour composer la valeur de sa racine réelle & positive suivant la Forme de Cardan, il faut 1° prendre $\frac{1}{2}q = 365$, dont le quarré est $\frac{1}{4}qq = 133225$; 2° prendre $\frac{1}{3}p = 9$, dont le cube est $\frac{1}{27}p^3 = 729$; 3° du quarré ôter le cube pour avoir $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 - 132496$; 4° en extraire la racine,

racine, qui sera $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 364$; 5° ajoûter $\frac{1}{2}q$, ce qui fait $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 729$; 6° en extraire la racine cubique, $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 9$. 7° Il faut encore soustraire de $\frac{1}{2}q = 365$ la quantité $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 364$, le reste $\frac{1}{2}q - \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 1$. 8°. L'on ajoûtera enfin les deux quantitez de cette façon $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 9 + 1 = 10 = z$.

Avec cette racine de z, l'on découvrira les deux autres, si l'on divise la proposée $z^3 - 27z - 730 = 0$ par $z - 10 = 0$, car le quotient, qui les contient, est $zz + 10z + 73$, dont les deux racines imaginaires sont $z = -5 \pm \sqrt{-48}$.

Dans cette forme $z^3 = * + pz + q$ il y a une racine réelle & positive, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, car alors il n'y a rien d'imaginaire dans la Formule de Cardan. Les deux autres racines sont imaginaires. Mais la racine réelle peut souvent venir sous une forme irrationelle, lorsqu'on veut l'exprimer en nombres; la Geometrie la trouvera aussi aisément qu'une autre, comme elle a fait Sect. 1. Art. 1. Ex. 3.

§. 4. $z^3 = * + pz + q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est moindre que $\frac{1}{27}p^3$.

Sa racine est encore $z = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Elle est sous une forme imaginaire, puisque le total de ce qui est sous le signe radical $\sqrt[2]{}$. est negatif: cela pourtant n'empêche pas que la racine ne soit réelle; & c'est ce qu'on appelle le cas irreductible, c'est-à-dire celui, où une racine réelle se presente sous une forme imaginaire. Il a été nommé irreductible, parceque l'Analyse n'a pas trouvé le moyen de le resoudre, la Geometrie le resout pourtant aussi facilement que le cas reductible, car Sect. 1. Art. 1. les mêmes Regles servent également pour les deux cas.

Cependant si la Geometrie vouloit se servir de la Formule de Cardan, elle ne pourroit pas le resoudre, c'est-à-dire qu'elle ne pourroit pas trouver les deux moyennes proportionelles entre l'unité & les quantitez données $\sqrt{C.\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, puisqu'elle ne peut pas extraire la racine quarrée d'une grandeur negative $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$. C'est pour cela que M. DESCARTES a dit que ces sortes de racines ne peuvent s'exprimer suivant les Regles de Cardan; ce qui doit s'entendre d'une maniere, qui donne moyen de la resoudre.

M. DESCARTES cherche donc alors la valeur de z par la trisection de l'angle.

Soit donc proposée l'équation $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré $\frac{1}{4}qq$ de la moitié de la quantité connuë q du dernier terme ne soit pas plus grand que le cube $\frac{1}{27}p^3$ du tiers de la quantité connuë p du penultiéme terme.

Fig. 248. 249. Décrivez Figure 248. le cercle NVP, dont le rayon ON soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. qui est moyenne proportionelle entre le tiers de la quantité donnée p, & l'unité : car $\frac{1}{3}p : \sqrt{\frac{1}{3}p} :: \sqrt{\frac{1}{3}p} : 1$.

Ensuite dans ce cercle inscrivez $NP = \frac{3q}{p}$, qui est à l'autre quantité donnée q, comme l'unité est au tiers de p : car $\frac{3q}{p} : q :: 1 : \frac{1}{3}p$.

Après cela supposez l'arc NPQ, dont NP est la corde, divisé en trois parties égales NQ, QT, TP égales chacune à $-z$; operez comme Sect. 2. Art. 3. n. 1. excepté ce qui suit. Dans les triangles semblables NOQ, QNR, RQS vous avez ces analogies, ON, $\sqrt{\frac{1}{3}p} : NQ, -z ::$ $NQ, -z : QR, \frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} :: QR, \frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} : RS, = \frac{z^4}{\frac{1}{3}pz} = \frac{-z^3}{\frac{1}{3}p}$. Et parcequ'il s'en faut seulement $RS, \frac{-z^3}{\frac{1}{3}p}$, que la ligne NP, $\frac{3q}{p}$ ne soit égale aux trois cordes NQ, QT, TP égales chacune à $-z$; si à NP, $\frac{3q}{p}$ l'on ajoûte RS, $\frac{-z^3}{\frac{1}{3}p}$, l'on fera cette égalité $\frac{3q}{p} \frac{-z^3}{\frac{1}{3}p} = -3z$; $\frac{-z^3}{\frac{1}{3}p} = 3z + \frac{3q}{p}$, & multipliant tout par $\frac{1}{3}p$, $z^3 = * pz + q$.

Maintenant suivant les Regles de Sect. 1. Art. 1. l'on décrit Fig. 249. la parabole FAG, & le cercle FAG, & l'on tire les appliquées FL, GK, gk. De plus Sect. 1. Art. 1. Regle 6. parcequ'il y a $+q$ dans l'équation construite, la racine kg est la premiere racine fausse égale à NQ, $-z$; KG est la seconde racine fausse égale à NV, $-z$; & ces deux racines, comme M. DESCARTES le remarque, sont égales à la racine vraye cherchée FL, $+z = \sqrt{C.\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

De sorte que pour trouver la racine de l'équation $z^3 = * + pz + q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est moindre que $\frac{1}{27}p^3$, il ne faut que diviser un angle en trois parties égales. Cette même équation a toûjours trois racines, une vraye, deux fausses inégales, ces deux dernieres sont réelles *dans le cas irreductible, & dans l'autre imaginaires.*

Au reste il ne faut pas être surpris que l'on ait pris ici $NQ = -z$, & que pour la trisection de l'angle l'on ait fait, Sect. 2. Art. 3. n. 1. $NQ = +z$. C'est que dans le Problême de la trisection de l'angle l'on cherche la corde du tiers de l'arc NP, c'est-à-dire qu'on cherche la racine vraye de l'équation qu'on doit former ; au lieu qu'ici l'équation $z^3 = * pz + q$ est donnée, & qu'on ne peut la former, qu'en supposant $NQ = -z$; car si on la supposoit $+z$, l'on viendroit à $z^3 = * + 3pz - q$.

Il ne reste plus qu'à faire voir, que des racines réelles peuvent paroître sous une forme imaginaire dans la forme de Cardan. Cette équation $z^3 = * pz + q$, $z^3 = 90z + 100$, a pour sa racine vraye positive 10, puisque si l'on substituë 10 pour z, 1000 pour z^3, l'on fait $1000 = 900 + 100$. Cependant si l'on veut composer sa valeur dans la Forme de Cardan, l'on prendra $\frac{1}{2}q = 50$; $\frac{1}{4}qq = 2500$, $\frac{1}{3}p = 30$, $\frac{1}{27}p^3 = 27000$; $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{27}p^3 = -24500$; $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{-24500}$; & $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt{C.\,50 + \sqrt{-24500}} + \sqrt{C.\,50 - \sqrt{-24500}} = z$. Le terme $\sqrt{-24500}$ rend toute la forme imaginaire.

§. V. $z^3 = * + pz + q$, lorsque $\frac{1}{4}qq = \frac{11}{27}p^3$.

Sa racine $z = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, à cause que $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 0$, se reduit à $z = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q} = 2\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q} = \sqrt{C.\,4q}$, laquelle se construit comme §. 1. en trouvant deux moyennes proportionelles entre 1 & $\sqrt{C.\,4q}$.

Soit proposée l'équation $z^3 = * + pz + q$, ou $z^3 = * + 12z + 16$. Vous avez $\frac{1}{2}q = 8$; $\frac{1}{4}qq = 64$; $\frac{1}{3}p = 4$, $\frac{1}{27}p^3 = 64$; $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{64 - 64} = 0$, & $z = \sqrt{C.\,4q} = \sqrt{C.\,64} = 4$.

Divisez $z^3 - 12z - 16 = 0$ par $z - 4$, le quotient est $zz + 4z + 4 = 0$, dont les deux racines fausses réelles sont $z = -2$.

§. VI. $z^3 = * + pz - q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est moindre que $\frac{11}{27}p^3$.

Sa racine réelle negative est la même que la positive de la precedente $z^3 = * + pz + q$. C'est donc $-z = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, on le prouve de cette sorte. Soit $-z = x + \frac{p}{3x}$, nous aurons $-z^3 = x^3 + px + \frac{pp}{3x} + \frac{p^3}{27x^3}$, $z^3 = -x^3 - px - \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3}$; $+pz = -px - \frac{pp}{3x}$; & l'équation $z^3 = +px - q$ devient $-x^3 - px - \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3} = -px - \frac{pp}{3x} - q$; $x^3 + \frac{p^3}{27x^3} = q$, multiplions par x^3, il vient $x^6 + \frac{1}{27}p^3 = qx^3$; $x^6 - qx^3 = -\frac{1}{27}p^3$. Ajoûtons de chaque côté $\frac{1}{4}qq$, c'est $x^6 - qx^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, dont la racine quarrée est $x^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique est $x = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

A present substituons cette valeur de x dans $-z = x + \frac{p}{3x}$, nous ferons $-z = \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{p}{3\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$, qui ne demande qu'une extraction de racine cubique. Nous reduirons

cette expression à celle de Cardan, en multipliant le numerateur & le denominateur de $\frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}}$, &c. comme §. 3. & l'on trouve $-z=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$, qui, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est moindre que $\frac{1}{27}p^3$, comme on le suppose ici, paroît sous une forme imaginaire, quoiqu'elle soit réelle. La Geometrie ne peut pas, en suivant cette formule trouver la valeur de z, parcequ'elle ne peut pas trouver les deux moyennes proportionelles, ainsi qu'on l'a dit §. 4. M. DESCARTES se sert encore de la trisection de l'angle.

Fig. 248. 249. On fera donc Fig. 248. 249. cette construction. Décrivez Fig. 248. le cercle NVP, dont le rayon ON est $\sqrt{\frac{1}{3}p}$; dans ce cercle inscrivez $NP = \frac{3q}{p}$; ensuite operez comme Sect. 2. Art. 3. n. 1. excepté ce qui suit. Dans les triangles semblables NOQ, QNR, RQS, ON, $\sqrt{\frac{1}{3}p} : NQ$, $z : : NQ$, $z : QR$, $\frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} : : QR$, $\frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} : RS$, $\frac{z^4}{\frac{1}{3}pz} = \frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$. Et parcequ'il s'en faut seulement RS, $\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$, que la ligne NP, $\frac{3q}{p}$ ne soit égale aux trois cordes NQ, QT, TP égales chacune à z; si à NP, $\frac{3q}{p}$ l'on ajoûte $RS = \frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$, l'on fera cette égalité $\frac{3q}{p}+\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}=3z$, $\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}=3z-\frac{3q}{p}$; multipliez tout par $\frac{1}{3}p$, & vous aurez $z^3 = * + pz - q$ équation proposée.

A present suivant les Regles de Sect. 1. Art. 1. l'on décrit Fig. 249. la parabole FAG, & le cercle FAG, & l'on tire les appliquées FL, GK, gk.

Ainsi Sect. 1. Art. 1. Regle 6. parcequ'il y a $-q$ dans la proposée l'appliquée kg est la premiere racine vraye égale à NQ, $+z$; KG la seconde vraye égale à NV, $+z$; & ces deux racines ajoûtées ensemble composent la troisiéme FL, qui est fausse $-z=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

De sorte que pour trouver la racine de l'équation $z^3 = * + pz - q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est moindre que $\frac{1}{27}p^3$, il ne faut que diviser un angle en trois parties égales. Cette équation a trois racines, une fausse, deux vrayes inégales, la fausse est égale à la vraye, & les deux vrayes aux deux fausses de §. 4. dans le cas irreductible.

§. VII. $z^3 = * + pz - q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est plus grand que $\frac{1}{27}p^3$.

Sa racine réelle negative est $-z=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$. Pour laquelle, suivant ce qui a été dit §. 1. il ne faut que trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & la quan-

tité connuë $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$, & deux autres entre l'unité & la quantité connuë $\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$. Ces deux quantitez se trouvent Sect. 1. Art. 1. Exemple 1. on les ajoûte, & la somme est la valeur cherchée de $-z$.

Cette équation a dans le cas present une racine fausse égale à la vraye de §. 3. deux vrayes imaginaires.

M. DESCARTES dit, que lorsque $\frac{1}{4}qq$ est plus grand que $\frac{1}{27}p^3$ dans l'équation $z^3 = * + pz - q$; NP sera Fig. 248. plus grande que le diametre du cercle NVP; cependant soit proposée $z^3 = * 12z - 20$, ou $z^3 = * pz - q$. L'on a $p = 12$, $\frac{1}{3}p = 4$, $\sqrt{\frac{1}{3}p} = \sqrt{4} = 2$; le diametre égal à $2NO = 2\sqrt{\frac{1}{3}p} = 4$. $q = 20$, $\frac{1}{2}q = 10$, NP, $\frac{3p}{q} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$. Ainsi NP, $\frac{9}{5}$ n'est pas plus grande que $2NO$, 4; quoique $\frac{1}{4}qq$, 100 soit plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, 64.

Il faut ajoûter le cas où $\frac{1}{4}qq = \frac{1}{27}p^3$, & où les deux racines vrayes sont égales entr'elles & la negative égale aux deux réelles, prises ensemble.

§. VIII. $z^3 = * - pz - q$.

Sa racine réelle & negative est $-z = \sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$. Je le prouve ainsi. Soit $-z = x - \frac{p}{3x}$, l'équation proposée se reduira à $x^3 - q = \frac{p^3}{27x^3}$; d'où ayant multiplié par x^3, vous formerez la racine quarrée $x^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$; $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique est $x = \sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Je substituë cette valeur de x dans $-z = x - \frac{p}{3x}$, il se fait $-z = \sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$, qui se reduit à l'expression de Cardan $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, comme on a fait §. 2.

Cette racine fausse est la même que celle de $z^3 = * - pz + q$ §. 2. Les deux autres sont imaginaires. Il ne faut encore trouver ici que deux moyennes proportionelles entre l'unité & quelques quantitez connuës.

§. IX. *Expression des racines des Equations quarré-quarrées.*

Parceque M. DESCARTES a donné Sect. 1. Art. 2. des Regles generales pour construire toutes les équations solides du quatriéme degré, sans reduire leurs racines à une expression Algebrique, je me contenterai d'en donner ici un Exemple. Ce que je fais principalement pour montrer, com-

me M. DESCARTES l'assure, que les équations, qui montent au quarré de quarré se reduisent au quarré par le moyen de quelques autres qui ne montent que jusques au cube; & qu'ainsi tous les Problêmes solides se reduisent à une des formules, qui expriment les équations cubiques.

Soit proposée l'équation $z^4 * + 3zz + 2z - 12 = 0$, ou $z^4 * + pzz + qz - r = 0$.

1°. Si elle avoit un second terme, on le feroit évanoüir, Part. 2. Sect. 2. Art. 3.

2°. Part. 2. Sect. 4. on la transforme en celle-ci, qui est cubique

$$y^6 + 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ + 4ryy \end{matrix} - qq = 0$$

3°. Part. 2. Sect. 3. L'on cherche la valeur de y; si on la trouve, le Problême est plan.

4°. Alors Part. 2. Sect. 4. l'on substituë la valeur de y & de yy dans ces deux équations du second degré $zz - yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$. L'on extrait les racines de chacune de ces équations, & l'on a les quatre racines cherchées de z. Ainsi les équations du quatriéme degré, lorsque le Problême est plan, se reduisent à une du second, par le moyen d'une autre qui est cubique. Mais quand le Problême est solide, cela arrive encore de cette maniere.

5°. Si l'on ne peut trouver la valeur de y dans l'équation cubique

$$y^6 \begin{matrix} + 2py^4 + ppyy \\ + 4ryy \end{matrix} - qq = 0,$$ le Problême est solide Part. 2. Sect. 4.

Il faut en faire évanoüir le second terme, en prenant $yy + \frac{2}{3}p = x$, $x - \frac{2}{3}p = yy$, afin de reduire cette équation cubique à une des formules cubiques dont on a donné la construction, Sect. 1. Art. 1. La reduite est

$$x^3 * \begin{matrix} - \frac{1}{3}ppx & - \frac{2}{27}p^3 \\ + 4rx & - \frac{8}{3}pr \\ & - qq \end{matrix} = 0,$$ ou $x^3 * + 45x - 294 = 0$, nommons 45, a; 294, b; l'on aura $x^3 * + ax - b = 0$, $x^3 * - ax + b$, qui a été construite Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. & qui a Sect. 3. §. 2. une racine réelle positive $x = \sqrt{C.\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, que je nomme c pour la facilité du calcul.

6°. Substituons c pour x dans $yy = x - \frac{2}{3}p$, nous aurons $yy = c + \frac{2}{3}p$; $y = \sqrt{c - \frac{2}{3}p}$, que je nomme d, & yy sera dd.

7°. Substituons cette valeur d pour y, & dd pour yy dans les deux équations quarrées de n. 4. qui sont $zz - yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = o$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = o$: elles se changeront en celles-ci, $zz - dz + \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2d} = o$, $zz + dz + \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2d} = o$.

8°. Pour trouver les racines de la premiere équation, l'on ordonnera ainsi les termes $zz - dz = -\frac{1}{2}dd - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2d}$, les deux racines imaginaires sont $z = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{-\frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2d}}$.

9°. Pour avoir les racines de la seconde équation, qui est $zz + dz = -\frac{1}{2}dd - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2d}$, l'on rangera ainsi les termes $zz + dz = \frac{q}{2d} - \frac{1}{2}dd - \frac{1}{2}p$; les deux racines sont $z = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{q}{2d} - \frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}p}$.

10. Remettons la valeur de d dans la valeur positive de $z = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{q}{2d} - \frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}p}$, il viendra $z = -\frac{1}{2}\sqrt{c - \frac{2}{3}p} + \sqrt{\frac{q}{2\sqrt{c - \frac{2}{3}p}} - \frac{1}{4}c - \frac{1}{3}p}$.

11. Pour c mettons encore sa valeur, ce sera $z = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{C.}\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \sqrt{C.} - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \frac{2}{3}p} + \sqrt{\frac{q}{2\sqrt{\sqrt{C.}\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \sqrt{C.} - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \frac{2}{3}p}} - \frac{1}{4}\sqrt{C.}\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \sqrt{C.} - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \frac{1}{3}p}$.

SECTION IV.

Exemples de Problêmes solides.

ARTICLE I.

Inscrire un Eptagone & un Enneagone dans le cercle.

EXEMPLE I. *Inscrire un Eptagone dans le Cercle.*

1. SUpposons Fig. 259. que l'Eptagone $ABCDELM$ est inscrit dans le cercle donné ADL. D'un des angles A l'on tirera le diametre AKF, le point F est le milieu de l'arc DE. Du point F l'on tirera les cordes FB, FC, FD, FE; & l'on joindra le rayon KB. Fig. 259.

2. Prolongez FC en G jusqu'à ce qu'elle rencontre $BG = BF$. Les triangles BKF, GBF sont isosceles & équiangles, par 21. 3. Eucl. donc les quatre angles KBF, KFB; BFG, BGF sont égaux. Les triangles GBC, ABF sont encore égaux.

3. Prolongez FD en H jusqu'à ce qu'elle rencontre $CH = CF$. 1°. Le

triangle HCF eſt iſoſcele, comme n. 2. le triangle GBF. 2°. Ces deux triangles ſont équiangles; donc les quatre angles CFH, CHF; BFG, BGF ſont égaux. De plus les triangles BCF, CDH ſont égaux.

4. Prolongez enfin EF en I juſqu'à ce qu'elle rencontre $DI = DF$. Le triangle FDI eſt iſoſcele, comme n. 3. Le triangle HCF, & ces deux triangles ſont équiangles. Les triangles CDF, EDI ſont égaux.

5. Nommons à preſent les connuës AF, $2a = CG$. n. 2. KF, a; les inconnuës BF, $x = DH$; CF, $y = EI$; DF, $z = FE$.

6. Dans les triangles BKF, GBF ſemblables n. 2. vous avez cette Analogie $KF, a : FB, x :: BF, x : FG, \frac{xx}{a}$. Et CF, $y = FG - CG$, $\frac{xx}{a} - 2a = EI$, n. 4.

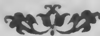
Dans les triangles GBF, HCF ſemblables n. 3. vous avez $BF, x : FG, \frac{xx}{a} :: CF, y : FH, \frac{xy}{a}$; & mettant pour y ſa valeur, $FH = \frac{x^3}{aa} - 2x$ Et FD, $z = FH - DH, = \frac{x^3}{aa} - 3x$.

Dans les triangles HCF, IDF, ſemblables n. 4. vous avez $CF, y : FH, \frac{xy}{a} :: DF, z : FI, \frac{xz}{a}$; & mettant pour z ſa valeur, $FI = \frac{x^4}{a^3} - \frac{3xx}{a}$; & EF, $z = EI - IF$, $\frac{xx}{a} - 2a - \frac{x^4}{a^3} + \frac{3xx}{a}$.

7. L'on a donc deux valeurs de z; FD, $\frac{x^3}{aa} - 3x = EF$, $\frac{4xx}{a} - 2a - \frac{x^4}{a^3}$. Multipliez tout par a^3, il vient $x^4 + ax^3 - 4aaxx - 3a^3x + 2a^4 = 0$, qui peut ſe diviſer juſte par $x + 2a = 0$, le quotient eſt $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$. Or $x = -2a$ n'eſt pas la valeur cherchée de la corde FB, x, puiſque $FA = 2a$ eſt plus grande que FB: la racine cherchée eſt donc dans l'équation $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$, qui ne peut être diviſée ſans reſte par aucun binome tel qu'on le demande Part. 3. Sect. 3. ainſi le Problême eſt ſolide.

8. Pour en faire évanoüir le ſecond terme, prenez $x - \frac{1}{3}a = v$, $v + \frac{1}{3}a = x$, & la ſubſtitution donnera $v^3 * - \frac{7}{3}aav + \frac{7}{27}a^3 = 0$, $v^3 = * + \frac{7}{3}aav - \frac{7}{27}a^3$, $z^3 = * + pz - q$, en faiſant $\frac{7}{3}aa = p$, $\frac{7}{27}a^3 = q$. Parceque $\frac{1}{4}qq = \frac{49}{2916}$ eſt plus petit que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{343}{729}$, ce Problême appartient à la triſection de l'angle Sect. 3. §. 6. En effet Fig. 248. le diametre $2NO = 2\sqrt{\frac{1}{3}p} = 2\sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{28}{9}}$ eſt plus grand que l'inſcrite $NP = \frac{3q}{p} = \frac{1}{3}$.

9. L'on conſtruira l'équation $v^3 = * + \frac{7}{3}aav - \frac{7}{27}a^3$, comme Ex. 3. Art. 1. Sect. 1. Fig. 236. Et ſi à GK la plus grande des valeurs vrayes de v, vous ajoûtez $\frac{1}{3}a$, vous aurez $v + \frac{1}{3}a = x = FB$, Fig. 259. Inſcrivez FB dans le cercle AFL, il reſtera l'arc BA, dont la corde AB eſt le côté cherché d'un Eptagone regulier inſcrit dans le cercle AFL.



EXEMPLE

EXEMPLE II. *Inſcrire un Enneagone dans un cercle.*

D'Abord 2.4. Eucl. vous inſcrirez un triangle équilateral *ABC*, Fig. 260. dans le cercle donné. Enſuite vous diviſerez l'arc *ADB* en trois parties égales, Sect. 2. Art. 3. La corde trouvée *BD* du tiers de cet arc eſt le côté cherché de l'Enneagone regulier, qui peut s'inſcrire dans le cercle donné. Fig. 260.

ARTICLE II.

Exemple du Problême de Pappus propoſé en 6. 7. 8. lignes.

§. I.

SOient données Fig. 261. les ſix lignes paralleles *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, *Gg*. Fig. 261.

Il faut trouver le point *C*, d'où tirant ſur les données les perpendiculaires *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *CF*, *CG*; le ſolide $CA \times CB \times CD$ ſoit égal au ſolide $CE \times CF \times CG$.

Je ſuppoſe la choſe faite, & les diſtances *AB*, $a = BD = DE$; *EF*, $2a$; *FG*, $4a$; & l'inconnuë *CB*, y; l'on aura donc $CA = CB + BA$, $y + a$; $CD = CB - BD$, $y - a$; $CE = CB - BE$, $y - 2a$; $CF = BF - CB$, $4a - y$; $CG = BG - CB$, $8a - y$.

Par la ſuppoſition $CA \times CB \times CD$, $y^3 - aay = CE \times CF \times CG$, $56aay - 64a^3 - 14ayy + y^3$; $yy - \frac{57}{14}ay = -\frac{32}{7}aa$; $yy - \frac{57}{14}ay + \frac{3249}{784}aa = \frac{3249}{784}aa - \frac{32}{7}aa = -\frac{335}{784}aa$; d'où l'on tire $y = \frac{57}{28}a \pm \sqrt{-\frac{335}{784}aa}$, Problême impoſſible.

Mais ſi l'on demande $CA \times CB \times CE = CD \times CF \times CG$, l'on aura $12ayy - 46aay = -32aa^3$; dont les racines ſont $y = \frac{23}{12}a \pm \sqrt{\frac{145}{144}a^2}$. *CB* eſt la racine vraye, le lieu eſt à la ligne droite. Car ſi par le point *C* l'on mene la ligne *Cc* parallele à *Bb*, & que de chaque point *c* l'on tire des perpendiculaires ſur les données; elles ſeront égales aux premieres, $CB = cb$, $CA = ca$, &c. ainſi on aura la même équation; & *CB* eſt la racine vraye.

La racine fauſſe ſe prendra de l'autre côté de *B*, hors des paralleles, elle donnera encore un lieu à la ligne droite.

Que ſi l'on mettoit le point cherché en *K* entre les paralleles *Dd*, *Ee*; l'on auroit *KB*, y; *KA*, $y + a$; *KD*, $y - a$; *KE*, $2a - y$; *KF*, $4a - y$; *KG*, $8a - y$. Et ſi l'on demandoit $KA \times KB \times KD = KE \times KF \times KG$, l'équation ſeroit $y^3 - 7ayy + \frac{55}{2}aay - 32a^3 = 0$.

Vous ferez diſparoître la fraction en prenant $y = \frac{z}{2}$, & vous aurez $z^3 - 14azz + 110aaz - 256a^3 = 0$, qui ne peut être diviſée par

aucun binome, ainsi Sect. 3. le Problême est solide, & vous ôtez le second terme en faisant $z - \frac{14}{3}a = x$, $x + \frac{14}{3}a = z$.

La transformée est $x^3 * + \frac{134}{3}aax + \frac{1460}{27}a^3 = 0$. Et faisant $\frac{134}{3} = p$, $\frac{1460}{27} = q$, $x^3 = * - apx - aaq$.

On cherchera la valeur réelle negative de x, comme Sect. 1. Art. 1. Exemple 6. & comme l'on a $z = x + \frac{14}{3}a$, l'on aura $-z = -x - \frac{14}{3}a$. C'est pourquoi si de la valeur trouvée de $-x$ vous retranchez $\frac{14}{3}a$, il restera la valeur de $-z$, qui étant divisée par 2, donnera la valeur de $-y = \frac{-z}{2}$.

Le point K n'a donc pas été bien pris, mais il faudra sur AB prolongée, prendre la valeur de $-y$ de l'autre côté de B, que n'est le point K, & par l'extrêmité de cette valeur l'on menera une paralelle à Bb, cette paralele sera le lieu cherché.

§. II.

Fig. 262. Soient données de position Fig. 262. les six lignes KE, HL, IA, BI, DA, FE, paralleles trois à trois, à égale distance, & perpendiculaires les unes sur les autres. Elles feront quatre quarrez. Il faut trouver un point C, d'où si l'on mene des perpendiculaires sur les données, l'on ait $CD \times CM \times CF = CB \times CH \times CK$.

Nommons chaque distance d'une parallele à l'autre, a; les inconnuës CB, y; CM, x; nous aurons $CD = y + a$; $CF = y + 2a$; par la même raison $CH = x + a$; CK, $x + 2a$.

L'équation sera $xyy - xxy - 2aay + 2aax = 0$, qui étant divisée par $y - x = 0$, donne pour quotient $xy - 2aa = 0$; l'on a donc deux valeurs de y, $y = x$, $y = \frac{2aa}{x}$. En effet soit que l'on substituë x, soit que l'on substituë $\frac{2aa}{x}$ à la place de y dans $xyy - xxy - 2aay + 2aax = 0$, les termes se détruisent, $x^3 - x^3 - 2aax + 2aax = 0$, $\frac{4a^4x}{xx} - \frac{2aaxx}{x} - \frac{4a^4}{x} + 2aax = 0$.

On construira le lieu $x = y$ en tirant la diagonale IE, dont tous les points C donneront CB, $y = CM$, x, car $CBIM$ sera toûjours un quarré.

Fig. 263. On construira encore le lieu $xy = 2aa$ à l'hyperbole entre ses asymptotes, Fig. 263. si l'on prend $IN = 2a$, $NP = a$ parallele à BI; & si entre les asymptotes IM, IB, & par le point P l'on décrit l'hyperbole PC. Car par la nature des asymptotes, l'on aura par tout $IN \times NP = IM \times MC$, $2aa = xy$.

Mais Fig. 262. supposons le point c au dessus de K, & nommons cM, x; cH, $x - a$; cK, $x - 2a$, &c. & que l'on demande $cM \times cH \times cK = cb \times cd \times cf$; l'équation sera $x^3 - 3axx + 2aax = y^3 + 3ayy + 2aay$, Problême solide.

Pour trouver la Figure dont cette équation exprime la nature, je fais

évanoüir le ſecond terme de $x^3 - 3axx + 2aax - y^3 - 3ayy - 2aay = 0$, en prenant $x - a = z$, $z + a = x$, $-z - a = -x$. La transformée ſera $z^3 * - aaz - y^3 - 3ayy - 2aay = 0$.

Les lignes Ib, IM ſe coupent à angles droits Fig. 264. le point I eſt le commencement des x & des y; les $+x$ vont vers b, les $-x$ de l'autre côté; les $+y$ du côté de M, les $-y$ de l'autre côté. Fig. 264.

Pour trouver le point c, qui répond à $IM = y$; je ſubſtituë a pour y dans $z^3 = aaz + y^3 + 3ayy + 2aay$, & c'eſt $z^3 = aaz + 6a^3$. Je cherche la valeur de z comme Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. Après l'avoir trouvé, je lui ajoûte la longueur de a, afin d'avoir $z + a = x$. J'éleve la perpendiculaire $Mc = x$, & j'ai le point c cherché. Mais parceque l'équation $-x^3 + 3axx - 2aax = -y^3 - 3ayy - 2aay$ eſt la même que $x^3 - 3axx + 2aax = y^3 + 3ayy + 2aay$; je me ſers encore de la valeur de z, ou de $-z$, dont je retranche a, pour avoir $-z - a = -x$; & je fais $MC = -x$, & le point C eſt à la courbe cherchée. Je décris de la même maniere les deux portions Ac, IC, qui répondent aux $+y$.

Pour trouver les points des deux portions AEG, INP, qui répondent aux $-y$, je ſubſtituë differentes valeurs de a pour $-y$ dans $z^3 = aaz + y^3 + 3ayy + 2aay$, par exemple en ſubſtituant $\frac{1}{2}a = -y$, je fais $z^3 = aaz - \frac{3}{8}a^3$.

Quand on fait $x = 0$, l'équation ſe reduit à $y^3 + 3ayy + 2aay = 0$; & les racines ſont $y = 0$, $y + a = 0$, $y + 2a = 0$, c'eſt-à-dire que ſur la ligne IN, où les x ſont nuls, y eſt nul auſſi aux points I, où $y = 0$; R, où $-y = a$; N, où $-y = 2a$.

Si maintenant l'on fait $y = 0$, l'équation ſera $x^3 - 3axx + 2aax = 0$, dont les racines ſont $x = 0$, $x - a = 0$, $x - 2a = 0$, ainſi ſur la ligne IA, où les y ſont nuls, les x ſont auſſi nuls aux points I, où $x = 0$; S, où $x = a$; A, où $x = 2a$.

§. III.

Soient données de poſition les ſept paralleles Ee, Dd, Aa, Bb, Ff, Gg, Nn, dont la diſtance eſt égale, & que je nomme a. Il faut trouver le point C tel $CA \times CE \times CF \times CN = CB \times CD \times CG \times 4a$. Fig. 265.

Soit CB, y; l'on aura $CA = y + a$; cD, $y + 2a$; CE, $y + 3a$; CF, $y - a$; CG, $2a - y$; CN, $3a - y$. Et l'équation ſera $y^4 - 4ay^3 - 10aayy + 16a^3y + 9a^4 = 0$, qui ne peut ſe diviſer par aucun binome Part 3. Sect. 4. L'on en fait évanoüir le ſecond terme, en prenant $y - a = z$, $z + a = y$. La reduite eſt $z^4 * - 16aazz - 12a^3z + 12a^4 = 0$, ou en faiſant $16a = p$, $12a = q = r$, $z^4 * - apzz - aaqz + a^3r = 0$.

Après avoir reconnu que ce Problême n'est pas plan, on doit construire la reduite $z^4 * - 16aazz - 12a^3z + 12a^4 = 0$, suivant Sect. 1. Art. 2.

On trouvera deux valeurs vrayes de z, qui sont les lignes n, m; on leur ajoûtera la longueur a, pour composer $z + a = x$; de ces deux x, l'un sera BC, & l'autre BK, & les paralleles C, c, Kk satisfont à la question. L'on trouve deux valeurs fausses de z, qui sont les lignes p, q, dont on ôtera la valeur de a, pour avoir $-z - a = -x$; de ces deux $-x$, l'un est Br, l'autre Bs, & si par les points r, s l'on mene des paralleles à Cc, l'on aura encore deux lieux. Et ces quatre lieux donnent la même équation $y^4 - 4ay^3 - 10a^2y^2 + 16a^3y + 9a^4 = 0$.

§. IV.

FIG. 266. Soient données les six lignes paralleles Fig. 266. SF, EH, AD, BI, GP, RN, & une septiéme SR, qui les coupe à angles droits. Etant les distances RP, PI, IA, AH chacune égales à b, $HS = 2b$, l'on demande un point C, d'où ayant tiré sur les données les perpendiculaires CB, CD, CF, CE, CG, CN, l'on ait $CB \times CE \times CF \times CN = CD \times CG \times CM \times 4b$.

Nommons CM, x; CB, y; CD, $b - y$; CE, $2b - y$; CF, $4b - y$; CG, $b + y$; CN, $2b + y$. L'équation est $y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 4bxyy + 16b^3y - 4b^3x = 0$, qui ne peut se diviser par aucun binome.

Comme une des inconnuës x n'est que d'une dimension, le Problême est plan, & pour le construire l'on range ainsi les termes $4b^3x - 4bxyy = y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 16b^3y$; $x = \frac{y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 16b^3y}{4b^3 - 4byy}$.

Le point I est le commencement des x & des y; les $+x$ vont du côté de B, les $-x$ de l'autre côté; les $+y$ vont du côté de S, les $-y$ de l'autre côté.

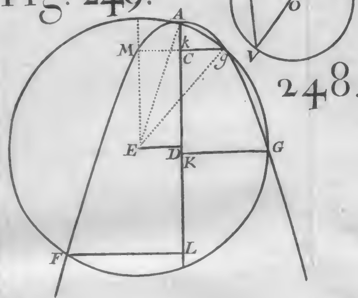
Soit $y = 0$; l'on a $x = \frac{0}{4b^3}$. Ainsi une des courbes passe au point I, ou $x = 0$, $y = 0$.

Soit $x = 0$; l'on a $y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 16b^3y = 0$, dont les racines sont $y = 0$, $y = 2b$, $y = -2b$, $y = 4b$. Ainsi les courbes passent aux points I, H, R, S.

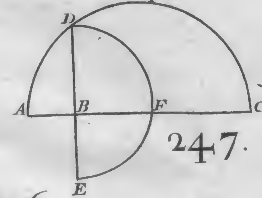
Soit $y = b$; c'est $x = \frac{9b^4}{0}$. La parallele AD, parceque $AI = b = y$, est une asymptote des courbes.

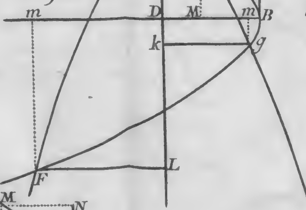
Soit $-y = b$; c'est $x = -\frac{15b^4}{0}$. La parallele GP est donc une autre asymptote.

Soit $y = \frac{1}{4}b$; l'on a $x = \frac{189}{192}b = \frac{63}{64}b$. Soit $y = \frac{1}{2}b$, l'on a $x = \frac{105}{48}b$. Ainsi la courbe, qui passe au point I, monte au dessus de SR entre les paralleles AD., IB.

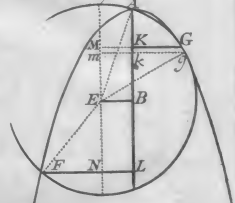


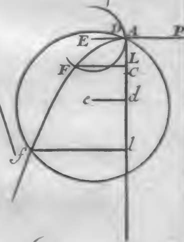


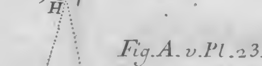


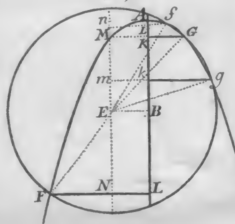


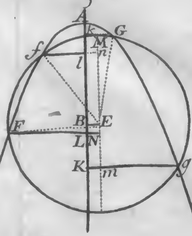


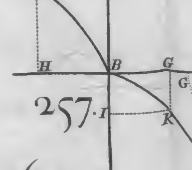


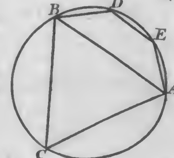


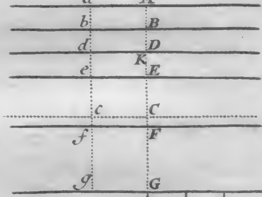




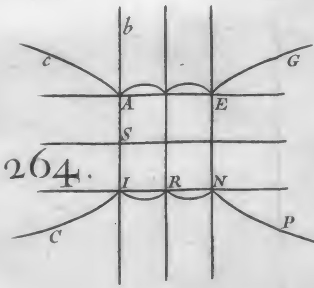


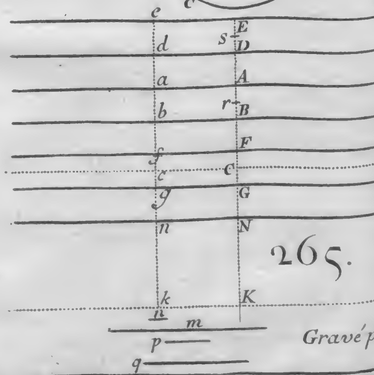


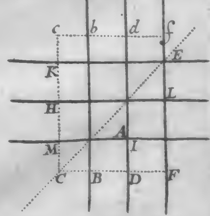












Gravé par Daudet

Si l'on fait $-y = \frac{1}{2}b$; l'on trouvera que la même courbe deſcend au deſſous de SR entre les paralleles IB, PG.

Si l'on fait $y = \frac{3}{2}b$; on verra que la courbe qui paſſe au point H, s'étend ſous RS entre les paralleles AD, HE.

Si l'on fait $y = 3b$; la même courbe s'élevera au deſſus de SR entre les paralleles HE, SF.

Si l'on fait $y = 5b$; la même courbe deſcendra ſous SR au delà de SF.

Soit $-y = \frac{3}{2}b$; la courbe qui paſſe par R s'élevera au deſſus de SR entre les paralleles PG, RN.

Soit $-y = \frac{5}{2}b$; la même courbe s'étendra au deſſous de SR au delà de la parallele RN.

§. V.

Huit lignes paralleles ſont données de poſition, Fig. 267. chacune de leurs diſtances eſt a. L'on demande $CA \times CF \times CE \times CN = CB \times CD \times CG \times CH$. Fig. 267.

L'on a CB, y; CA, $y+a$; CD, $y+2a$; CE, $y+3a$; CH, $y+4a$; CF, $a-y$; CG, $2a-y$; CN, $3a-y$. L'équation eſt $4ay^3 + 6aayy - 16a^3y - 9a^4 = 0$; $y^3 + \frac{3}{2}ayy - 4aay - \frac{9}{4}a^3 = 0$; qui ſe diviſe juſte par $y + \frac{1}{2}a = 0$; ainſi une racine eſt $y = -\frac{1}{2}a$; le quotient eſt $yy + ay - \frac{9}{2}aa = 0$, dont les racines ſont $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{19}{4}aa}$. La premiere racine negative $y = -\frac{1}{2}a$ donne le point C au milieu de BF; la ſeconde poſitive $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{19}{4}aa}$ donne le point c entre G & F; la troiſiéme negative $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{19}{4}aa}$ donne le point K entre E & D.

SECTION V.

Pourquoi les Problêmes ſolides ne peuvent être conſtruits ſans les Sections coniques; ni ceux qui ſont plus compoſez ſans quelques autres lignes plus compoſées.

M. DESCARTES.

IL eſt vrai que je n'ai pas encore dit ſur quelles raiſons je me fonde, pour oſer ainſi aſſurer, ſi une choſe eſt poſſible, ou ne l'eſt pas. Mais ſi on prend garde comment par la Methode dont je me ſers, tout ce qui tombe ſous la conſideration des Geometres,

se reduit à un même genre de Problêmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque équation; on jugera bien, qu'il n'est pas mal-aisé de faire un dénombrement de toutes les voyes par lesquelles on les peut trouver, qui soit suffisant pour démontrer qu'on a choisi la plus generale & la plus simple.

Et particulierement pour ce qui est des Problêmes solides, que j'ai dit ne pouvoir être construits, sans qu'on y employe quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assez trouver, de ce qu'ils se reduisent tous à deux constructions, en l'une desquelles il faut avoir tout ensemble les deux points, qui déterminent deux moyennes proportionelles entre deux lignes données; & en l'autre les deux points, qui divisent en trois parties égales un arc donné. Car d'autant que la courbure du cercle ne dépend que du simple rapport de toutes ses parties au point qui en est le centre; on ne peut aussi s'en servir qu'à déterminer un seul point entre deux extrêmes, comme à trouver une moyenne proportionelle entre deux lignes droites données, ou diviser en deux un arc donné. Au lieu que la courbure des Sections coniques, dépendant toûjours de deux diverses choses, peut aussi servir à déterminer deux points differens.

Mais pour cette même raison il est impossible, qu'aucuns des Problêmes qui sont d'un degré plus composez que les solides, & qui presupposent l'invention de quatre moyennes proportionelles, ou la division de l'angle en cinq parties égales, puissent être construits par aucune des Sections coniques.

1. Il est certain, que pour juger, si on a choisi la meilleure maniere, il faut suivant la Regle quatriéme de la Methode de M. DESCARTES, faire un dénombrement si entier, & des revûës si generales, que l'on soit assuré de ne rien omettre; il faut les examiner separément, & les comparer ensemble avant que de rien choisir.

2. Les deux choses dont dépend la courbure de l'ellipse & de l'hyperbole, peuvent être les deux foyers. Dans la parabole on considere aussi deux foyers, l'un au dedans de la parabole, l'autre au dehors à une distance infinie sur l'axe au dessus du sommet.

3. M. DESCARTES veut, comme on le conclud de ce qu'il dit ici, & de ce qu'il dira Part. 5. Sect. 5. que pour construire un Problême plan

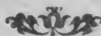
l'on se serve du cercle & de la ligne droite ; pour construire un Problême solide, c'est-à-dire de trois ou quatre dimensions, l'on se serve du cercle & d'une des Sections coniques, c'est à dire avec une courbe du premier genre ; pour construire un Problême de cinq ou six dimensions, l'on se serve du cercle & d'une ligne du second genre, qui est d'un degré plus composée que les Sections coniques ; pour construire un Problême de sept ou huit dimensions, l'on se serve du cercle & d'une ligne du troisiéme degré ; & ainsi de suite, de sorte qu'à mesure que les Problêmes sont plus élevez, il faut se servir d'une courbe d'un genre plus composé avec le cercle pour chaque deux dimensions. C'est la Methode que M. DESCARTES a jugé la plus generale & la plus simple.

Cependant tous ne sont pas de son sentiment. *Je fais voir*, dit un sçavant Geometre, *combien* M. DESCARTES *s'est trompé, lorsqu'il prescrit les lignes les plus simples, qui sont necessaires pour la construction des équations, de quelles dimensions qu'elles puissent être, faute d'avoir assez examiné ce qu'il a avancé ; car on ne peut se persuader, qu'un homme aussi éclairé qu'il l'étoit dans la Geometrie, ait fait une telle faute, que pour n'avoir pas assez consideré les cas dont il parle. Et comme je faisois voir à M. Hugens de Zulichem les raisons que j'avois de reprendre ainsi M. Descartes, il m'a communiqué un Manuscrit de M. de Fermat, d'une maniere de construction des équations, dans lequel il le reprend aussi sur le même sujet.* Voyez Liv. 3. Part. 1. Sect. 2.

M. de la Hire. La construction des équations analytiques. Preface.

4. * La raison que M. DESCARTES donne de la distribution des genres des lieux, n'a aucun fondement, comme l'a fort bien remarqué M. de Fermat dans la Dissertation qu'il a faite de la solution des Problêmes de Geometrie, & où il le reprend non seulement sur ce sujet, mais aussi sur la construction des équations, ou des Problêmes.

** Conclusion de ce Traité.*





PARTIE CINQUIE'ME.

SECTION I.

Façon generale pour construire tous les Problêmes reduits à une équation, qui n'a point plus de six dimensions.

M. DESCARTES.

C'Est pourquoi je croirai faire en ceci tout le mieux qui se puisse, si je donne une Regle generale pour les construire, en y employant la ligne courbe qui se décrit par l'intersection d'une parabole & d'une ligne droite, en la façon * ci-dessus expliquée. Car j'ose assurer, qu'il n'y en a point de plus simple en la nature, qui puisse servir à ce même effet ; & vous avez vû comme elle suit immediatement les Sections coniques en cette question tant cherchée par les Anciens, dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes, qui doivent être reçûës en Geometrie.

* Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. § 2. n. 6. & Part. 2. Sect. 3.

Vous savez déja comment, lorsqu'on cherche les quantitez, qui sont requises pour la construction de ces Problêmes, on les peut toûjours reduire à quelque équation, qui ne monte que jusques au quarré de cube, ou au sursolide.

Si une équation, qui ne doit être que du cinquiéme ou du sixiéme degré, avoit une de ses inconnuës, ou toutes les deux élevées à un plus haut degré, on la pourroit déprimer par la division faite avec un ou plusieurs binomes composez d'une des inconnuës + ou — un des diviseurs exacts du dernier terme ; car si aucune division ne pouvoit se faire sans reste, l'équation ne seroit pas de sa nature du cinquiéme ou du sixiéme degré. Voyez quelque chose de semblable touchant les équations cubiques & quarré-quarrées, Sect. 3. 4. Part. 3.

Puis vous sçavez aussi comment, en augmentant la valeur des racines de cette équation, on peut toûjours faire qu'elles soient toutes

tes vrayes, & avec cela que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande que le quarré de la moitié de celle du second, Part. 2 Sect. 2. Art. 4.

Et enfin comment, si elle ne monte que jusques au sursolide, on la peut hausser jusques au quarré de cube, & faire que la place d'aucun de ses termes ne manque d'être remplie, Part. 2. Sect. 2. Article 5.

Or afin que toutes les difficultez, dont il est question, puissent être resoluës par une même Regle, je desire qu'on fasse toutes ces choses, & par ce moyen qu'on les reduise toûjours à une équation de telle forme, $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$, en laquelle la quantité nommée q soit plus grande que le quarré de la moitié de celle, qui est nommée p.

Lorsque l'équation, que donne la resolution du Problême a cette forme, avec la condition que M. DESCARTES demande, il n'y a aucun changement à y faire. Mais lorsqu'elle est du sixiéme degré, & qu'elle manque de quelque terme, ou que deux signes + ou — se suivent, ou que la quantité du troisiéme terme n'est pas plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du second; on lui donne ce dont elle manque. Que si l'équation étoit du cinquiéme degré, on l'éleveroit d'abord au sixiéme, en la multipliant par son inconnuë, ensuite on lui donneroit les proprietez necessaires qui lui manqueroient.

Venons à present à la double description de la courbe du second genre, dont on a besoin dans ces sortes de Problêmes. Ces deux descriptions sont aisées à comprendre.

Puis ayant fait Fig. 268. la ligne *BK* indefiniment longue des deux côtez, & du point *B* ayant tiré la perpendiculaire *AB*, dont la longueur soit $\frac{1}{2}p$; il faut dans un plan separé décrire une parabole, comme *CDF*, dont le côté droit principal soit $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, que je nommerai n pour abreger. FIG. 268.

Après cela il faut poser le plan dans lequel est cette parabole, sur celui où sont les lignes *AB* & *BK*, en sorte que son aissieu *DE* se rencontre justement au dessus de la ligne droite *BK*. Et ayant pris la partie de cet aissieu, qui est entre les points *E* & *D*, égale à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, il faut appliquer sur ce point *E* une longue Regle, en telle

ſorte qu'étant auſſi appliquée ſur le point A du plan de deſſous, elle demeure toûjours jointe à ces deux points ; pendant qu'on hauſſera ou baiſſera la parabole tout le long de la ligne BK, ſur laquelle ſon aiſſieu eſt appliqué. Au moyen dequoi l'interſection de cette parabole & de cette Regle, qui ſe fera au point C, décrira la ligne courbe ACN, qui eſt celle dont nous avons beſoin de nous ſervir pour la conſtruction du Problême propoſé.

Car après qu'elle eſt ainſi décrite, ſi on prend le point L en la ligne BK du côté vers lequel eſt tourné le ſommet de la parabole, & qu'on faſſe BL égale à DE, c'eſt-à-dire $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Puis du point L, vers B, qu'on prenne en la même ligne BK, la ligne LH égale à $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & que du point H ainſi trouvé, on tire à angles droits, du côté qu'eſt la courbe ACN, la ligne HI, dont la longueur ſoit $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, qui pour abreger ſera nommée $\frac{m}{nn}$. Et après, ayant joint les points L & I, qu'on décrive le cercle LPI, dont IL ſoit le diametre ; & qu'on inſcrive en ce cercle la ligne LP, dont la longueur ſoit $\sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}}$. Puis enfin du centre I, par le point P ainſi trouvé, qu'on décrive le cercle PCN. Ce cercle coupera ou touchera la ligne courbe ACN, en autant de points, qu'il y aura de racines dans l'équation. En ſorte que les perpendiculaires tirées de ces points ſur la ligne BK, comme CG, NR, QO, & ſemblables, ſeront les racines cherchées. Sans qu'il y ait aucune exception, ni aucun défaut en cette Regle.

Car ſi la quantité s étoit ſi grande à proportion des autres p, q, r, t, & v, que la ligne LP ſe trouvât plus grande que le diametre du cercle IL, en ſorte qu'elle ne pût y être inſcrite, il n'y auroit aucune racine en l'équation propoſée, qui ne fût imaginaire. Non plus que ſi le cercle * IP étoit ſi petit, qu'il ne coupât la courbe ACN en aucun point. Et il la peut couper en ſix differens points, ainſi qu'il peut y avoir ſix differentes racines en l'équation. Mais lorſqu'il la coupe en moins ; cela témoigne qu'il y a quelques-unes de ces racines, qui ſont égales entr'elles, ou bien qui ne ſont qu'imaginaires.

* Le cercle PCN.

Chaque point de contact vaut deux points d'interſection, & a deux

racines égales ; autant qu'il manquera de points d'interſection des ſix, qui peuvent ſe trouver, en comptant un point d'attouchement pour deux d'interſection, autant il y aura de racines imaginaires.

Que ſi la façon de tracer la ligne ACN, Fig. 268. par le mouvement d'une parabole, vous ſemble incommode, il eſt aiſé de trouver pluſieurs autres moyens pour la décrire. Comme ſi Fig. 269. ayant les mêmes quantitez AB, BL, & la même pour BK, qu'on avoit poſé pour le côté droit principal de la parabole, on décrit le demi-cercle KST, dont le centre ſoit pris à diſcretion dans la ligne BK, en ſorte qu'il coupe quelque part la ligne AB, comme au point S, & que du point T, où il finit, on prenne vers K, la ligne TV égale à BL; puis ayant tiré la ligne SV, qu'on en tire une autre ; qui lui ſoit parallele, par le point A, comme AC; & qu'on en tire auſſi une autre par S, qui ſoit parallele à BK, comme SC; le point C, où ces deux paralleles ſe rencontrent, ſera l'un de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouver en même ſorte, autant d'autres qu'on en deſire. Fig. 268.

Les points S, T, V, les droites SV, AC, SC ſervent à trouver le point C; les points $S2$, $T2$, $V2$, les droites $S2$, $V2$; $AC2$; $S2$, $C2$ ſervent à trouver le point $C2$; &c. Ajoûtez les points E; $E2$, &c. qui répondent aux points C, $2C$, &c.

La démonſtration de tout ceci eſt aſſez facile. Car appliquant la Regle AE avec la parabole FD ſur le point C, comme il eſt certain qu'elles peuvent y être appliquées enſemble, puiſque ce point C eſt en la courbe ACN, qui eſt décrite par leur interſection ; ſi CG ſe nomme y, GD eſt $\frac{yy}{n}$, à cauſe que le côté droit, qui eſt n, eſt à CG, comme CG à GD; & ôtant DE, qui eſt $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, de GD, on a $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ pour GE. Puis à cauſe que AB eſt à BE, comme CG eſt à GE; AB étant $\frac{1}{2}p$, BE eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Et tout de même ſuppoſant que le point C de la courbe Fig. 269. a été trouvé par l'interſection des lignes droites SC parallele à BK, & AC parallele à SV: SB qui eſt égale à CG eſt y; & BK Fig. 269.

étant égale au côté droit de la parabole, que j'ai nommé n, BT est $\frac{yy}{n}$. Car comme KB est à BS, ainsi BS est à BT. Et TV étant la même que BL, c'est-à-dire $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, BV est $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et comme SB est à BV, ainsi AB est à BE, qui est par conséquent $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, comme devant, d'où on voit que c'est une même ligne courbe, qui se décrit en ces deux façons.

Fig. 268. 269. Par la supposition Fig. 268. AB est $\frac{1}{2}p$; le parametre de la parabole CDF est n; DE, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} = BL$; CG, y; par la nature de la parabole $n \times DG = \overline{CG}^2$, donc $DG = \frac{\overline{CG}^2}{n} = \frac{yy}{n}$; $GE = GD - DE$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et dans les triangles ABE, CGE; l'on a cette analogie, CG, y : GE, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ :: AB, $\frac{1}{2}p$: BE, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Par le point $2C$, Fig. 269. menez $2Cg = y$, perpendiculaire à BK. Par la supp. BK est égale au parametre n de la parabole CDF, Fig. 268. $2SB = 2Cg$, y; $2T2V$ est $\frac{\sqrt{2v}}{pn} = BL = DE$ de Fig. 268. De plus $2SB$ est moyenne proportionelle entre KB & $B2T$, & KB, n : $2SB$, y :: $2SB$, y : $B2T$, $\frac{yy}{n}$; & $B2v = B2T - 2T2V$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Maintenant dans les deux triangles $AB2E$, $2SB$, $B2V$, l'on a cette analogie, $2SB$, y : $B2V$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ :: AB, $\frac{1}{2}p$: $B2E$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

De ce que la valeur de BE ou $B2E$ est la même dans les deux courbes ACN des Fig. 268. 269. M. DESCARTES conclud, que c'est la même courbe. Pour en voir la raison, il faut observer 1°. que la derniere analogie auroit pû se faire, Fig. 269. dans les deux triangles $AB2E$ $2Cg2E$, parceque les triangles $2SBB2V$, $2Cg2e$, sont égaux & équiangles. Et l'analogie seroit, $2Cg$, y : $g2E$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ :: AB, $\frac{1}{2}p$: $B2E$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Il faut observer 2° que supposant par exemple CG, Fig. 268. & $2Cg$, Fig. 269. deux lignes entierement égales, & qui se nomment y; les valeurs $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$ des droites BE, $B2E$, qui n'ont que y d'indeterminée seront aussi entierement les mêmes, & les lignes BE, $B2E$ parfaitement égales; comme aussi les lignes GE, $g2E$, dont les valeurs sont $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$.

C'est pourquoi les triangles ABE, Fig. 268. $AB2E$, Fig. 269. sont entierement égaux. Par la même raison les triangles CGE, Fig. 268. $2Cg2E$, Fig. 269. sont entierement égaux. Donc les points C Fig. 268. $2C$, Fig. 269. ont la même position & le même rapport à l'égard des points A, B, & des lignes AB, BK. Ce qui se pouvant démontrer de tous les points des deux courbes ACN, Fig. 268. 269. il s'ensuit qu'elles sont entierement égales, ou la même courbe.

Montrons encore que la valeur est la même de Be, BE dans les deux

Figures au dessous de AB. Au point c, Fig. 268. nous avons $de = \frac{2\sqrt{v}}{pn}$; $cO = y$; & par la nature de la parabole, le parametre $n \times dO = cO^2$, $dO = \frac{yy}{n}$; $Oe = ed - Od$, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n}$. Et dans les triangles ABe, cOe équiangles, cO, $y : Oe$, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n} :: AB$, $\frac{1}{2}p : Be$, $\frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n}$.

Au point C, Fig. 269. nous avons BK, n; $SB = CG$, y; $TV = \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et par la nature du cercle la ligne SB est moyenne proportionelle entre TB, BK; ainsi BK, $n : SB$, $y :: SB$, $y : BT$, $\frac{yy}{n}$. Mais $BV = TV - BT$, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n}$; & dans les triangles SBV, ABE équiangles; SB, $y : BV$, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n} :: AB$, $\frac{1}{2}p : BE$, $\frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n}$. Continuons la démonstration.

Après cela pourceque BL & DE sont égales, Fig. 268. DL & BE le sont aussi; de façon qu'ajoûtant LH, qui est $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$ à DL, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, on a la toute DH, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & en ôtant GD, qui est $\frac{yy}{n}$, on a GH, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Ce que j'écris par ordre en cette sorte $GH = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$. Et le quarré de GH est

$$\frac{y^6 - py^5 \begin{matrix} -\frac{ty^4}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}ppy^4 \end{matrix} \begin{matrix} +2\sqrt{v}y^3 \\ +\frac{pty^3}{2\sqrt{v}} \end{matrix} \begin{matrix} -p\sqrt{v}yy \\ +\frac{ttyy}{4v} \end{matrix} - ty + v}{nnyy}.$$

Et en quelqu'autre endroit de cette ligne courbe qu'on veüille imaginer le point C, comme vers N, ou vers Q; on trouvera toûjours que le quarré de la ligne droite, qui est entre le point H; & celui où tombe la perpendiculaire du point C sur BH, peut être exprimé en ces termes, & avec les mêmes signes + & −.

La fraction $\frac{\frac{1}{2}pyy - \sqrt{v} + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - y^3}{ny}$ vient de ce qu'on multiplie & qu'on divise $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$, par ny, ainsi l'on a $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$. Or une quantité qui est multipliée & divisée par une même grandeur, ne change pas de valeur.

Le quarré de la ligne HO prise entre le point H & le point O où tombe la perpendiculaire du point c sur BH, s'exprime avec les mêmes termes & les mêmes signes. Ce point c répond au point Q, dont M. Descartes parle.

Par la supp. BL & de sont égales ; ajoûtez leur la ligne Bd, les lignes dL & $Be = \frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n}$ sont égales. Ainsi ôtant $LH = \frac{t}{2n\sqrt{v}}$ de Ld, il reste $dH = \frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n} - \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & ajoûtant $dO = \frac{yy}{n}$, l'on fait $HO = \frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n} - \frac{t}{2n\sqrt{v}} + \frac{yy}{n}$; qui étant multipliée par ny, donne $\frac{y^3 - \frac{1}{2}pyy - \frac{ty}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}}{ny}$, dont le quarré est

$$\frac{y^6 - py^5 \begin{matrix} -\frac{ty^4}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}ppy^4 \end{matrix} \begin{matrix} +2\sqrt{v}y^3 \\ +\frac{pty^3}{2\sqrt{v}} \end{matrix} \begin{matrix} -p\sqrt{v}yy \\ +\frac{ttyy}{4v} \end{matrix} - ty + v}{nnyy},$$ comme auparavant.

De plus IH étant $\frac{m}{nn}$, & LH étant $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL est $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$ à cause de l'angle droit IHL ; & LP étant $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, IP ou IC est à cause aussi de l'angle droit IPL, $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$. Puis ayant fait CM perpendiculaire sur IH, IM est la difference qui est entre IH, & HM, ou CG, c'est-à-dire entre $\frac{m}{nn}$ & y, en sorte que son quarré est toûjours $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, qui étant ôté du quarré de IC, il reste $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, pour le quarré de CM, qui est égal au quarré de GH déja trouvé. Ou bien en faisant que cette somme soit divisée comme l'autre par $nnyy$, on a $\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy}$.

L'angle IHL dans le demi-cercle est droit ; donc $\overline{IL}^2 = \overline{IH}^2 + \overline{LH}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}$, & $IL = \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$.

L'angle IPL aussi dans le demi-cercle est droit ; donc $\overline{IP}^2 = \overline{IL}^2 - \overline{LP}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}$; & $IP = \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}} = IC$ rayon du même cercle.

IM est ou, comme Fig. 268. $IH - HM$, $\frac{m}{nn} - y$, lorsque le point M tombe entre I & H ; ou comme Fig. 270. $MH - IH$, $y - \frac{m}{nn}$, lorsque le point I se trouve entre M & H. Or $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$ est le quarré de ces deux valeurs.

Lorsqu'on multiplie & qu'on divise une grandeur par une quantité, comme on l'a déja dit, elle ne change pas de valeur. Si l'on multiplie donc & que l'on divise par la même grandeur $nnyy$ la quantité $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$; l'on fait $\frac{\frac{ttyy}{4v} - syy - p\sqrt{v}yy + 2my^3 - nny^4}{nnyy}$ $\overline{CM}^2$.

Puis remettant $\frac{ty^4}{\sqrt{v}} + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pour nny^4; & $\sqrt{}y^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$ pour $2my^3$; & multipliant l'une & l'autre somme par $nnyy$, on a

$$y^6 - py^5 \begin{matrix} -\frac{ty^4}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}ppy^4 \end{matrix} \begin{matrix} +2\sqrt{v}y^3 \\ +\frac{pty^3}{2\sqrt{v}} \end{matrix} \begin{matrix} -p\sqrt{v}yy \\ +\frac{ttyy}{4v} \end{matrix} - ty + v \text{ égal à } \begin{matrix} -\frac{ty^4}{\sqrt{v}} \\ -qy^4 \\ +\frac{1}{4}ppy^4 \end{matrix} \begin{matrix} +\sqrt{}y^3 \\ +2\sqrt{v}y^3 \\ +\frac{pty^3}{2\sqrt{v}} \end{matrix} \begin{matrix} -p\sqrt{v}yy \\ -syy \\ +\frac{ttyy}{4v} \end{matrix}$$

C'est-à-dire qu'on a $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$. D'où il paroît, que les lignes CG, NR, QO & semblables sont les racines de cette équation, qui est ce qu'il falloit démontrer.

Le côté droit de la parabole a été pris $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = n$, donc $nn = \frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp$; & $nny^4 = \frac{ty^4}{\sqrt{v}} + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$.

HI a été prise $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}} = \frac{m}{nn}$. Multipliez tout par nn, il vient $\frac{1}{2}r + \sqrt{v} + \frac{pt}{4\sqrt{v}} = m$; & $2my^3 = ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}}$.

Mettez ces valeurs de nny^4, $2my^3$ à leur place dans $\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy}$; vous ferez $\frac{-\frac{ty^4}{\sqrt{v}} - qy^4 + \frac{1}{4}ppy^4 + ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy} = \overline{CM}^2 =$

$$\frac{y^6 - py^5 \begin{matrix} -\frac{ty^4}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}ppy^4 \end{matrix} \begin{matrix} +2\sqrt{v}y^3 \\ +\frac{pty^3}{2\sqrt{v}} \end{matrix} \begin{matrix} -p\sqrt{v}yy \\ +\frac{ttyy}{4v} \end{matrix} - ty + v = o.}{nnyy}$$

Si vous multipliez les deux membres de cette équation par leur denominateur commun $nnyy$, il restera une égalité entre les numerateurs, & si l'on ôte ce qui s'efface, il viendra $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$.

C'est parceque le parametre de la parabole est $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, que M. DESCARTES demande que q soit plus grand que $\frac{1}{4}pp$, ou que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du second. Car si $\frac{1}{4}pp$ étoit plus grand que

q, & qu'il fût encore, comme il pourroit ſouvent arriver, plus grand que $q + \frac{1}{\sqrt{v}}$; alors le parametre, qui auroit une quantité negative ſous le ſigne radical, ſeroit imaginaire, & l'on n'auroit aucune parabole *CDF*; on ne décriroit donc pas la courbe *ACN*, & on ne pourroit point conſtruire le Problême ſuivant cette Methode. Ainſi afin de rendre cette Methode univerſelle, M. DESCARTES demande que q ſoit plus grand que $\frac{1}{4}pp$.

Voici ce qu'on a voulu reprendre dans la ſolution que l'on vient de rapporter. † *Dans le quatriéme Traité nous lui marquerons une omiſſion, & une choſe, qui nous ſemble une faute. L'omiſſion eſt aux* Pages 404. 405. 406, *où il dit que le cercle* IP *peut couper la courbe* ACN *en ſix points, laquelle toutesfois il ne peut couper qu'en quatre. Mais il a omis ſa compagne décrite de l'autre part de la ligne* BK, *par l'interſection de la parabole & de la Regle, qui ſe fera au point* F; *laquelle compagne le cercle pourra couper en deux points, pour achever les ſix.* * Et ailleurs, *il y a démonſtration que* le cercle *ne peut couper* la courbe *qu'en quatre endroits, de quelle façon qu'elle puiſſe être faite*, &c.

* Lettres de M. Deſcartes Tom. 3. Lett. 315.

† Lett. 76.

A quoi M. DESCARTES répond ainſi. § *Et pourcequ'il dit, que j'ai omis, à ſavoir la compagne de la ligne courbe, que j'y décris, j'aurois commis une grande faute, ſi j'avois manqué de l'y omettre. Car il eſt très-certain, que cette compagne n'a point de lieu en la Regle que j'ai donnée, ni ne peut jamais être coupée par le cercle en la façon que je le décris; & en ſuppoſant, comme j'ai fait, que toutes les racines de l'équation ſont vrayes, & que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié du ſecond.*

* Lett. 59.

Pour vous reſſouvenir de la courbe, que M. DESCARTES appelle la contrepoſée & qu'on appelle ici la compagne de la courbe *ACN*; voyez Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Ex. 1. où Fig. 122. la courbe *ON* eſt la contrepoſée de la courbe *CEG*. La courbe *FT* Fig. 268. contrepoſée ou compagne de la courbe *ACN*, ne peut ſervir à reſoudre un Problême, dont toutes les racines ſont vrayes, comme il arrive dans l'équation $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$; car les appliquées & racines *CG*, *NR*, *QO* étant $+y$; l'appliquée *SF* ſeroit $-y$, racine fauſſe, qui ne peut ſe trouver pour une équation, dont toutes les racines ſont vrayes.

** *Il eſt très-vrai, que le cercle peut couper cette ligne courbe en ſix endroits, & qu'il l'y coupe effectivement toutes les fois que l'équation, pour la reſolution de laquelle on les décrit ſuivant la Regle, que j'en ai donnée, contient ſix vrayes racines inégales entr'elles, ſans qu'il faille pour cet effet avoir aucun égard à ſa compagne. Ainſi que vous verrez très-clairement, s'il vous plaît de prendre la peine de chercher par cette Regle les racines de l'équation ſuivante, ou de quelqu'autre ſemblable*, $x^6 - 25x^5 + 239x^4 - 1115x^3 + 2664xx - 3060x + 1296 = 0$, *Car d'autant qu'il y a ſix vrayes racines en cette équation, qui ſont 1, 2, 3,*

** Lett. 78.

2, 3, 4, 6, & 9, vous trouverez que le cercle coupera la courbe en six points, desquels tirant six perpendiculaires sur la ligne DO, *ces six perpendiculaires seront 1, 2, 3, 4, 6, & 9.* Nous montrerons Sect. 2. Ex. 6. que le cercle *CPN* coupe la courbe *ACN* en six points differens.

SECTION II.

EXEMPLES.

M. DESCARTES.

AInsi donc si on veut trouver quatre moyennes proportionelles entre les lignes a & b, ayant posé x pour la premiere, l'équation est $x^5 **** - a^4b = 0$, ou bien $x^6 **** - a^4bx * = 0$. Et faisant $y - a = x$, il vient $y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 -$

$$20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} -6a^5y + a^6 \\ -a^4by + a^5b \end{matrix} = 0.$$

C'est pourquoi il faut prendre $3a$ pour la ligne AB, & $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa+ab}} + 6aa}$ pour BK, où le côté droit de la parabole que j'ai nommé n, & $\frac{a}{3n}\sqrt{aa+bb}$ pour DE ou BL. Et après avoir décrit la ligne courbe ACN sur la mesure de ces trois, il faut faire $LH = \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & $HI = \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4\ 3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & $LP = \frac{\sqrt{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa+ab}}}{nn}$. Car le cercle, qui ayant son centre au point I passera par le point P ainsi trouvé coupera la courbe aux deux points C & N; desquels ayant tiré les perpendiculaires NR & CG; si la moindre NR est ôtée de la plus grande CG, le reste sera x, la premiere des quatre moyennes proportionelles cherchées.

Il est aisé en même façon de diviser un angle en cinq parties égales, & d'inscrire une Figure d'onze ou treize côtez égaux dans un cercle, & de trouver une infinité d'autres Exemples de cette Regle.

Toutesfois il eſt à remarquer, qu'en pluſieurs de ces Exemples, il peut arriver, que le cercle coupe ſi obliquement la parabole du ſecond genre, que le point de leur interſection ſoit difficile à reconnoître : & ainſi que cette conſtruction ne ſoit pas commode pour la pratique. A quoi il ſeroit aiſé de remedier en compoſant d'autres Regles à l'imitation de celle-ci, comme on en peut compoſer de mille ſortes.

EXEMPLE I. *Trouver quatre moyennes proportionelles entre deux lignes données.*

SOient Fig. 270. deux lignes données a, & b, entre leſquelles il faut trouver quatre moyennes proportionelles. Je nomme x la premiere des quatre quantitez cherchées, ce qui donne cette progreſſion Geometrique $a : x :: x : \frac{xx}{a} :: \frac{xx}{a} : \frac{x^3}{aa} :: \frac{x^3}{aa} : \frac{x^4}{a^3} :: \frac{x^4}{a^3} : \frac{x^5}{a^4}$.

Fig. 270. Après cela par la ſupp. la ſixiéme proportionelle $\frac{x^5}{a^4}$ eſt égale à b, donc $\frac{x^5}{a^4} = b$, $x^5 = a^4 b$, $x^5 - a^4 b = 0$. Multipliez par x, pour avoir $x^6 **** - a^4 bx * = 0$.

Enſuite pour faire que tous les termes ſoient remplis, & que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond, vous prenez $y - a = x$; vous ſubſtituez la ſixiéme & la premiere puiſſance de $y - a$ pour x^6, & x; il vient $y^6 -$

$$6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} -6a^5y + a^6 \\ -a^4by + a^5b \end{matrix} = 0.$$

Ou pour s'exprimer ſuivant la formule de M. DESCARTES $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$. Soit $a = 1$. $b = 3$.

Pour la conſtruction ſoit $AB = \frac{1}{2}p = 3a$ perpendiculaire ſur l'infinie DH, ſur laquelle vous prenez BK égale au parametre de la parabole generatrice CDF, ce parametre eſt $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}} + 6aa} = n$, parceque $\frac{t}{\sqrt{v}} = \frac{6a^5 + a^4b}{\sqrt{a^6 + a^5b}}$, & diviſant tout par aa, c'eſt-à-dire le numerateur de la fraction par aa, & le denominateur par a^4, le quotient eſt $\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}}$; & $q = 15aa$; $pp = 36aa$; $\frac{1}{4}pp = 9aa$; $q - \frac{1}{4}pp = 6aa$. Vous coupez $BL = DE = \frac{2\sqrt{v}}{pn} = \frac{2}{6an}\sqrt{a^6 + a^5b}$, & extrayant la racine aa de a^4 qui eſt dans chaque terme ſous le ſigne radi-

cal, & mettant cette racine devant le ſigne radical, c'eſt $\frac{2aa}{6an}\sqrt{aa+ab} = \frac{a}{3n}\sqrt{aa+ab}$. Enſuite vous décrivez la parabole CDF & la courbe ACN avec cette parabole, ou de l'autre façon.

Après cela vous coupez $LH = \frac{t}{2n\sqrt{v}} = \frac{6a^5+a^4b}{2n\sqrt{a^6+a^5b}} = \frac{6a^5+a^4b}{2aa\sqrt{aa+ab}} = \frac{6a^3+aab}{2\sqrt{aa+ab}}$; vous coupez auſſi $IH = \frac{m}{nn} = \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}} = \frac{20a^3}{2nn} + \frac{\sqrt{a^6+a^5b}}{nn} + \frac{36a^6+6a^5b}{4nn\sqrt{a^6+a^5b}} = \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} = \frac{18a^4+3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, en diviſant le dernier terme par $2aa$.

Maintenant vous joindrez IL, & ſur ce diametre vous décrirez le cercle IPL, dans lequel vous inſcrirez $LP = \sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}} = \sqrt{\frac{15a^4+6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$; & du centre I, de l'intervale IP, vous décrirez le cercle CPN, qui coupe la courbe ACN aux deux points C, N; deſquels l'on tirera ſur BK les perpendiculaires CG, NR, qui ſont les deux racines de l'équation reduite.

La démonſtration ſe fait comme pour Fig. 268. car au point C Fig. 270. après avoir joint $IC = IP$, & abaiſſé CM perpendiculaire à HI prolongée, & nommé CG, y; l'abſciſſe GD eſt $\frac{yy}{n}$ par la nature de la parabole; $GE = GD - DE$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et dans les triangles équiangles ABE, CGE vous ferez, CG, $y = MH : GE$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn} :: AB$, $\frac{1}{2}p : BE$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}$.

Vous avez encore $BL = DE$ ſupp. donc ajoûtant la commune EL, vous ferez $BE = DL$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}$; & $DH = DL + LH$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{u}}$; & enfin $GH = DH - GD$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{u}} - \frac{yy}{n}$. Multipliez & diviſez par ny, il vient $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{u}} - \sqrt{v}}{ny}$, dont le quarré $\overline{GH}^2$ ſera

$$\frac{y^6 - py^5 \begin{matrix} -\frac{ty^4}{\sqrt{u}} \\ +\frac{1}{4}ppy^4 \end{matrix} \begin{matrix} +2\sqrt{v}y^3 \\ +\frac{pty^3}{2\sqrt{u}} \end{matrix} \begin{matrix} -p\sqrt{v}yy \\ +\frac{ttyy}{4u} \end{matrix} - ty + v}{nnyy}.$$

De plus dans le triangle rectangle IHL, $\overline{IL}^2 = \overline{IH}^2 + \overline{HL}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}$, & dans le triangle rectangle IPL, $\overline{IP}^2 = \overline{IL}^2 - \overline{LP}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnu} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{u}}{nn}$.

Puis $MI = MH - IH$, $y - \frac{m}{nn}$, car $MH = CG$. Et dans le triangle rectangle IMC, $\overline{CM}^2 = \overline{IC}^2 - \overline{IM}^2$, $\frac{tt}{4nnu} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{u}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, qui étant multiplié & diviſé par $nnyy$ donne $\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy}$; où remettant $\frac{ty^4}{\sqrt{v}} + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pour nny^4, &

$\sqrt{}y^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pty^3}{2\sqrt{u}}$ pour $2my^3$, il vient $\frac{\begin{array}{lll} -\frac{ty^4}{\sqrt{u}} & +\sqrt{}y^3 & -p\sqrt{v}yy \\ -qy^4 & +2\sqrt{v}y^3 & -syy \\ +\frac{1}{4}ppy^4 & +\frac{pty^3}{2\sqrt{u}} & +\frac{ttyy}{4u} \end{array}}{nnyy}$

$= \overline{CM}^2$, comme GH & CM sont égales, si l'on compare les valeurs de $\overline{GH}^2$, $\overline{CM}^2$, qu'on les multiplie par $nnyy$, & qu'on ôte ce qui s'efface, il restera $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$, ou $y^6 - 6ay^5$

$$+ 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{array}{l} -6a^5y + a^6 \\ -a^4by + a^5b \end{array} = o.$$

Considerons à present les racines de cette derniere équation, qui sont deux NR, CG, Fig. 270. Mais si l'on divise par $y - a = o$ l'équation

$$y^6 - 6a^5y + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{array}{l} -6a^5y + a^6 \\ -a^4by + a^5b \end{array} = o,$$ la

division se fait juste, & le quotient est $y^5 - 5ay^4 + 10aay^3 - 10a^3yy$ $+ 5a^4y \begin{array}{l} -a^5 \\ -a^4b \end{array} = o$. Nous avons donc une racine $y = a$, qui ne peut pas être $x = y - a$, celle-ci sera donc la seconde racine plus grande que la premiere. De là il suit, que la moindre racine NR est $y = a$, la plus grande $CG = y$. Voilà pourquoi M. DESCARTES dit que si l'on ôte la moindre $NR = a$ de la plus grande CG, y, l'on aura $y - a = x$ racine cherchée, & la premiere des quatre moyennes proportionelles. Cette premiere ligne étant trouvée l'on trouvera aisément les autres trois, en prenant a pour l'unité. Voyez Liv. 1. Part. 1. Sect. 3. Art. 2.

EX. II. *Trouver cinq moyennes proportionelles entre deux lignes données.*

SOient $a = 1$. $b = 3$, deux lignes données, entre lesquelles il faut trouver cinq moyennes proportionelles : je nomme x la premiere de ces cinq, & je fais cette progression Geometrique $a : x :: x : \frac{xx}{a} :: \frac{xx}{a} : \frac{x^3}{aa} :: \frac{x^3}{aa} : \frac{x^4}{a^3} :: \frac{x^4}{a^3} : \frac{x^5}{a^4} :: \frac{x^5}{a^4} : \frac{x^6}{a^5}$. Et cette sixiéme étant par la supposition égale à b, l'équation est $\frac{x^6}{a^5} = b$; $x^6 = a^5b$. J'en extrais la racine quarrée,

j'ai $x^3 = \sqrt{a^5 b}$, j'extrais la racine cubique, il vient $x = \sqrt{QC.\ a^5 b}$.

Soit Figure 7. $FG = a = 1$, $GH = b$, suivant Liv. 1. Part. 1. Sect. 2. Fig. 7. Art. 1. n. 3. GI est $\sqrt{ab}$, ou $\sqrt{a^5 b}$, puisque a est l'unité. Je nomme $\sqrt{a^5 b}$, q; & j'ai $x^3 = q$.

Maintenant suivant Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemp. 1. Je coupe Fig. 234. Fig. 234. $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$; $CE = \frac{1}{2}q$; du point E comme centre, du rayon EA, je décris le cercle AGF; la ligne FL est $x = \sqrt{C.\ q} = \sqrt{QC.\ a^5 b}$.

La premiere des cinq moyennes proportionelles étant trouvée, l'on trouvera les quatre autres en prenant a pour l'unité.

Ex. III. *Diviser un angle donné en cinq parties égales.*

L'Angle donné est NOX, Fig. 271. supposons la chose faite, & que Fig. 271 l'arc NX est divisé en cinq parties égales aux points Q, T, P, M. Joignons NQ, QT, TP, PM, MX, NT; tirons NP, & prolongeons-la, jusqu'à ce que $TY = TN$ la coupe; tirons NM, qu'il faudra prolonger, jusqu'à ce que $PZ = NP$ la coupe; tirons encore NX, que l'on prolongera aussi jusqu'à ce que $ML = MN$ la coupe.

Par les choses, que nous venons de faire, il suit que les quatre triangles NQT, NTY, NPZ, NML sont isosceles & équiangles.

De plus en operant comme nous avons fait pour l'eptagone, Sect. 4. Art. 1. Ex. 1. Les triangles XML, NMP sont égaux; & $NP = XL$. On démontrera de même que les triangles NTP, MPZ, sont égaux & $MZ = TN$. Enfin on appliquera aux triangles NQT, TPY ce qu'on a dit des deux derniers de l'eptagone, & $PY = QN$.

Nommons à present le rayon NO, 1; la corde NQ, $z = QT = TP = PY$, &c. NT; $x = MZ$, NP, $v = XL$, mais $v = 3z - z^3$. Part. 4. Sect. 2. Art. 3. parcequ'elle est la corde de l'arc NP divisé en trois parties égales, dont NQ, z en est une; NY sera $NP + PY$, $v + z$; NM, s; NZ sera $NM + MZ$, $s + x$; NX, $b = \frac{3}{2}$, car elle est donnée, puisqu'elle est la corde de l'arc donné NX; NL sera $NX + XL$, $b + v$.

Dans les quatre triangles semblables l'on a ces analogies. 1°. QN, z : NT, x dans le triangle NQT :: NT, x : NY, $v + z$ dans le triangle NTY : $xx \quad vz + zz$. 2°. NT, x : NY, $v + z$ dans le triangle NTY :: NP, v : NZ, $s + x$ dans le triangle NPZ; & $sx + xx = vv + vz$, $s = \frac{u + uz - xx}{x}$. 3°. QN, z : NY, x dans le triangle NQT :: NM, s : NL, $b + v$ dans le triangle NML; & $s = \frac{bz + uz}{x} = \frac{vv + vz - xx}{x}$; $bz = vv - xx$. Ou mettant pour xx sa valeur $vz + zz$, il vient $bz = vv - vz - zz$; substituons encore pour v & vv

leur valeur tirée de $v = 3z - z^3$; ce sera $bz = 5zz - 5z^4 + z^6$; $z^5 * - 5z^3 * + 5z - b = o$. Ou en multipliant tout par z, $z^6 * - 5z^4 * + 5zz - bz * = o$.

Pour remplir tous les termes, rendre toutes les racines vrayes, & faire que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du second, il faut prendre $y - 2 = z$. La substitution donnera $y^6 - 12y^5 + 55y^4 - 120y^3 + 125yy$

$$\begin{matrix} -52y + 4 \\ -by + 2b \end{matrix} = o. \text{ ou } y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o.$$

Soit Fig. 272. l'infinie BK, sur laquelle vous élevez la perpendiculai-
Fig. 272. re $AB = \frac{1}{2}p = 6$. Le parametre de la parabole CDF est $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{107}{2\sqrt{7}} + 19} = n = BK$; coupez $BL = DE = \frac{2\sqrt{v}}{pn} = \frac{2\sqrt{7}}{12n}$; $LH = \frac{t}{2n\sqrt{v}} = \frac{107}{4n\sqrt{7}}$. Décrivez la courbe ACN, au point H élevez la perpendiculaire $HI = \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}} = \frac{335 + 120\sqrt{7}}{107 + 38\sqrt{7}}$. Joignez IL, sur laquelle comme diametre vous décrirez le demi-cercle IPL; dans lequel vous inscrirez $LP = \sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}} = \frac{168 + 250\sqrt{7}}{107 + 38\sqrt{7}}$. Du point I comme centre, de l'intervale IP, décrivez le cercle PNC, qui coupe la courbe ACN aux points C, N; desquels vous menerez CG, NR perpendiculaires sur BK; ce sont les deux valeurs de y.

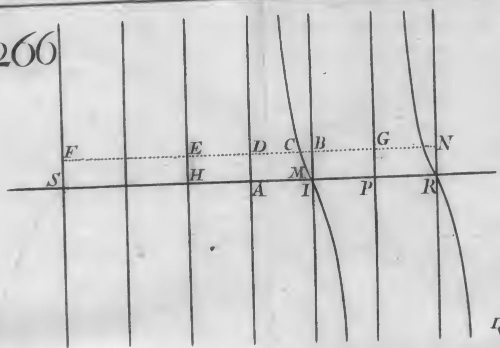
Mais si vous divisez $y^6 - 12y^5 + 55y^4 - 120y^3 + 125yy \begin{matrix} -52y + 4 \\ -by + 2b \end{matrix} = o$ par $y - 2 = o$, la division est juste, & le quotient est $y^5 - 10y^4 + 35y^3 - 50yy + 25y \begin{matrix} -2 \\ -b \end{matrix} = o$. Vous avez donc une racine $y = 2$, qui ne sauroit être la racine cherchée $z = y - 2$. Ainsi la moindre racine NR est $y = 2$, & la plus grande CG est $z = y - 2$. C'est pourquoi si l'on retranche NR de CG, le reste sera $CG - NR$, $y - 2 = z$.

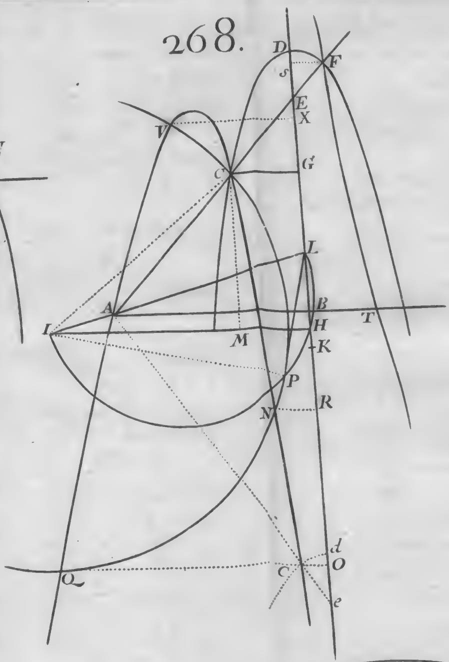
La démonstration se fera comme Ex. 1. Fig. 270.

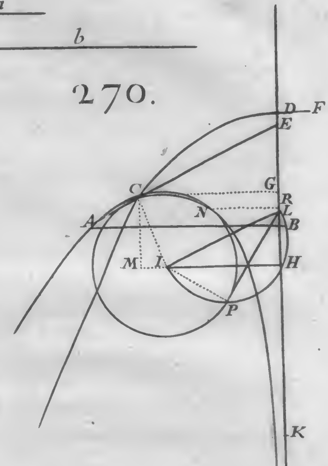
EXEMPLE IV. *Inscrire une Figure de onze côtez dans un cercle donné.*

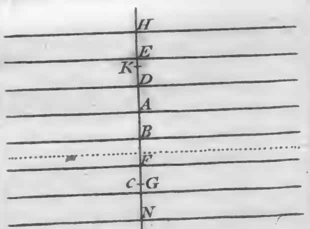
Fig. 273. SOit donné Figure 273. le cercle ADH, dans lequel il faut inscrire une Figure de onze côtez égaux. D'un des angles A je tire le diametre AKF. De l'extrêmité F je tire les cordes FH, FE, FD, FC, FB.

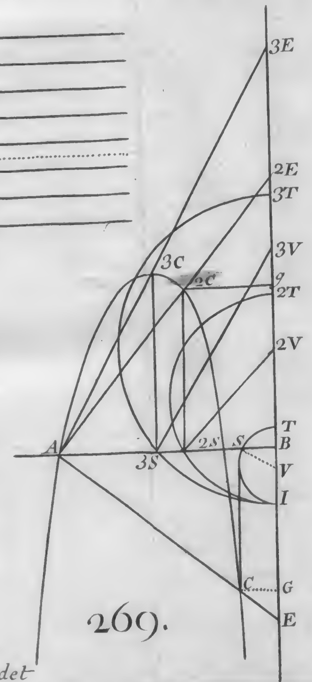
Je prolonge FC en P, jusqu'à ce qu'elle rencontre $BP = BF$; FD en N, jusqu'à ce qu'elle rencontre $CN = CF$; FE en M, jusqu'à ce

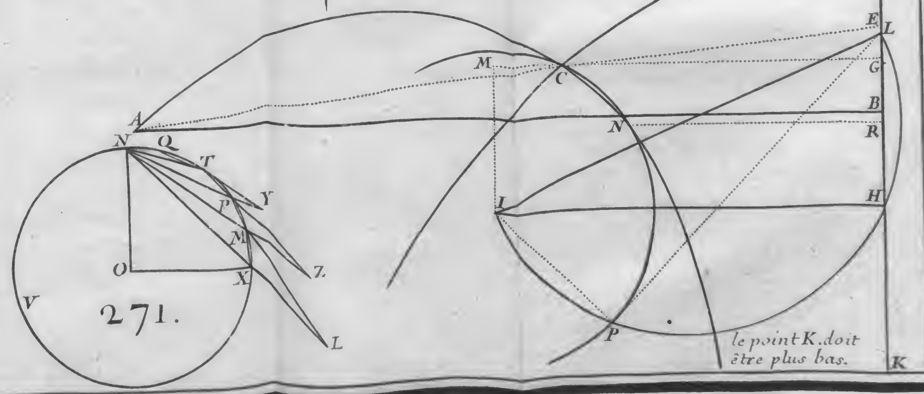












Gravé par Daudet

qu'elle rencontre $DM = DF$; FH en L, jusqu'à ce qu'elle rencontre $EL = EF$; GF en I, jusqu'à ce qu'elle rencontre $HI = HF$.

Les triangles FBP, FCN, FDM, FEL, sont isosceles & équiangles, de même que les triangles FEL, FHI & tous les angles des triangles FBP, FCN, FDM, FEL, FHI, qui sont sur leurs bases sont égaux entr'eux.

De plus les triangles ABF, BCP sont égaux & les triangles $BCF = CDN$, $CDF = DEM$, $DFE = EHL$ & les droites $BF = DN$, $CF = EM$, $DF = HL$; les angles EHF, GHI sont aussi égaux & $EF = GI$.

Nommons maintenant les connuës AF, $2a = CP$; KF, a ; les inconnuës BF, $x = DN$; CF, $y = EM$; DF, $z = HL$; EF, $v = GI$; FH, $s = HI = FG$.

Les triangles semblables BKF, PBF, donnent cette analogie, KF, a : FB, x dans le triangle BKF : : BF, x : FP, $\frac{xx}{a}$ dans le triangle PBF. Et CF, $y = FP - CP$, $\frac{xx}{a} - 2a = EM$.

Les triangles semblables PBF, NCF donnent cette analogie, BF, x : FP, $\frac{xx}{a}$: : CF, y : FN, $\frac{xy}{a}$; & pour y mettant sa valeur il vient $\frac{x^3}{aa} - 2x$; donc FD, $z = FN - ND$, $\frac{x^3}{aa} - 3x = FL$.

Les triangles semblables NCF, MDF donnent celle ci, CF, y : FN $\frac{xy}{a}$: : DF, z : FM, $\frac{xz}{a}$; & pour z mettant sa valeur ; l'on fait FM, $\frac{x^4}{a^3} - \frac{3xx}{a}$; & FE, $v = FM - EM$, $\frac{x^4}{a^3} - \frac{4xx}{a} + 2a = GI$.

Dans les triangles semblables MDF, LEF l'on trouve, DF, z : FM, $\frac{xz}{a}$: : EF, v : FL, $\frac{vx}{a}$; & pour v mettant sa valeur, c'est FL, $\frac{x^5}{a^4} - \frac{4x^3}{aa} + 2x$; & FH, $s = FL - HL$, $\frac{x^5}{a^4} - \frac{5x^3}{aa} + 5x$.

Enfin dans les triangles semblables LEF, IHF l'on a, EF, v : FL, $\frac{vx}{a}$: : FH, s : FI, $\frac{sx}{a}$; & pour s mettant sa valeur, l'on fait $FI = \frac{x^6}{a^5} - \frac{5x^4}{a^3} + \frac{5xx}{a}$; & GF, $s = GI - FI$, $\frac{6x^4}{a^3} - \frac{9xx}{a} + 2a - \frac{x^6}{a^5}$.

L'on a donc deux valeurs de s, FH, $\frac{x^5}{a^4} - \frac{5x^3}{aa} + 5x = FG$, $\frac{6x^4}{a^3} - \frac{9xx}{a} + 2a - \frac{x^6}{a^5}$, qui se reduit à $x^6 + ax^5 - 6aax^4 - 5a^3x^3 + 9a^4xx + 5a^5x - 2a^6 = 0$; cette équation se divise exactement par $x + 2a = 0$, ce diviseur ne peut être la racine cherchée, parceque $-x = 2a$ est égale au diametre AF. La racine cherchée est donc dans le quotient $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$.

Je multiplie cette équation par x, pour avoir $x^6 - ax^5 - 4aax^4 + 3a^3x^3 + 3a^4xx - a^5x * = 0$. Et pour avoir tous les termes remplis, toutes les racines vrayes, la quantité connuë du troisiéme terme plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du second ; je fais $n - 2a = x$. La transformée est $n^6 - 13an^5 + 66aan^4 - 165a^3n^3 + 209a^4nn - 121a^5n + 22a^6$, ou $n^6 - pn^5 + qn^4 - rn^3 + snn - tn + v = 0$. L'on prend a pour l'unité.

FIG. 274. Soit l'infinie BK, Fig. 274. ſur laquelle vous tirez la perpendiculaire $AB = \frac{1}{2}p = 6\frac{1}{2}$. Le parametre de la parabole NDF eſt $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{121}{\sqrt{22}} + 23\frac{3}{4}} = BK = n$. Coupez $BL = DE = \frac{2\sqrt{v}}{pn} = \frac{2\sqrt{22}}{13n}$; $LH = \frac{t}{2n\sqrt{v}} = \frac{121}{2n\sqrt{22}}$. Décrivez la courbe ACN. Au point H élevez la perpendiculaire $HI = \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}} = \frac{165}{2nn} + \frac{\sqrt{22}}{nn} + \frac{1573}{4nn\sqrt{22}}$. Joignez IL, ſur laquelle vous décrirez le demi-cercle IPL, dans lequel vous inſcrirez $LP = \sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}} = \sqrt{\frac{209 + 13\sqrt{22}}{nn}}$. Du point I comme centre, de l'intervale IP, décrivez le cercle PNC, qui coupera la courbe ACN aux points C, N; deſquels vous menerez CG, NR perpendiculaires ſur BK; ce ſont les deux valeurs de y.

Mais ſi vous diviſez $n^6 - 13an^5 + 66aan^4 - 165a^3n^3 + 209a^4nn - 121a^5n + 22a^6 = 0$ par $n - 2a = 0$, la diviſion eſt juſte & le quotient eſt $n^5 - 11an^4 + 44aan^3 - 77a^3nn + 55a^4n - 11a^5 = 0$. La racine $n = 2a$ ne peut pas être la racine cherchée $x = n - 2a$, parceque $2a$ eſt égale au diametre AF. C'eſt pourquoi ſi vous ôtez $NR = 2a$ la moindre des racines de CG la plus grande, il reſtera $CG - NR$, $n - 2a = x$ la racine cherchée. Vous inſcrirez donc $FB = x$ dans le cercle ADH, Fig. 273. & la corde AB ſera un côté de l'endecagone regulier.

La démonſtration ſe fait comme Exemple I.

EXEMPLE V. *Inſcrire une Figure reguliere de treize côtez dans un cercle donné.*

FIG. 275. Soit donné Fig. 275. le cercle AFH, dans lequel il faut inſcrire une Figure reguliere de treize côtez. Nous ſuppoſons la choſe faite, nous avons comme Ex. IV. les triangles ſemblables HKB, HBP, HCN, HDM, HEL, HFI, HGT; & les triangles égaux ABH, BPC avec les lignes AH, PC; les triangles BCH, CND avec les lignes BH, DN; les triangles CDH, DME avec les lignes CH, EM; les triangles DEH, EFL avec les lignes DH, FL; les triangles EFH, FIG avec les lignes EH, GI; les triangles FGH, GTS avec les lignes FH, ST.

Nous nommons les données AH, $2a = CP$; KH, a; BH, $x = DN$; CH, $y = EM$; DH, $z = FL$; EH, $v = GI$; FH, $s = ST$; GH, $r = GT = HS$.

En operant comme Ex. IV. nous viendrons juſqu'à FH, $s = \frac{x^5}{a^4} - \frac{5x^3}{aa} + 5x = ST$. Enſuite dans les triangles ſemblables LEH, IFH, nous avons cette analogie, EH, $v : HL$, $\frac{2x}{a} :: FH$, $s : HI$, $\frac{sx}{a}$, & mettant pour s ſa valeur, il vient $HI = \frac{x^6}{a^5} - \frac{5x^4}{a^3} + \frac{5xx}{a}$; & GH, $r = HI - IG$, $\frac{x^6}{a^5} - \frac{6x^4}{a^3} + \frac{9xx}{a} - 2a$.

Dans

Dans les triangles ſemblables IFH, TGH, nous ferons, FH, s : HI, $\frac{sx}{a}$: : GH, r : HT, $\frac{rx}{a}$; mettons pour r ſa valeur, nous trouverons $HT = \frac{x^7}{a^6} - \frac{6x^5}{a^4} + \frac{9x^3}{aa} - 2x$; & $SH = ST - TH$, $\frac{7x^5}{a^4} - \frac{14x^3}{vv} + 7x - \frac{x^7}{a^6}$.

Nous avons deux valeurs de r, à ſavoir GH, $\frac{x^6}{a^5} - \frac{6x^4}{a^3} + \frac{9xx}{a} - 2a = SH$, $\frac{7x^5}{a^4} - \frac{14x^3}{aa} + 7x - \frac{x^7}{a^6}$, ce qui ſe reduit à $x^7 + ax^6 - 7aax^5 - 6a^3x^4 + 14a^4x^3 + 9a^5xx - 7a^6x - 2a^7 = 0$; cette équation ſe diviſe exactement par $x + 2a = 0$; qui ne peut être la valeur cherchée de x, ainſi qu'on l'a dit Ex. 3. elle ſera donc dans le quotient $x^6 - ax^5 - 5aax^4 + 4a^3x^3 + 6a^4xx - 3a^5x - a^6 = 0$, dont toutes les racines ne ſont pas vrayes. C'eſt pourquoi afin que l'équation ait les conditions que M. DESCARTES demande, nous prendrons $y - 2a = x$, & la transformée ſera $y^6 - 13ay^5 + 65aay^4 - 156a^3y^3 + 182a^4yy - 91a^5y + 13a^6 = 0$, ou $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$.

Soit Fig. 276. l'infinie BK, ſur laquelle nous éleverons la perpendi- Fig. 276.
culaire $AB = \frac{1}{2}p = \frac{13}{2}$; le parametre de la parabole NDF eſt $\sqrt{\frac{91}{\sqrt{5}} + 23\frac{1}{4}}, = BK = n$; coupons $BL = DE = \frac{2\sqrt{5}}{13n}$; nous pouvons décrire la courbe ACN; coupons encore $LH = \frac{91}{2n\sqrt{5}}$; au point H éle-vons la perpendiculaire $HI = \frac{156}{2nn} + \frac{\sqrt{5}}{nn} + \frac{1183}{4nn\sqrt{5}}$. Joignons IL, ſur laquelle nous décrirons le demi-cercle IPL, dans lequel nous inſcrirons $LP = \sqrt{\frac{182 + 13\sqrt{5}}{nn}}$. Du point I comme centre, du rayon IP nous décri-rons le cercle PCN, qui coupe la courbe ACN au point C. L'appliquée CG, eſt n, de laquelle ſi nous retranchons $2a$, nous aurons $n - 2a = x$, la racine cherchée.

Il faut donc inſcrire $HB = x$ dans le cercle ADH, Fig. 275. & la corde AB ſera le côté d'une figure reguliere de treize côtez.

La parabole n'eſt point tracée dans la Figure, ni la ligne LP.

Le point K y manque auſſi; le Lecteur peut aiſément y ſuppléer.

La démonſtration ſe fait, comme Ex. I.

Ex. VI. $x^6 - 25x^5 + 239x^4 - 1115x^3 + 2664xx - 3060x + 1296 = 0$.
$x^6 - px^5 + qx^4 - rx^3 + sxx - tx + v = 0$.

CEtte équation, qui, comme on l'a dit Sect. 1. à la fin, a été propoſée par M. DESCARTES, pour faire voir, que ſi on la conſtruiſoit, un cercle couperoit une courbe en ſix points differens; peut être diviſée juſte par $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x - 9 = 0$; ainſi elle peut ſe reduire à un Problême à la ligne droite. Mais en la ſuppoſant un Problême de ſix dimenſions, elle peut ſe conſtruire de cette ſorte.

Fig. 277. Sur l'infinie BK. Fig. 277. je prends BK égale au parametre de la parabole $CDF = n = \sqrt{\frac{671}{4}}$; au point B j'éleve la perpendiculaire $AB = \frac{25}{2}$; je coupe encore $BL = DE = \frac{72}{25n}$; & je décris la courbe ACY. Je coupe ensuite $LH = \frac{85}{2n}$; & au point H j'éleve la perpendiculaire $HI = \frac{4499}{4nn}$; je joins LI, sur laquelle je décris le demi-cercle IPL, dans lequel j'inscris la droite $LP = \sqrt{\frac{3564}{nn}}$; & du point I comme centre, de l'intervale IP, je décris le cercle NCY, qui coupe la courbe ACY aux six points N, C, Q, S, X, Y ; les perpendiculaires tirées de ces points sur BK sont les six racines de l'équation, $YZ = 1$, $XV = 2$, $ST = 3$, $QO = 4$, $CG = 6$, $NR = 9$.

La démonstration peut se faire à chaque point, en tirant les lignes necessaires & en plaçant la parabole CDF, comme on a fait pour le point C.

* Tom. 3. Lett. 59. M. DESCARTES remarque * qu'aux Exemples, où les six racines vrayes sont réelles, le cercle coupe si obliquement la ligne courbe, qu'on ne peut pas bien distinguer les points d'intersection.

SECTION III.

Autre Methode pour construire les Equations de cinq ou six dimensions.

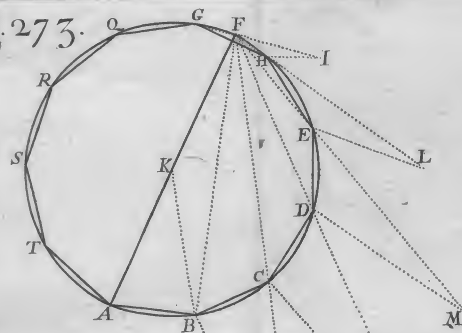
REGLE I.

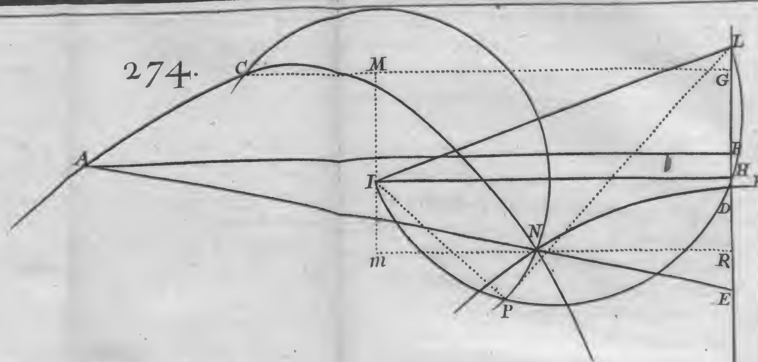
1. LOrsque l'équation est indeterminée, & que l'une des deux inconnuës seulement est élevée au cinquiéme ou sixiéme degré ; on la fait arbitraire : & si l'autre ne montoit qu'au premier ou second degré, l'on suivroit les Regles ; on construiroit le Problême, qui seroit plan, comme on a dit Liv. 1. Part. 2. Mais si cette autre inconnuë étoit du troisiéme ou du quatriéme degré ; on construiroit le Problême, qui seroit solide, comme on l'a enseigné, Liv. 3. Part. 4.

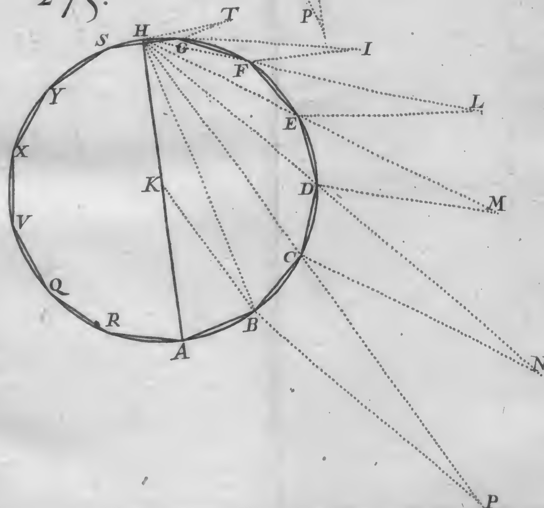
2. Lorsque l'équation est indeterminée, & que les deux inconnuës s'élevent jusqu'au cinquiéme, ou sixiéme degré : l'on prend pour arbitraire l'une des deux, & l'on forme une équation à la parabole ordinaire, ou à la premiere parabole cubique, qui contient l'inconnuë de l'équation à construire : avec cette équation l'on conclud un autre lieu, & le reste comme Liv. 3. Part. 4.

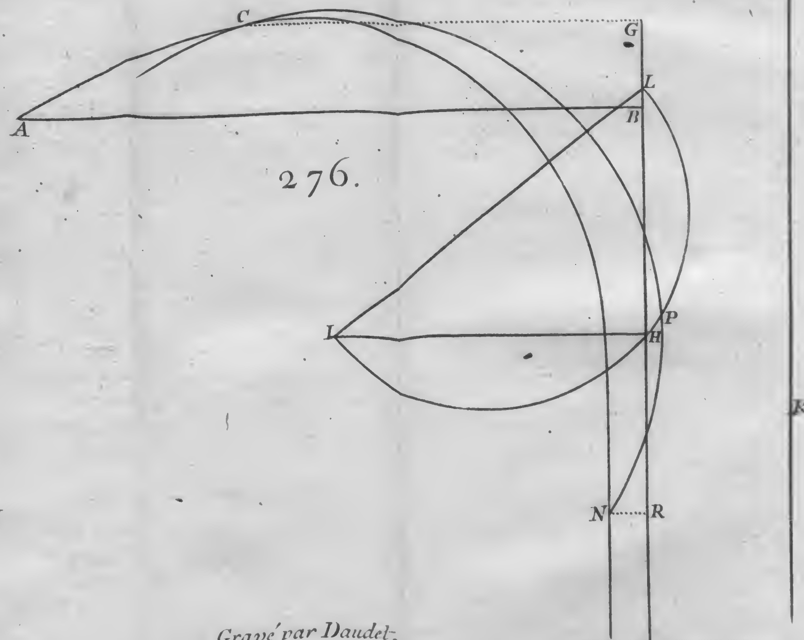
3. Lorsque l'équation proposée n'a qu'une inconnuë, & qu'elle est determinée, l'on forme deux lieux comme l'on vient de le dire.

1°. Soit proposée l'équation $x^5 = a^4b$, $x^5 - a^4b = 0$, qui sert à trouver quatre moyennes proportionelles entre deux lignes données a, & b.


Fig. 273.
Q
G
F
H
I
R
E
L
S
K
D
T
C
M
A
B
N
P


274.
C
M
L
G
A
B
H
F
I
D
N
m
R
E
P


275.
T
P
S
H
G
I
F
Y
L
E
X
K
D
M
V
C
Q
R
B
A
N
P


C
G
L
A
B
276.
P
I
H
K
N
R
Gravé par Daudet.

Multipliez-la par x, pour avoir $x^6 - a^4bx = o$. Prenez $xx = ay$ équation à la parabole quarrée ; donc $x^6 = a^3y^3$, qui étant ſubſtituée, il vient $a^3y^3 = a^4bx$, $y^3 = abx$ équation à la premiere parabole cubique.

Il faut conſtruire ces deux paraboles, Fig. 278. ſur l'axe AD vous décrirez la parabole cubique AEC ſuivant Liv. 2. Part. 1. Sect 4. Art. 3. dont le parametre eſt $\sqrt{ab}$; enſuite ſur le même axe vous décrirez la parabole quarrée AFC avec le parametre a. L'appliquée CD tirée du point C, où ces paraboles ſe coupent, ſur l'axe AD eſt la valeur de x premiere des quatre moyennes proportionelles. Nommez $AD = CB$, y ; $CD = AB$, x.

Dém. Par la nature de la parabole cubique, le cube de l'appliquée BC eſt égal au ſolide fait ſur le quarré du parametre & ſur l'abſciſſe AB, c'eſt-à-dire $y^3 = abx$. Par la nature de la parabole ordinaire le parametre $a \times AD = \overline{CD}^2$, $ay = xx$, $y = \frac{xx}{a}$. Subſtituez cette valeur de y dans $y^3 = abx$; vous aurez $\frac{x^6}{a^3} = abx$; $x^6 = a^4bx$; $x^5 = a^4b$.

Si l'on avoit d'abord pris l'équation à la parabole cubique, $x^3 = aay$ & que l'on eût ſubſtitué cette valeur de x^3 dans $x^6 = a^4bx$; l'on auroit trouvé $a^4yy = a^4bx$, $yy = bx$ équation à la parabole quarrée.

Ces deux paraboles ont leur parametre different du parametre des paraboles de Fig. 278. à cela près la conſtruction eſt la même. Fig. 278.

Si l'on n'avoit pas élevé l'équation $x^5 - a^4b = o$ à la ſixiéme puiſſance, on n'auroit pû ſubſtituer qu'une fois aay pour x^3, en ſe ſervant de l'équation $x^3 = aay$, & la reduite ſeroit $aayxx = a^4b$, $xxy = aab$, équation à une hyperbole cubique entre ſes aſymptotes.

Le même arriveroit en ſe ſervant de l'équation $xx = ay$ à la parabole ordinaire, car on feroit encore $aayyx = a^4b$, $yyx = aab$.

Ainſi la conſtruction ſe feroit avec deux courbes du ſecond genre, au lieu qu'en élevant l'équation au ſixiéme degré, l'on conſtruit le Problême avec une courbe du premier degré & une du ſecond.

2°. Soit propoſée l'équation $x^6 = a^5b$, qui ſert à trouver cinq moyennes proportionelles entre deux lignes données a & b.

Prenez $xx = ay$ équation à la parabole ordinaire, la ſubſtitution donnera $a^3y^3 = a^5b$, $y^3 = aab$.

Faites Fig. 279. la parabole quarrée AC, dont le parametre eſt a, Fig. 279. l'axe AD, le ſommet A. Décrivez la même parabole AH ſur l'axe AG perpendiculaire à AD.

Prenez $AF = \frac{1}{2}a$, élevez $EF = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire ſur AG, du centre E, du rayon EA décrivez le cercle AH, qui coupe la parabole AH au point H ; appliquez HG ; par le point H menez HD parallele à AG, qui coupera la parabole AC au point C ; menez encore CB parallele &

égale à $HG = AD$; $CD = AB$ est la premiere des cinq moyennes proportionelles. Nommez $CD = AB$, x ; $AD = BC = GH$, y.

Dém. Suivant l'Ex. 1. Art. 1. Sect. 1. Part. 4. vous avez au point H, $y^3 = aab$; & $HG = y = \sqrt{C.\,aab} = BC = AD$. Maintenant par la nature de la parabole AC ; vous avez $a \times AD = \overline{CD}^2$, $ay = xx$; & $y = \frac{xx}{a}$. Donc $y = \frac{xx}{a} = \sqrt{C.\,aab}$; $\frac{x^6}{a^3} = aab$; $x^6 = a^5 b$.

Prenez à present l'équation $x^3 = aay$ à la parabole cubique ; par la substitution l'équation $x^6 = a^5 b$ se changera en $a^4 yy = a^5 b$; $yy = ab$.

FIG. 280. Décrivez Fig. 280. la parabole cubique AC, dont le parametre est a, l'axe AD. Prenez $AB = a$, $AF = b$; sur le diametre BF décrivez le demi cercle BDF ; la perpendiculaire AD est 13. 6. Eucl. $\sqrt{ab}$.

Appliquez CD à la parabole cubique. Par la nature de cette parabole le cube de CD est égal au solide sous l'abscisse AD & le quarré du parametre a, c'est-à-dire $x^3 = aay$, en nommant CD, x ; AD, $y = \sqrt{ab}$.

Pour y substituez $\sqrt{ab}$ dans $x^3 = aay$, vous ferez $x^3 = aa\sqrt{ab}$, $x^6 = a^5 b$.

FIG. 281. 3°. Soit proposée l'équation $z^5 - 5z^3 + 5z - b = 0$, qui sert à diviser un arc donné en cinq parties égales.

Je prends $ay = zz$, & je substituë la valeur de zz dans la proposée, il se fait $aayyz - 5ayz + 5z - b = 0$. $z = \frac{b}{aayy - 5ay + 5}$.

Suivant les Regles de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. je décris la courbe ACD, Fig. 281. dont l'axe est BF. Ensuite sur le même axe je décris la parabole ordinaire BCD, qui coupe la premiere courbe aux points C, D. Nommons les appliquées CE, DF, z ; les abscisses BE, BF, y. La droite CE, divise l'arc donné en cinq parties égales, & la droite FD divise le reste du cercle en cinq parties égales.

Dém. Par la nature de la courbe ACD, l'on a au point C, $z = \frac{b}{aayy - 5ay + 5}$, ou $aayyz - 5ayz + 5z - b = 0$. Par la nature de la parabole BCD, l'on a au même point C, le parametre $\times BE = \overline{EC}^2$, $ay = zz$. Pour ay substituez zz dans l'équation precedente, vous ferez $z^5 - 5z^3 + 5z - b = 0$.

On peut prendre $aay = z^3$, & la substitution donne $aayzz - 5aay + 5z - b = 0$, $y = \frac{b - 5z}{aazz - 5aa}$.

On construit le Problème en décrivant la parabole cubique ACD, & la courbe BCD suivant les Regles de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

Les deux appliquées CE, DF tirées des points d'intersection C, D sur l'axe, donnent les deux droites, qui divisent en cinq parties égales & l'arc donné & le reste du cercle.

Dém. Au point D, l'on a pour la courbe BCD, $y = \frac{b - 5z}{aazz - 5aa}$, ou $aayzz - 5aay + 5z - b = 0$. Au même point D l'on a pour la

parabole cubique ACD, $aay = z^3$; & en ſubſtituant z^3 pour aay dans la precedente équation, il vient $z^5 - 5z^3 + 5z - b = 0$.

4°. Soit propoſée l'équation $x^6 - ax^5 - 5aax^4 + 4a^3x^3 + 6a^4xx - 3a^5x - a^6 = 0$. qui ſert à inſcrire une Figure reguliere de treize côtez dans un cercle.

Si nous prenons $aay = x^3$, la ſubſtitution reduira la propoſée à $a^4yy - a^3yxx - 5a^4xy + 4a^5y + 6a^4xx - 3a^5x - a^6 = 0$.

Si nous prenons $ay = xx$, la transformée ſera $a^3y^3 - a^3yyx - 5a^4yy + 4a^4xy + 6a^5y - 3a^5x - a^6 = 0$. $x = \frac{y^3 - 5ayy + 6aay - a^3}{yy - 4ay + 3aa}$,

Avec cette équation je décris la courbe GC, dont FE eſt une aſymptote, & avec $ay = xx$ je décris la parabole qaarrée ACE. L'appliquée CD eſt un côté de la Figure reguliere de treize côtez. FIG. 282.

SECTION IV.

Deſcription des Courbes par leur Equation du cinquiéme ou du ſixiéme degré.

SI les deux inconnuës ſont du cinquiéme ou du ſixiéme degré, l'on en fera une arbitraire, & l'on transformera, s'il eſt neceſſaire, l'équation en une de ſix dimenſions, qui ait les conditions que M. DESCARTES demande Sect. 1. & l'on cherchera chaque point de la courbe en conſtruiſant autant de fois le Problême, qu'on voudra trouver de differens points. Le reſte n'eſt pas different de ce qu'on a dit, Part. 4. Sect. 2. Art. 5.

CONCLUSION.

M. DESCARTES.

Mais mon deſſein n'eſt pas de faire un gros Livre, & je tâche plûtôt de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peut-être que j'ai fait, ſi on conſidere, qu'ayant reduit à une même conſtruction tous les Problêmes d'un même genre, j'ai tout enſemble donné la façon de les reduire à une infinité d'autres diverſes; & ainſi de reſoudre chacun d'eux en une infinité de façons. Puis outre cela, qu'ayant conſtruit tous ceux qui ſont plans, en coupant d'un cercle une ligne droite; & tous ceux qui ſont ſolides,

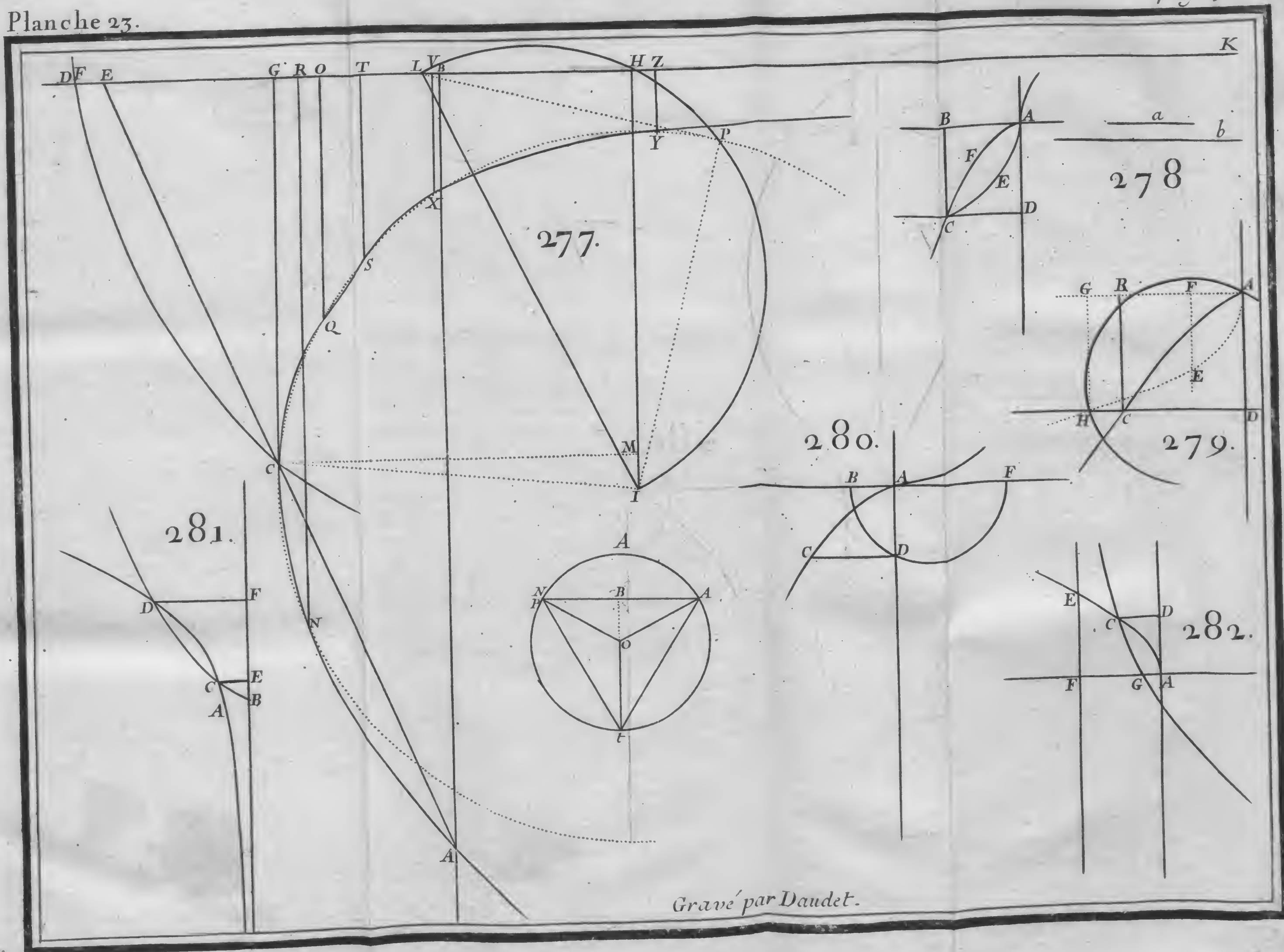
en coupant auſſi d'un cercle une parabole, & enfin tous ceux qui ſont d'un degré plus compoſez, en coupant tout de même d'un cercle une ligne, qui n'eſt que d'un degré plus compoſée que la parabole; il ne faut que ſuivre la même voye, pour conſtruire tous ceux qui ſont plus compoſez à l'infini. Car en matiere de progreſſions Mathematiques, lorſqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eſt pas mal-aiſé de trouver les autres. Et j'eſpere que nos neveux me ſauront gré, non ſeulement des choſes, que j'ai ici expliquées; mais auſſi de celles, que j'ai omiſes volontairement, afin de leur laiſſer le plaiſir de les inventer.

Cet endroit de M. DESCARTES n'a pas beſoin de Commentaire. C'eſt un précis de ce qu'il a executé dans ſa Geometrie. J'ai tâché de la rendre ſenſible au Lecteur, & je ſuis perſuadé, comme je l'ai dit au commencement, que quelque étendu que ſoit en beaucoup d'endroits mon Commentaire, on aura encore plûtôt lû & compris le Texte avec le Commentaire que le Texte tout ſeul.

FIN.

De l'Imprimerie de CLAUDE PERROT, Ruë Confort, à l'Epée Royale.

Planche 23.





APPROBATION.

J'Ai lû par Ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, un Manuſcrit qui a pour Titre; *Commentaires ſur la Geometrie de* M. DESCARTES, *par le* P. C. RABUEL *de la Compagnie de* JESUS. Il eſt à ſouhaitter que les autres Ouvrages d'Algebre & de Geometrie, du même Auteur, ſuccedent bientôt à celui-ci dont il m'a parû que l'Impreſſion ſeroit utile. Fait à l'Obſervatoire Royal de Paris le huitiéme Novembre mil ſept cens vingt-ſept.

GODIN.

PRIVILEGE GENERAL.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE, à nos Amez & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; SALUT, Nôtre bien Amé le Pere ***. Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaitteroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de ſa Compoſition qui a pour Titre, *Commentaires ſur la Geometrie de* M. DESCARTES, *par le* P. C. RABUEL, *de la Compagnie de* JESUS, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce neceſſaires; offrant pour cet effet de le faire imprimer en beau papier & beaux caracteres, ſuivant la feüille imprimée & attachée pour modele ſous le contre ſcel des Preſentes; A CES CAUSES, voulant traitter favorablement ledit Expoſant; Nous lui avons permis & permettons par ces Preſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage ci-deſſus expoſé, en un ou pluſieurs Volumes, conjointement ou ſeparément, & autant de fois que bon lui ſemblera; ſur papier & caracteres conforme à ladite feüille imprimée & attachée pour modéle ſous nôtre dit contreſcel, & de le faire vendre & debiter par tout nôtre Royaume, pendant le tems de dix années conſecutives, à compter du jour de la datte des Préſentes; FAISONS défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'Impreſſion étrangere dans aucun lieu de nôtre Obéïſſance; comme auſſi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage ci-deſſus expoſé, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits ſous quelque pretexte que ce ſoit d'augmentation, correction, changement de Titre ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui; à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amande contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Preſentes ſeront Enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'Impreſſion de cet Ouvrage ſera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs; & que l'Impetrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. & qu'avant que de l'expoſer en vente, le Manuſcrit ou Imprimé qui aura ſervi de Copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de nôtre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le

ſieur CHAUVELIN, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans nôtre Bibliotheque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre, & un dans celle de nôtredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le ſieur CHAUVELIN; le tout à peine de nullité des Preſentes, du contenu deſquelles Vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Expoſant ou ſes Ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie deſdites Preſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée; & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos Amez & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier nôtre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & neceſſaires ſans demander autre permiſſion; & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel eſt nôtre plaiſir. Donné à Paris le vingt-ſixiéme jour du mois de Novembre, l'an de grace mil ſept cens vingt-ſept, & de nôtre Regne le treiziéme.

Signé, PAR LE ROY, en ſon Conſeil.

CARPOT.

Regiſtré ſur le Regiſtre VII. de la Chambre Royale & Syndicale de la Librairie & Imprimerie de Paris, Numero 24. fol. 23. conformément au Reglement de 1723. qui fait défenſes Art. IV. à toutes Perſonnes de quelque qualité qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, debiter, & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs, ou autrement; & à la charge de fournir les Exemplaires preſcrits par l'Article CVIII. du même Reglement, à Paris le neuviéme Decembre mil ſept cens vingt-ſept.

BRUNET, *Syndic.*

Permiſſion du Reverend Pere Provincial.

JE ſouſſigné Provincial de la Compagnie de JESUS, dans la Province de Lyon, ſuivant le pouvoir que j'ai reçû de nôtre R. P. General, permets au Pere CLAUDE RABUEL, de faire imprimer ſon Ouvrage, qui porte pour Titre, *Commentaires ſur la Geometrie de* M. DESCARTES; en foi & témoignage de quoi j'ai ſigné la preſente Permiſſion. A Lyon, le 24. Mars 1728.

CHARLES DU BOIS.

CESSION DU PRIVILEGE.

Le Privilége ci-deſſus a été cedé par le P. RABUEL Jeſuite, à MARCELLIN DUPLAIN, Libraire, pour en joüir ſuivant leurs Conventions.

Fautes à corriger avant que de lire cet Ouvrage.

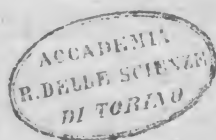
QUelque ſoin qu'on ait pris pour rendre correcte cette Edition, on n'a pû éviter bien des fautes que le grand nombre des calculs & des caracteres algebriques occaſionnent & introduiſent comme neceſſairement. On a tâché d'aſſembler ici toutes celles, qui ſont répanduës dans la ſuite de ces Commentaires, il n'en eſt aucune qu'un Lecteur un peu attentif ne corrige ſur le champ. Comme page 5. ligne 27. $\overline{2x^3}$, il eſt évident par la lecture de ce qui précede qu'il faut lire en cet endroit $\frac{2x^3}{cc}$. Les autres fautes ſont à peu près de même nature. On n'a pas laiſſé pourtant de les marquer pour épargner aux Commençans la peine d'examiner, s'ils ne ſont point dans l'erreur, lorſque leur doute n'eſt fondé que ſur une faute d'impreſſion. On en a negligé quelques-unes, comme des fautes d'ortographe, qui n'intereſſent en aucune façon la Geometrie.

Page *17.* ligne *35.* c'eſt pourquoi la ligne, *liſez*, c'eſt pourquoi dans la ligne. p. *19.* l. *11.* c^3zd^4, *l.* $c^3\overline{z+d^4}$. p. *25.* *à la marge*, Figure 10. *l.* Figure 11. page 27. l. *24.* $\sqrt{aa+\frac{1}{4}bb}$, *liſez* $\sqrt{2aa+\frac{1}{4}bb}$. page *29.* l. *6.* demi Axe, *AB*, *l.* *AE*. p. *34.* *l.* *11.* $\frac{1}{2}-a$, *l.* $-\frac{1}{2}a$. p. *43.* l. *23.* $+\frac{1}{4}cc$, *l.* $-\frac{1}{4}cc$. p. *44.* l. *14.* $\frac{3bb}{p}$, *l.* $\frac{3bb}{2p}$. p. *45.* l. *18.* $\frac{2}{1}c$, *l.* $\frac{1}{2}c$. p. *49.* l. *10.* $zz\pm az$. *l.* $zz\mp$. l. *13.* *même faute*. l. *14.* $\pm\frac{1}{2}a$, *l.* $\mp$ p. *51.* l. *9.* $x\pm\sqrt{}$&c. *l.* $z=\pm\sqrt{}$. p. *52.* l. *16.* $z=\frac{1}{4}a$, *l.* $\frac{1}{2}a$. p. *56.* l. *23.* *Ck*, *l.* *ck*. p. *76.* l. *23.* $-dy$, *l.* $-zy$. p. *80.* l. *14.* $y=-bdd+\frac{1}{2}cez$, *l.* $\frac{-bdd+\frac{1}{2}cez}{dd-ez}$, p. *82.* l. *10.* $xx\pm ax$, &c. *l.* $xx=\pm ax$. p. *99.* l. *7.* *Cſ*, *l.* *Cf*. p. *103.* *l.* *22.* l'axe, *l.* l'arc. p. *104.* l. *33.* *EH*, *l.* *EK*. p. *125.* l. *1.* y^3pzz, *l.* $y^3=pz$. l. *28.* $-2bxyy\ 2abxy$, *l.* $-2bxyy.+$ p. *126.* l. *19.* $\frac{zy}{a-y}$, *l.* $\frac{xy}{a-y}$. p. *129.* l. *17.* à l'équation $x=\frac{1}{8}a^3$, &c. ajoûtez $+2a^3$. l. *32.* $-x=\sqrt{\frac{5}{4}a}$, *l.* $-x=\frac{5}{4}a$. p. *130.* l. *30.* $x=a$, *l.* $x=0$. p. *131.* l. *12.* -128. *l.* $=128$. l. *19.* $-2a^3$, *l.* $+2a^3$. p. *134.* l. *6.* $=6$, *l.* $=0$. l. *23.* $\frac{9}{4}aMK$, *l.* $\frac{9}{4}a=MK$. p. *136.* l. *13.* $\sqrt{-\frac{7}{16}}$, *l.* $\sqrt{-\frac{7}{16}aa}$. l. *26.* $\pm y\sqrt{}$ &c. *l.* $\pm y=\sqrt{}$. p. *137.* l. *14.* y^3-pzz, *l.* $y^3=pzz$. p. *140.* l. *16.* $\frac{aayy}{aa+bb}$, *l.* $\frac{aayy}{aa-bb}$. p. *141.* l. *13.* *SKF*, *l.* *SKT*. l. *21.* $\frac{aa-bx}{a}$, *l.* $\frac{aa+bx}{a}$. p. *144.* l. *22.* $zz-a\sqrt{px}$, *l.* $zz=$. $\underline{\text{l. } 34.\ n-s}$, *l.* $a-s$. p. *154.* à la marge, Fig. 64. *l.* Fig. 69. p. *155.* l. *25.* $\sqrt{mm+\omega x}$, *l.* $+\sqrt{}$. p. *159.* l. *12.* Gc, *l.* Cc. p. *164.* l. *3.* $NH=NB$, *l.* *ND*. p. *167.* l. *33.* $y-\sqrt{}$&c. *l.* $y=\sqrt{aa-xx}$. p. *168.* l. *14.* $y+\frac{p}{d}xx$, ôtez, y. p. *176.* l. *9.* *AZ*, *l.* *Az*. p. *178.* l. *28.* $\overline{-bx;+y}$, *l.* $\overline{-bx+y}$. p. *190.* l. *3.* *EF*, *m en E*, *l.* *EF en E*. l. *16.* $\sqrt{-mm\frac{p}{m}xx}$, *l.* $\sqrt{-mm-\frac{p}{m}xx}$. p. *194.* l. *5.* z, *l.* Z. l. *28* $\frac{ax}{x}$, *l.* $\frac{ax}{z}$. p. *195.* l. *28.* $\sqrt{mm+\omega x+\frac{p}{m}x}$, *l.* $\sqrt{\ldots.}-\frac{p}{m}x$. p. *196.* l. *31.* $CB\times CD$, *l.* $CB\times CF$, & $CF\times CH$, *l.* $CD\times CH$. p. *200.* l. *12.* $p-mnn$, *l.* $p=mnn$. p. *201.* ligne derniere Iv, IM, *l.* $Iv-IM$. p. *202.* l. *15.* $\frac{a}{z}\sqrt{\frac{3}{4}}$, *l.* $\frac{a}{z}=\sqrt{\frac{3}{4}}$. p. *204.* l. *18.* $-\frac{3}{2}y$, *l.* $=\frac{3}{2}y$. p. *206.* l. *5.* $\frac{p}{m}vv$, *l.* $\frac{m}{p}vv$. p. *214.* l. *7.* *BA*

$+ An, x - a$, *l.* $x + a$. p. 216. l. 10. $4mp$, *l.* $\sqrt{4mp}$. p. 218. l. 20. $n \frac{1}{2}$. *l.* $n = \frac{1}{2}$. p. 220. l. 2. $y - \frac{n}{z}x$ &c. *l.* $y = \frac{-n}{z}x$. p. 221. l. 3. au Titre $- \frac{p}{m}xx$, *l.* 1. $+ \frac{p}{m}xx$. 235. l. 1. $\sqrt{\frac{4aa\omega\omega mm}{ppzz}}$, *l.* $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz}}$. p. 240. l. 36. CS, *l.* CR. p. 241. l. 22. $\frac{9}{16}bb\sqrt{5}$, *l.* $\frac{9}{16bb}\sqrt{5}$. p. 243. l. 21. $\sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}xx}$, *l.* $\sqrt{\ldots\ldots - \frac{p}{m}xx}$. p. 244. l. 31. $\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$, *l.* $\frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz}$. *l.* 32. $\frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz}$, *l.* $\frac{aa\omega mm}{2ppzz}$. l. 37. même faute. p. 261. *l.* 9. $\frac{-xy}{2n-y}$, *l.* $- \frac{xy}{2a-y}$. *l.* 13. $y + a$, *l.* $-y + a$. p. 263, l. 13. kn, *l.* KN. p. 264. à la marge Fig. 123. *l.* Fig. 128. p. 272. l. 13. $BPDr$, *l.* $BP = Dr$. l. 24. Toute la courbe CiY & CP une de ses ordonnées *est inutile*. p. 273. l. 15. axe, *l.* arc. p. 279. l. 27. $-x$, *l.* $a - x$. p. 303. l. 31. $+ 2bcdez$, *l.* $- 2bcdez$. l. 33, $bdddss$, *l.* $bddss$. p. 308. l. 35. quy, *l.* qry. p. 313. l. 8. ddv, *l.* $- ddv$. l. 16. $2bdvz$, *lisez* $2bdevz$. l. 17. ef, *l.* $2f$. p. 315. l. 25. $2ey$, *l.* $yy - 2ey$. p. 316. l. 17. $+ 2ax$, *l.* $- 2ax$. p. 320. l. 31. ee, *l.* $+ ee$. p. 336. l. 10. $2yy - qy$, *l.* $2yy = qy$. p. 356. l. 18. $2 : 1$, *l.* $3 : 2$. p. 375. l. 23. l'air, *l.* l'arc. p. 383. l. 24. $- dz$, *l.* $- dk$. p. 385. l. 24. d à c, *l.* d à e. p. 386. l. 26. Article 2. *l.* Arttiele 3. p. 393. l. 5. $-hz$, *l.* $+ hz$. p. 410. l. 2. $\chi\pi$ *l.* $\pi\pi$. p. 426. l. 22. $+ 2abx$, *l.* $- 2abx$. p. 434. l. 29. $y + a$ &c. *l.* $y - a$. p. 436. l. 4. $y + 7\ 0$, *l.* $y + 7 = 0$. p. 446. l. 2. $aadff = 0$. *l.* $aaddff = 0$. p. 452. l. 12. $- 4ax^3$, *l.* $- 4a^3x$. p. 516. l. 23. $- zz$, *l.* $- 2z$. p. 551. l. 24. $\frac{7939}{256}$, *l.* $- \frac{7939}{256}$. p. 523. l. 22. Fig. 239. *l.* Fig. 232. p. 525. l. 16. $- qz$, *l.* $+ qz$. p. 539. l. 7. DK, &c. *l.* Dk. p. 541. l. 29. $\overline{EF}^3$, *l.* $\overline{EF}^2$. p. 544. l. 4. Regle 7. *l.* Regle 6. p. 548. l. 15. $\frac{1}{2}qq$, *l.* $\frac{1}{2}q$. p. 550. ligne derniere $- 132496$, *l.* $= 132496$. p. 552. ligne 14. $\frac{z^4}{\frac{1}{3}pz}$; *l.* $\frac{z^4}{-\frac{1}{3}pz}$. p. 556. l. 22. $- 32aa^3$, *l.* $32a^3$. p. 570. l. 14. $\frac{\sqrt{2v}}{pn}$, *l.* $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. p. 580. l. 10. $y^6 - 6a^5y$, *l.* $y^6 - 6ay^5$. p. 581. l. 34. $xxvz + zz$, *l.* $xx = vz + zz$. l. 36. $s = \frac{v + \&c.}{x}$ *l.* $s = \frac{vv + \&c.}{x}$.

même ligne, NY; *l.* NT.




ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO







